UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FRANCISCO MORAZÁN

VICE RECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

DIRECCIÓN DE POSTGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

TESIS DE MAESTRÍA

VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO EN LAS CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS UTILIZANDO EL SOFTWARE GEOGEBRA CON ALUMNOS DE II DE MAGISTERIO DE LA E.N.M.P.N.

TESISTA

Licda. I D A N I A M A R V E L Y C A S T E L L A N O S E S P I N A L

ASESOR DE TESIS

M.Sc. M A R L O N G I O V A N N I M E J I A B A N E G A S

T E G U C I G A L P A M . D . C . 24 de Noviembre 2010

VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO EN LAS CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS UTILIZANDO EL SOFTWARE GEOGEBRA CON ALUMNOS DE II DE MAGISTERIO DE LA E.N.M.P.N.

U N I V E R S I D A D P E D A G Ó G I C A N A C I O N A L
F R A N C I S C O M O R A Z Á N

V I C E R R E C T O R Í A D E I N V E S T I G A C I Ó N Y P O S T G R A D O

D I R E C C I Ó N D E P O S T G R A D O

VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO EN LAS CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS UTILIZANDO EL SOFTWARE GEOGEBRA CON ALUMNOS DE II DE MAGISTERIO DE LA E.N.M.P.N.

“TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE MASTER EN MATEMÁTICA EDUCATIVA”

T E S I S T A:

Licda. I D A N I A M A R V E L Y C A S T E L L A N O S E S P I N A L

A S E S O R D E T E S I S

M.Sc. M A R L O N G I O V A N N I M E J I A B A N E G A S

T E G U C I G A L P A M . D . C . 24 de Noviembre 2010

RECTORA

M.Sc. Lea Azucena Cruz Cruz

VICE RECTOR ACADÉMICO

M.Sc. David Orlando Marín

VICE RECTOR DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

Dr. Truman Bitelio Membreño

VICE RECTOR DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

M.Sc. Gustavo Adolfo Cerrato

VICE RECTOR ADMINISTRATIVO

M.Sc. Hermes Alduvin Díaz

SECRETARÍA GENERAL

M.Sc. Iris Milagro Erazo

DIRECTORA DE POSTGRADO

Dra. Jenny Margoth Zelaya

Tegucigalpa M.D.C. 24 de Noviembre 2010

Esta tesis fue aceptada y aprobada por la Terna Examinadora nombrada por la Dirección de Estudios de Postgrado de la UPNFM, como requisito para optar al grado académico de Master en Matemática Educativa

Tegucigalpa M.D.C. 24 de Noviembre 2010

_____

Dr. Adalid Gutiérrez
Examinador-Presidente

_____ _____

M.Sc. Mirna Velásquez
Examinadora

M.Sc. Marlon Giovanni Mejía Banegas
Asesor de Tesis

AGRADECIMIENTOS

Le agradezco en primer lugar a Dios, el todo poderoso, por darme la sabiduría necesaria y la fortaleza para poder concluir con mis estudios de maestría. A mi hija por el tiempo que le pude haber dedicado a ella y no lo hice, al padre de mi hija por el apoyo incondicional que me brindó durante esos dos años de estudio.

A mi asesor de tesis por darme la oportuna atención cuando le busqué y lo necesité y a la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán por brindarme la oportunidad de profesionalizarme y aumentar mis conocimientos en esta área.

I N D I C E

INTRODUCCIÓN……..Pág. 8

CAPÍTULO 1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Contextualización del Problema…….Pág. 12

1.2 Antecedentes……...Pág. 13

1.3 Justificación……Pág. 15

1.4 Objetivos Específicos…….Pág. 17

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1 Algo de Historia……..Pág. 19

2.2 La Geometría Escolar…….Pág. 20

2.3 La Geometría y la Resolución de Problemas……..Pág. 22

2.4 Visualización……..Pág. 24

2.5 Habilidades Visuales……...Pág. 28

2.6 Representaciones……Pág. 30

2.7 Razonamiento Geométrico……Pág. 34

2.8 Las Construcciones Geométricas……Pág. 37

2.9 El Uso de la Tecnología …….Pág. 39

2.10 Ventajas y Desventajas en el Uso de la Tecnología……Pág. 43

2.11 Geogebra en el Aula de Clases…….Pág. 44

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1 Tipo de Investigación……..Pág. 48

3.2 Participantes en el Estudio……..Pág. 48

3.3 Etapas del proceso……..Pág. 48

3.4 Metodología en las Sesiones de Trabajo…….Pág. 49

3.5 Metodología Empleada en la Recolección de la Información……Pág. 50

3.6 Instrumentos Empleados en la Recolección de la Información……..Pág. 53

3.7 Procedimiento del Análisis…….Pág. 54

CAPÍTULO 4. PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS……...Pág. 57

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

5.1 Conclusiones…….Pág. 123

5.2 Recomendaciones…….Pág. 125

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS……..….Pág. 128

ANEXOS

I N T R O D U C C I Ó N

Todos aquellos que tienen la experiencia de enseñar matemática y los que han tratado de aprenderla seguramente llegarán a la conclusión que la mayor dificultad está en resolver problemas. También el resolver problemas geométricos ha generado mayor dificultad en los estudiantes, debido a lo difícil que es visualizar mentalmente figuras geométricas que les lleven a dar una respuesta correcta. En la geometría no solo el uso de fórmulas es lo importante para resolver una situación problemática, si no también visualizar y tener un razonamiento adecuado.

Uno de los propósitos que se persigue con la enseñanza de las matemáticas, a nivel de secundaria es desarrollar la visualización del alumno a través de la representación plana de sólidos, el cálculo de áreas, perímetros volúmenes y capacidades. Según Orozco (1996) en su artículo sobre la enseñanza de la geometría (Cap. 3, pág. 11) dice que una de las hipótesis que se tiene es que el ente geométrico se forma en la mente humana por abstracción, a partir de observaciones de objetos reales y de experiencias sobre estos. También argumenta que para seguir un razonamiento lógico se necesitan memoria y lenguaje, que debe avanzarse de lo concreto a lo abstracto; observar, accionar y manipular el objeto.

En estos momentos se encuentra en gran auge el tema de la visualización y las representaciones. En las investigaciones sobre representación y visualización se puede mencionar a Raymond Duval (1999b) el cual realizó un estudio sobre los diferentes sistemas de representación y las dificultades que se presentan al momento de pasar de un sistema de representación a otro.

Fernando Castañeda (2004) en su artículo *Visualización y Matemática*, argumenta que "la visualización permite resolver, y a veces de forma sencilla, problemas que en algunas ocasiones pueden resultar complicados" (pág. 123).

Según Gutiérrez, A. (1991) en su artículo *Procesos y Habilidades en Visualización Espacial* la percepción visual es un elemento importante en infinidad de actividades de la vida, no solo en las relacionadas con el aprendizaje escolar o con la geometría. Esto hace que diversos grupos

de investigadores, con objetivos y contextos diversos, se hayan preocupado de estudiar este campo, al que se suele dar diversos nombres como "percepción espacial", "imaginación espacial", "visión espacial", o "visualización"… El elemento básico central en todas las concepciones de percepción visual son las imágenes mentales, es decir las representaciones mentales que las personas podemos hacer de objetos físicos, relaciones, conceptos, etc. (pág. 44).

La visualización y el razonamiento son dos habilidades que se pueden desarrollar haciendo uso efectivo de una herramienta de aprendizaje. De acuerdo al National Council of Teacher of Mathematics (NCTM, 2000) la tecnología apoya la enseñanza eficaz de las matematicas, que los profesores deben de utilizar la tecnología para enriquecer las oportunidades de aprendizaje de sus alumnos.

En este contexto se determinó centrar este estudio en el desarrollo de ***la Visualización y el razonamiento en las construcciones geométricas utilizando el software GeoGebra con alumnos de segundo de magisterio de la E.N.M.P.N.*** como una forma de mejorar el estudio de la geometría en el nivel secundario y darle la importancia merecida.

Este trabajo se ha estructurado en cinco capítulos que, resumidamente, tratan de lo siguiente:

Capítulo 1: aquí se expone la contextualización del problema con sus respectivos propósitos y objetivos, se puntualizan algunas investigaciones que serán los antecedentes que darán base a este estudio, se presenta una justificación del porqué se debe investigar el problema planteado, también se da a conocer el propósito de la investigación, las preguntas que la guiarán junto con los objetivos deseados.

En el capítulo 2: se presenta los fundamentos teóricos que guiaron el presente estudio, considerando elementos históricos de la geometría, algunas consideraciones sobre la geometría escolar, la fundamentación general de la estrategia de la resolución de problemas, aspectos sobre la visualización, el razonamiento, las construcciones geométricas, el uso de la tecnología, el GeoGebra en el aula de clases y las representaciones.

El capítulo 3: contiene una descripción detallada de la metodología que se utilizó en el estudio: el tipo de investigación, los participantes en el estudio, los instrumentos utilizados en el proceso de recolección y análisis de los datos y, la forma en que fueron aplicados.

Capítulo 4: aquí se realiza un análisis cualitativo de la información obtenida en cada una de las etapas que conforman el estudio. Se presentan los resultados obtenidos de la investigación, tanto de la observación directa, la prueba diagnóstica, las actividades realizadas con regla y compás y las guías de laboratorio aplicadas a los alumnos. Se trata de analizar, en este capítulo cada una de las respuestas de los estudiantes a la luz del marco teórico y puntualizar en los avances obtenidos.

En el capítulo 5 se presentan las conclusiones a las que se llegó con los resultados de la investigación. Así mismo se reflexiona y se presenta a manera de sugerencia medidas para mejorar las habilidades de visualización y razonamiento utilizando el ordenador y otras técnicas de construcciones geométricas realizadas por parte de los estudiantes.

Finalmente, se presenta las referencias bibliográficas y los anexos conformados por la prueba diagnóstica, el taller de GeoGebra, las guías de laboratorio y las actividades que realizaron utilizando regla y compás.

C A P I T U L O 1

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Contextualización del Problema

El objetivo de una investigación en educación matemática se centra en conocer cómo enseñar los contenidos de una área específica y los problemas de aprendizaje que los estudiantes puedan tener, por esta razón el estudio de la geometría será analizado en la educación magisterial, haciendo uso de la visualización, habilidad que según algunos autores (Duval, Hitt, Zimmerman) está en el centro de la comprensión matemática.

Con el nuevo Currículo Nacional Básico el estudio de la geometría en la educación primaria se va dando de manera alterna con el estudio de la aritmética. En séptimo grado se inicia con conjunto de puntos y ángulos, en octavo se desarrolla todo lo relacionado con triángulos y cuadriláteros y en noveno estudian polígonos regulares y sólidos geométricos. Todo este estudio de la geometría se deja siempre para el cuarto parcial del año escolar dándole poca importancia, porque se desarrolla el contenido solamente si queda el suficiente tiempo para ser impartido por los profesores. Cuando estos alumnos llegan al primer curso de diversificado o primero de educación magisterial presentan ciertas habilidades para trabajar con aritmética y álgebra, pero, al trabajar con problemas en la que hay que utilizar el razonamiento geométrico, se ha evidenciado que se les dificulta esta actividad, y son muy pocos los estudiantes que logran tener éxito ante una situación problemática. En la educación magisterial según el plan de estudios, se imparte todo lo relacionado con geometría plana y geometría espacial.

El estudio de la geometría es importante porque desarrolla ciertas habilidades en el estudiante, tales como: la visualización y su capacidad para explorar, representar y describir su entorno; porque le proporciona un conocimiento útil en la vida cotidiana, en las ciencias, en las técnicas y en diversos campos de la actividad humana; porque lo prepara para razonar, demostrar conjeturas y comprender mejor las ideas relacionadas con el número, la medición y otras partes de la matemática, (Vara Orozco, 2003, pág. 11); es así como el estudiante saldrá mejor capacitado si logra desarrollar estas capacidades.

Una prueba diagnóstica realizada a los estudiantes de educación magisterial reveló que estos alumnos, pese a que habían egresado del tercer ciclo de educación básica, no lograron

desarrollar ciertas habilidades en geometría, tales como: el manejo de los instrumentos de dibujo y medida habituales (regla y compás) para el trazado y medida de elementos geométricos, e identificación de conceptos geométricos.

También es importante destacar el uso de la tecnología en la enseñanza de la geometría ya que los docentes se centran en enseñar una geometría de forma tradicional, basándose solamente en el uso del lápiz y el papel. En la actualidad se están implementando nuevas tendencias didácticas, y una de ellas es el uso del computador para hacer una geometría dinámica aplicando software educativo que la llevarán a obtener mejores resultados en el aprendizaje de los alumnos.

1.2 Antecedentes

En un proyecto de investigación realizado por Gutiérrez (1991), parte del trabajo consistió en diseñar y experimentar varias series de actividades para el desarrollo de algunas de las habilidades de visualización. La experimentación se llevó a cabo con tres niños de 6to grado de primaria (11-12 años de edad). Estas series de actividades intentaban integrar los tres contextos en los que usualmente se estudia la geometría espacial en la actualidad: cuerpos físicos, representaciones planas estáticas en papel y representaciones dinámicas en el ordenador. Los estudiantes usaron el proceso de comprensión e interpretación de representaciones visuales y el proceso de conversión de información abstracta en imágenes visuales, todo el trabajo se hizo pasando de un tipo de representación a otro. Las diferentes actividades fueron diseñadas para que los estudiantes utilizaran los procesos y desarrollaran algunas de las habilidades como la conservación de la percepción. Quedó patente que uno de los estudiantes no tenía desarrollada esta habilidad. Concluyeron que hace falta usar más claramente la habilidad de discriminación visual. Pero, en este estudio estos alumnos lograron desarrollar dicha habilidad, además los estudiantes se veían obligados a imaginar las posiciones de las figuras y aprendieron las diferentes representaciones en el estudio de la geometría.

También se puede mencionar el estudio realizado por Jesús Salinas y Ernesto Sánchez Sánchez, (2007) acerca de la manera en que los alumnos de bachillerato perciben el comportamiento de una figura en un ambiente de geometría dinámica. Se realizó a un grupo de 42 alumnos, los cuales poseen cierta familiaridad con el uso de la regla y el compás y se les dio una instrucción general en el uso del software a utilizar. Se reportan datos referidos a una muestra de 8 parejas de estudiantes. El estudio se basó en hacer ciertas actividades para poder distinguir las percepciones de los estudiantes entre propiedades y relaciones y si estas diferencias indican niveles de comprensión de las construcciones. Ellos concluyen que el uso del software contribuye en el rasgo cognitivo fundamental para realizar una demostración. Que al usarlo propicia el empleo de un lenguaje que describe relaciones y que opera como un instrumento psicológico, el cual eventualmente les permitirá a los alumnos, mediante su gradual aproximación, acceder a otro nivel de abstracción. Y, que de 8 parejas 5 de ellas señalan las relaciones geométricas que caracterizan el comportamiento dinámico de la figura.

Otra de las investigaciones realizada por Gutiérrez A. & Jaime, A. (S/A) a estudiantes de la Escuela de Magisterio de Valencia, sobre la comprensión de los procesos de aprendizaje de los conceptos geométricos; elaboraron un test a diferentes grupos de estudiantes, el grupo A de 3ero de educación especial formado por 59 estudiantes, el grupo B de 1ero de filología formado por 33 estudiantes, el grupo C de 3ero de educación especial formado por 34 estudiantes y el grupo D es de 2do de ciencias formado por 77 estudiantes, en este grupo D se utilizó la tecnología como un apoyo al estudio de la geometría en los demás se utilizaron hojas de trabajo. Este test fue elaborado para analizar la comprensión del concepto de "altura de un triángulo" con ello se quiere identificar los procesos de aprendizaje y razonamiento, el fallo de la comprensión o el uso por los estudiantes de un concepto geométrico nuevo. Ellos concluyen: a) Los resultados obtenidos muestran que los estudiantes de magisterio tienen unas imágenes conceptuales muy próximas a las de los estudiantes de primaria, b)Se debe de enseñar didáctica de las matemáticas a estudiantes cuya base matemática es tan pobre que no comprenden los conceptos de los que se pretende hacer un análisis didáctico, ya que tienen un conocimiento de los mismos erróneo o en el mejor de los casos, parcial, puramente memorístico, algorítmico y basado en prototipos mentales.

1.3 Justificación

Nacida de la agrimensura, la geometría se convirtió entre los antiguos griegos en un lenguaje científico utilizado para describir las idealizaciones de los objetos del mundo exterior. Pese a su nacimiento práctico y a que es una de las ramas de las matemáticas que está más ligada a la realidad cotidiana, su carácter abstracto y riguroso hace difícil tanto su enseñanza como su aprendizaje. La geometría es una de las ramas de las matemáticas que menos aprenden los niños y jóvenes ya que está siendo descuidada desde la educación primaria hasta la educación superior, debido a que los docentes le están prestando menor importancia que a las otras ramas de la matemática.

En la educación primaria la geometría es de gran importancia ya que el alumno inicia a hacer construcciones geométricas y a utilizar la regla y el compás como instrumentos de construcción y en la educación secundaria el adolescente continua desarrollando la habilidad de interpretación, de conjeturar y a discriminar visualmente, que si se ha practicado en la primaria, en la educación secundaria se obtendrá gran éxito. "…Las ideas geométricas son útiles para representar y resolver problemas en otras áreas de la matemáticas y en situaciones del mundo real" "…la geometría es más que definiciones; es describir relaciones y razonar" "…es donde los estudiantes aprenden a razonar y a ver la estructura axiomática de las matemáticas" (NCTM, 2000, pág. 43).

Hay evidencias que existen dificultades en el aprendizaje de las matemáticas cuando se les presenta una situación problemática al estudiante; una investigación hecha por Barrera C. (2006) muestra que alumnos no disponen de los niveles de razonamientos necesarios y suficientes para entender dichos contenidos. La principal dificultad está en la necesidad que tienen de conocer lo que pasa por la cabeza de los estudiantes cuando están envueltos en una actividad matemática, cuáles son sus procesos de razonamiento, como analizan y transforman la información que les llega del exterior, cuando y como toman decisiones, (Gutiérrez, A. 2005 pág. 28), por esta razón se deberá implementar nuevas metodologías en la enseñanza de la geometría y en la resolución de problemas de dicha área.

En la geometría, la visualización no solamente es ver una ilustración, está también relacionada con el razonamiento. En el análisis propuesto por Duval, (citado por Torregrosa y Quesada (2007)) habla que el problema básico de la enseñanza de la geometría es porque ésta involucra tres clases de procesos cognitivos: ***la visualización, el razonamiento y la construcción,*** y que estos procesos deben ser desarrollados separadamente. Que es necesario realizar durante el currículo escolar un trabajo que reconozca los diferentes procesos de visualización y razonamiento, pues no solo hay varias formas de ver una figura, sino también de razonamiento. La coordinación entre visualización y razonamiento solo puede ocurrir realmente tras este trabajo de diferenciación.

Según los estándares se debe utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas (NCTM, 2000, pág. 43).

La visualización es un aspecto que está siendo descuidado en la enseñanza de las matemáticas, Cantoral (2001) argumenta "que si queremos lograr que nuestros alumnos aprendan matemáticas, inevitablemente tienen que visualizar"; pero la visualización no se entrena en la escuela y debe ser entrenada, es decir, es una habilidad que tiene que ser desarrollada a lo largo de la vida de un estudiante.

La práctica de la visualización requiere de distintos tipos de representaciones, el estudiante puede hacer construcciones geométricas utilizando regla y compás, de hecho ese ha sido el inicio del aprendizaje de la geometría. En la actualidad han surgido nuevas tendencias didáctica y una de ellas es el uso de la tecnología. La tecnología puede ayudar a los estudiantes a aprender matemáticas. Mediante ordenadores pueden examinar más representaciones o ejemplos que los que son posibles hacer a mano, y así, pueden formular y explorar conjeturas fácilmente. La tecnología enriquece la gama y calidad de las investigaciones, al proveer medios para visualizar ideas matemáticas desde diversas perspectivas (NCTM, 2000, pág. 26).

En la educación magisterial en Honduras se está implementando el uso de nuevas metodologías para la enseñanza de las matemáticas y una de ellas es el uso de la tecnología. Debido a la importancia que tiene la educación en nuestro país "es necesario tratar de que los futuros profesores de matemática sean capaces de interpretar y analizar correctamente definiciones y enunciados matemáticos, al menos los que se refieren a conceptos y situaciones

de las matemáticas del nivel educativo correspondiente" (Gutiérrez, A. & Jaime, A. pág. 29), los futuros profesores serán los encargados de enseñarles a los niños nuevas formas de aprendizajes.

Específicamente en esta investigación se trata de generar aprendizajes significativos en cuanto al desarrollo de la visualización y el razonamiento geométrico, aplicando estrategias innovadoras y una metodología enfocada al constructivismo en donde el estudiante aprenda a conjeturar, comprender y a analizar cada una de las construcciones que realiza.

El objetivo fundamental es explorar las habilidades en el desarrollo de la visualización y el razonamiento en las construcciones geométricas utilizando el software GeoGebra con alumnos de segundo de magisterio de la Escuela Normal Mixta "Pedro Nufio". Y de acuerdo al Plan de Estudio de la Carrera de Magisterio, los contenidos abordados hasta este nivel son: Conceptos fundamentales de geometría y geometría plana.

Para realizar dicho estudio se tratará de dar respuesta a las siguientes interrogantes:

- ¿Cómo utilizar el software GeoGebra para desarrollar la visualización en la construcción geométrica?
- ¿Qué actividades promueven el desarrollo de las habilidades visuales?
- ¿De qué forma contribuye el desarrollo de la visualización y el razonamiento geométrico en el proceso de aprendizaje en los alumnos de segundo de magisterio de la E.N.M.P.N.?

1.4 Objetivos Específicos

- Explorar en los alumnos de segundo de magisterio de la E.N.M.P.N., cómo utilizan el razonamiento geométrico.
- Identificar las habilidades visuales que poseen los alumnos de segundo de magisterio de la E.N.M.P.N. al momento de utilizar el software GeoGebra.
- Explorar las habilidades desarrolladas en los alumnos de segundo de magisterio para la creación y procesamiento de imágenes visuales.

C A P I T U L O 2

MARCO TEÓRICO

2.1 Algo de Historia

La geometría es una rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades del espacio, como son: puntos, rectas, planos, polígonos, poliedros, curvas, superficies, etc. Sus orígenes se remontan a la solución de problemas concretos relativos a medidas.
Es la justificación teórica de muchos instrumentos, por ejemplo el compás, el teodolito y el pantógrafo.

Boyer (1968) afirma que los orígenes de la matemática, ya sea de la aritmética o de la geometría, serán necesariamente arriesgadas y conjeturales, ya que, en cualquier caso, los orígenes de esta materia son más antiguos que el arte de la escritura.

Herodoto sostenía que la geometría se había originado en Egipto, porque creía que dicha materia había surgido allí a partir de la necesidad práctica de volver a trazar las lindes de las tierras después de la inundación anual del valle de rio Nilo.

Aristóteles sostenía en cambio que el cultivo y desarrollo de la geometría en Egipto se había visto impulsada por la existencia allí de una amplia clase sacerdotal ociosa.

El interés del hombre prehistórico por los diseños y las relaciones espaciales puede haber surgido de su sentido estético, para disfrutar de la belleza de la forma, motivo que también anima frecuentemente al matemático actual. Nos gustaría pensar que por lo menos algunos geómetras primitivos realizaba su trabajo sólo por el puro placer de hacer matemáticas y no como ayuda práctica para la medición, pero hay otras alternativas. Una de ellas es la de que la geometría, lo mismo que la numeración, tuviera su origen en ciertas prácticas rituales primitivas.

Los resultados geométricos más antiguos descubiertos en la India constituyen lo que se llamó los Salvasutras o “reglas de cuerda”; se trata de relaciones muy sencillas que al parecer se utilizaban en la construcción de altares y de templos.

2.2 La Geometría Escolar

Los sistemas tradicionales de enseñanza en la educación no dan al estudiante las herramientas para indagar, analizar y discernir la información, que lo lleve a la verdadera toma de decisiones. Los conocimientos impartidos son más bien atomizados, memorísticos y no fomentan el desarrollo de la iniciativa, la creatividad, ni la capacidad para comunicarse efectivamente por distintas vías (Astorga y Aliendro, 2005, pág. 1).

Lo que la tradición llama "enseñanza de la geometría" remite, en la escuela primaria, a dos campos de conocimientos: por una parte, el de los conocimientos que el niño necesita para controlar sus relaciones habituales con el espacio", y por otra parte el de la geometría propiamente dicha (Astorga y Aliendro, pág. 1).

Las situaciones de geometría ponen en interacción a un sujeto "matemático" con un medio que ya no es el espacio físico y sus objetos sino un espacio conceptualizado que las "figuras-dibujos" trazadas por este sujeto no hace más que representar la validez de sus declaraciones ya no es establecida empíricamente sino que se apoya en razonamiento que obedecen a las reglas del debate matemático. La función de los dibujos es, como lo dice Poincaré citado por Astorga y Aliendro (pág. 1) "provocar la puesta en relación de proposiciones que se sabe asociar a tal o cual trazado o porción de dibujo, pero la comprobación de estas propiedades sobre la "figura-dibujo" no permite validar la proposición puesta en estudio". Es esto lo que tanto le cuesta comprender a los alumnos del colegio

Para convencerse del valor de enseñar geometría en la escuela es preciso que los docentes conozcan su utilidad en la vida cotidiana y en el estudio de otras disciplinas. Bressan (et al, 2000) exponen algunos de los usos de la geometría en la educación general básica:

- **La geometría forma parte de nuestro lenguaje cotidiano**: Nuestro lenguaje verbal diario posee muchos términos geométricos, por ejemplo: punto, recta, plano, curva, ángulo, paralela, círculo, cuadrado, perpendicular, etc. Si nosotros debemos comunicarnos con otros a cerca de la ubicación, el tamaño o la forma de un objeto la terminología geométrica es esencial. En general un vocabulario geométrico básico nos permite

comunicarnos y entendernos con mayor precisión acerca de observaciones sobre el mundo en que vivimos.

- **La geometría tiene importantes aplicaciones en problemas de la vida real**: Por ejemplo, está relacionada con problemas de medidas que a diarios nos ocupan, como diseñar un cantero o una pieza de cerámica o un folleto, cubrir una superficie o calcular el volumen de un cuerpo; con leer mapas y planos, o con dibujar o construir un techo con determinada inclinación.
- **La geometría se usa en todas las ramas de la matemática**: Ella se comporta como un tema unificante de la matemática curricular ya que es un rico recurso de visualización para conceptos aritméticos, algebraicos y de estadística. Los docentes usamos frecuentemente ejemplos y modelos geométricos para ayudar a que los estudiantes comprendan y razonen sobre conceptos matemáticos no geométricos.
- **La geometría es un medio para desarrollar la percepción espacial y la visualización.** Sin considerar la necesidad de una buena percepción espacial en ocupaciones específicas, todos necesitamos de la habilidad de visualizar objetos en el espacio y captar sus relaciones, o de la capacidad de leer representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales.
- **La geometría como modelo de disciplina organizada lógicamente:** Ideas acerca de la lógica y la deducción en geometría no necesitan esperar para ser enseñadas hasta los niveles superiores de escolaridad.

La geometría ayuda a estimular, ejercitar habilidades de pensamiento y estrategias de resolución de problemas. Da oportunidades para observar, comparar, medir, conjeturar, imaginar, crear, generalizar y deducir. Tales oportunidades pueden ayudar al alumno a aprender cómo descubrir relaciones por ellos mismos y tornarse mejores solucionadores de problemas.

2.3 La Geometría y la Resolución de Problemas

La resolución de problemas como una estrategia didáctica fue propuesta por Polya a mediados del siglo pasado y es en los últimos treinta años que se la ha dado mayor importancia; el cual dice que un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento.

Al resolver un problema se necesita seguir cuatro grandes etapas (Polya, 1987, pág. 19 -35), las cuales se describen a continuación:

I. Comprender el problema: aquí se debe comprender la parte verbal del problema, se debe releer e identificar las incógnitas y los datos. El alumno debe considerar las principales partes del problema atentamente, repetidas veces y bajo diversos ángulos. Si hay alguna figura relacionada con el problema, se debe dibujar y destacar en ella la incógnita y los datos. Es necesario dar nombres a dichos elementos y por consiguiente introducir una notación adecuada. Se hacen preguntas tales como: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?, etc.

II. Concebir un plan: de la comprensión del problema a la concepción de un plan el camino puede ser largo y tortuoso; se tiene un plan cuando se sabe, al menos a "grosso modo", que cálculos, que razonamientos o construcciones se habrá de efectuar para determinar la incógnita, lo mejor que puede hacer el maestro por su alumno es conducirlo a esa idea o solución de ese problema sin imponérsele. Si el alumno no puede resolver el problema propuesto, se le invita a resolver otro problema similar al propuesto. De hecho, lo esencial en la solución de un problema es el concebir la idea de un plan.

III. Ejecución de un plan: el plan proporciona una línea general, se debe asegurar que los detalles encajen bien en esa línea. Al ejecutar su plan de la solución, el alumno comprueba cada uno de los pasos. ¿puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿puede usted demostrarlo?

IV. Examinar la solución obtenida: esta es una visión retrospectiva, en donde el estudiante verifica el resultado, es decir volver atrás una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla. Un buen profesor debe comprender y hacer comprender a sus alumnos que ningún problema puede considerarse completamente terminado, ¿puede verificar el

razonamiento? ¿puede obtener el resultado en forma diferente? ¿puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?

En cada una de estas etapas el docente desempeña un papel importante y fundamental, el será el facilitador, supervisará cada uno de estos pasos y los guiará al alcance de los resultados esperados.

Continúa Polya (óp. cit.), que el propósito fundamental del maestro será ayudar al alumno, una de las tareas más importantes, la cual es nada fácil ya que requiere tiempo, práctica, dedicación y buenos principios… Se sugiere que el maestro dirija cada una de las etapas formulando preguntas claves que indirectamente mencionen las operaciones intelectuales útiles para la resolución del problema en cuestión… El resolver problemas es una cuestión de habilidad práctica, en efecto, si el alumno logra resolver con éxito el problema en cuestión, está desarrollando su habilidad en la resolución de problemas. La habilidad se adquiere mediante la imitación y la práctica. El profesor que desee desarrollar en sus alumnos la aptitud para resolver problemas, debe hacerles interesarse en ellos y darles mayor número de ocasiones de imitación y práctica (pág. 25-27).

Por otro lado Bressan; et al, (op. cit.) dan algunos ejemplos de tipos de actividades relacionados con esta habilidad, las cuales se mencionan a continuación:

- Identificar el problema en la situación planteada.
- Identificar tipos de datos (necesarios, superfluos, incompletos, etc.)
- Anticipar estrategias posibles de solución antes de ejecutarlas.
- Representar mentalmente (en forma verbal, simbólica o gráfica) conceptos y estrategias a utilizar.
- Reflexionar sobre el problema y lo realizado, controlando los usos de conceptos y procedimientos.

Los autores mencionados anteriormente coinciden en que el resolver un problema es una habilidad que se irá adquiriendo en la medida que se practique.

2.4 Visualización

Se debe hacer una diferenciación entre ver y visualizar, de tal forma que el ver se reduce a una capacidad fisiológica, mientras que la visualización es un proceso cognoscitivo, propio del ser humano, que está vinculado con la cultura del sujeto: historia, ideología, tradiciones, costumbres, valores, etc.

Torregrosa & Quesada (1998) en su estudio sobre como caracterizar procesos cognitivos que intervienen en la resolución de problemas de geometría presenta un par de definiciones dadas por algunos especialistas de visualización:

- Según Arcavi "la visualización no está solamente relacionada con la ilustración, sino también es reconocida como una componente clave del razonamiento (profundamente unida a lo conceptual y no meramente a lo perceptivo), a la resolución de problemas e incluso a la prueba".

- Zazkis et al. describen a la visualización como "el acto por el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo cuyo acceso es adquirido a través de los sentidos"

- Hershkowitz et al. indican: "entendemos por visualización la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual y viceversa. Esto incluye también la transferencia de un tipo de representación visual a otra"

Está claro entonces, que la visualización está fuertemente relacionada con el razonamiento que se pueda tener al momento de interpretar una figura, de igual forma se relaciona con la representación que se pueda hacer de lo que se observa e interpreta.

Por otro lado Hitt, F. (2002), destaca que: "La *visualización* matemática tiene que ver con el entendimiento de un enunciado y la puesta en marcha de una actividad, que si bien no llevará a

la respuesta correcta, sí puede conducir al resultado a profundizar en la situación que se está tratando".

Cantoral y Montiel, señalan que se entenderá a la visualización no como el simple acto de ver, pues visualizar una función, por ejemplo, no significa solamente verla, mirar o contemplar su gráfica, de hecho es posible visualizarla sin verla… en un sentido más amplio, se entenderá que la visualización es la habilidad para representar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende… la visualización entonces, trata con el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver problemas, con las relaciones abstractas que formulamos entre diversas representaciones de un objeto matemático a fin de operar con ellas y obtener un resultado (2001-2002, pág. 1-2).

La visualización en matemáticas no es lo mismo que lo que algunas corrientes de psicólogos llaman visualización. "Para ellos la visualización es una técnica, encontrada en el análisis transaccional iniciado por Eric Berne (años cincuenta), que pretende una reestructuración de ciertos aspectos del subconsciente. Tiene mucho más que ver con componentes afectivos que con componentes propiamente cognitivos" (De Guzmán, 1997, pág. 16).

En cambio, según De Guzmán (op. cit.) con la visualización en matemáticas se pretende otra cosa. Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como la manipulación con ellos para la resolución de problemas de campo (pág. 16).

Al hablar de la visualización De Guzmán (op. cit.) comenta que es "esa forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto desvelan las relaciones abstractas que al matemático interesan" (pág. 16)

De Guzmán (op. cit), considera que nuestra percepción es muy prioritariamente visual y así no es de extrañar en absoluto que el apoyo continuo en lo visual este tan presente en las tareas

de matematización, no solo en aquellas que, como la geometría, se refieren más directamente a la exploración especifica de aspectos del espacio, sino también en otras, como el análisis, que nacieron para explorar los cambios de los objetos materiales en sí mismos y en sus aspectos espaciales… la visualización aparece así como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, y también, naturalmente, en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático (pág. 17).

Además, establece que nuestra visualización, la visualización humana, incluso el mero fenómeno que llamamos visión en un sentido más fisiológico, no es un proceso que meramente haga relación a los procesos ópticos de nuestros ojos. Es un proceso mucho más complejo que involucra, y de forma mucho más importante, el cerebro humano…señala, por ejemplo, que muchas de las formas de visualización que se experimentan son un verdadero camino de codificación y descodificación que está inmerso en todo un cúmulo de intercambios personales y sociales, buena parte de ellos arraigados profundamente en la misma larga historia de la matemática… la visualización es un proceso que hay que aprender en la interacción con las personas a nuestro alrededor y en la inmersión e inculturación en el tejido histórico y social de la matemática (De Guzmán, óp. cit., pág. 18).

Con el gran auge que está teniendo este tema de visualización en la educación matemática se puede entonces tomar como una definición de visualización que "no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación que solamente podremos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta" (De Guzmán, óp. cit., pág. 18); y todo este aprendizaje será un proceso que se irá adquiriendo a medida que se practique en las aulas de clases.

Como se puede notar la visualización no es un tema que aparece hasta estos momentos "la visualización ha sido la tónica general en el trabajo creativo de los matemáticos de todos los tiempos" (De Guzmán op. cit., pág. 29) por eso es importante seguir esta práctica actualmente.

De Guzmán (op. cit.), la visualización, como se puede observar, ha jugado un importante papel en el desarrollo del pensamiento matemático. Como tenía que ser, dada la naturaleza cognoscitiva del hombre, tan condicionada por los elementos visuales, intuitivos, simbólicos, representativos, y como corresponde a la naturaleza de la matemática y a sus propósitos, (pág. 30).

Son muchos los obstáculos y objeciones que el ejercicio de la visualización encuentra hoy día en nuestras formas de comunicar y transmitir los resultados y procesos del quehacer matemático, como lo menciona De Guzmán (op. cit., pág. 35-36), una visualización incorrecta puede conducir a errores por diversos motivos, estos son algunos ejemplos:

- Unas veces porque la figura que se observa puede sugerir una situación que en realidad no tiene lugar. Una forma eficaz de deshacerse de los errores que parecen provenir de una incorrecta interpretación de la figura, consiste en considerar una figura en situación extrema. Sucede a veces que la visión engaña porque la figura concreta que se utiliza en el argumento se aproxima engañosamente a la situación que en realidad tiene lugar.

- En otras ocasiones, es que la situación visual induce a aceptar relaciones que son tan engañosamente transparentes que ni siquiera se ocurre pensar en la conveniencia o necesidad de justificarlas.

Aun en los estudios más formales se pueden encontrar errores y obstáculos, "pero la posibilidad de que la visualización pueda conducir a error no inválida su eficacia y su potencia en los diferentes procesos del quehacer matemático, tanto en el trabajo creativo como en los procesos de comunicación y transmisión" (De Guzmán, op. cit., pág. 36), de este modo la visualización es un instrumento útil en el campo educativo.

Se ha conceptualizado la visualización de una forma general, esta se puede utilizar mediante la capacidad imaginativa, representativa, utilizando regla y compás para hacer construcciones geométricas, tiza y pizarrón. Pero es claro que en la actualidad, la tecnología va teniendo un

papel muy importante en la educación. Ya que se pretende impulsar un ciudadano capaz de desenvolverse en la sociedad y resolver los problemas a que esta lo enfrenta.

Se dispone de un instrumento que es extraordinariamente potente, el ordenador, "la presencia de tales instrumentos en el aula habrá de modificar muy sustancialmente nuestra enseñanza" (De Guzmán, op. cit. pág. 42), este nos ayudará a desarrollar la visualización y aprendizaje de una geometría dinámica.

La visualización es un instrumento de gran ayuda en la enseñanza matemática pues todos sus autores coinciden que no se limita a la simple "observación" o el simple acto de "ver" un objeto dado, por el contrario se ponen de manifiesto los procesos cognitivos que llevan a descubrir, interpretar e identificar habilidades en la resolución de problemas y de esa forma también ayudan a comprender mejor los conceptos matemáticos o geométricos que están siendo estudiados.

2.5 Habilidades Visuales

Desde este punto de vista, la enseñanza de la geometría debe orientarse al desarrollo de habilidades específicas, pero; ¿Cuáles son las habilidades que una buena enseñanza de la geometría en la educación básica debería ayudar a desarrollar?

Hoffer (1981), citado por Bressan, et al (2000), habla de habilidades básicas a desarrollar en geometría y las clasifica en cinco áreas: visuales, verbales, de dibujo, lógicas y de aplicación.
En este apartado nos centraremos en las ***habilidades visuales.*** Visualizar implica tanto representar lo mental a través de formas visuales externas como representar a nivel mental objetos visuales.

- **Captación de representaciones visuales externas:** implican poder leer, comprender e interpretar las representaciones visuales y el vocabulario espacial usados en trabajos geométricos, gráficos y diagramas de todo tipo.

- **Procesamiento de imágenes mentales:** comprende la posibilidad de manipular y analizar imágenes mentales y transformar conceptos, relaciones e imágenes mentales en otra clase de información, a través de representaciones visuales externas.

  A continuación se describen siete habilidades relacionadas con la visualización que son consideradas como básicas:

  1. **Coordinación Visomotora:** Es la habilidad para coordinar la visión con el movimiento del cuerpo. Ejemplos:
     - Unir puntos en un orden dado o anticipando un dibujo.
     - Completar un trazado sin levantar el lápiz y sin pasar dos veces por el mismo lugar.
     - Reproducir una figura o un objeto presente con la mano o con el mouse de la computadora.
  2. **Percepción figura-fondo:** Es la habilidad de identificar una figura determinada (el foco) en una pintura o dibujo más amplio (el fondo). Ejemplos:
     - Descubrir figuras dentro de una figura compuesta o entre figuras sobrepuestas.
     - Descubrir intersecciones entre figuras.
     - Completar figuras.
     - Invertir figuras-fondos en un dibujo dado.
  3. **Constancia perceptual o constancia de forma tamaño y posición:** es la habilidad para reconocer que un objeto posee propiedades invariantes tales como el tamaño, textura, forma o posición a pesar que su imagen cambia al mirárselo desde distintos puntos de vistas al cambiar de posición el observador. Por ejemplo:
     - Modificar posiciones de figuras o cuerpos y analizar la invariabilidad de su tamaño y de su forma.
     - Anticipar y comparar tamaños de tres o más figuras o cuerpos desde distintos puntos de vista.
     - Identificar figuras en distintas posiciones.
  4. **Percepción de la posición en el espacio:** Es la habilidad de relacionar un objeto, lámina o imagen mental, con uno mismo (observador). Ejemplos:
     - Invertir, desplazar y rotar figuras cambiando la posición de ciertos detalles.
     - Reconocer figuras congruentes en distintas posiciones.

- Dibujar imágenes de figuras por desplazamientos, rotaciones y simetrías.

5. **Percepción de relaciones espaciales entre objetos:** Es la habilidad para ver dos o más objetos, pinturas y / o imágenes mentales simultáneamente en relación con uno mismo y entres sí. Ejemplos:
   - Ensamblados de cubos según un patrón dado.
   - Encontrar el camino más corto entre dos puntos.
   - Completar una figura de acuerdo con un modelo presente.
6. **Discriminación visual:** Es la habilidad de distinguir similitudes y diferencias entre objetos, dibujos o imágenes mentales entre sí. Las actividades de comparar y clasificar objetos o láminas colaboran al aprendizaje de la discriminación visual. Ejemplos:
   - Distinguir figuras o cuerpos congruentes
   - Descubrir las figuras diferentes dentro de un conjunto.
   - Descubrir errores en la reproducción de una figura dada.
   - Completar rompecabezas.
7. **Memoria visual:** Es la habilidad de recordar con exactitud un objeto que no permanece a la vista y relacionar sus características con otros objetos presentes o no. Ejemplos:
   - Reproducir figuras ausentes.
   - Completar de memoria una figura mostrada durante breves instantes.
   - Ubicar cuerpos y figuras según un modelo visto previamente.

2.6 Representaciones

Duval (1999a) plantea que la representación se refiere a un amplio rango de actividades significativas, que son utilizadas para denotar objetos y, por el contrario, la visualización parece enfatizarse en imágenes e intuiciones físicas y acciones. También plantea que "representaciones diferentes de un mismo objeto no tienen el mismo contenido…Ningún sistema de representación puede producir una representación cuyo contenido sea completo y adecuado al objeto representado" (pág. 38).

Además, Duval considera, que la única forma de tener acceso a los objetos matemáticos es a través de las representaciones.

Existen diferentes accesos al conocimiento, uno de ellos es el uso de objetos como apoyo visual en los procesos de enseñanza aprendizaje, principalmente en los contenidos de geometría, pues presentan dificultad en su enseñanza y más aun en su aprendizaje; estos contenidos geométricos fácilmente se pueden representar, por lo que en el presente estudio el concepto "representación" juega un papel importante, como medio de comunicación entre docente, conocimiento y alumno.

Y es que el término representación se utiliza en diferentes ámbitos, aquí se presenta y se usa, desde el punto de vista utilizado en la educación matemática, que de acuerdo con Rico, Castro y Romero (S/F, pág. 1) ***las representaciones matemáticas*** se entienden en término general como aquellas herramientas: acciones, signos o gráficos, mediante los cuales los sujetos (alumnos) abordan e interactúan con el conocimiento matemático, asignándole significado a las estructuras matemáticas y conectando los objetos mentales con los objetos matemáticos.

No puede haber comprensión en matemática si no se distingue un objeto de su representación…pues un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones muy diferentes. Toda confusión entre el objeto y representación provoca, en un plazo más o menos amplio, una pérdida en la comprensión (Duval, 1999b, pág. 13).

De acuerdo con los autores mencionados anteriormente, el docente debe auxiliarse de diferentes lenguajes o representaciones para que el estudiante capte y entienda el significado de cada uno de los conceptos que se pretenden enseñar; según Duval (1998, pág. 25) "*no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación*." puesto que las representaciones son un medio de comunicación de ideas que facilita al alumno en la aprehensión de conocimientos, esto lo apoya (Hitt, 1997) mencionado en un trabajo de Rico, Castro y Romero (S/F) al señalar que las representaciones desempeñan un papel destacado en los procesos de construcción de conceptos y por ello son importante en el proceso de enseñanza aprendizaje y en general del conocimiento.

El pasaje de un sistema de representación a otro, o la movilización de varios sistemas de representación en el transcurso de un mismo recorrido intelectual, fenómenos tan familiares y

tan frecuentes en la actividad matemática para nada son evidentes o espontáneos para la mayoría de los alumnos. Estos por lo general, no reconocen el mismo objeto a través de las representaciones que pueden darse en sistemas semióticos diferentes (Duval, 1999b, pág. 16).

Las representaciones están fuertemente ligadas con la visualización. La visualización es la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual, en el pensamiento y lenguaje que se aprende, (Cantoral y Montiel, 2001-2002, pág. 1).

La literatura de investigación ha señalado las dificultades encontradas por estudiantes en la interpretación y el establecimiento de vínculos entre los diferentes tipos de registros de representación, se considera que los dos principales registros de representación son los que a menudo son denominados "visual" y "simbólico" (a pesar de que las representaciones visuales son también una forma de símbolo). Esto es, algunas representaciones son de forma visual (por ejemplo, el gráfico de una función), otros son puramente simbólicos o algebraicos. Visuales y las representaciones simbólicas son complementarios; (Sacristán Rock, 1998-2002, pág. 209).

Y es que según Duval "Para pensar sobre ideas matemáticas y comunicarlas necesitamos representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. (…) para pensar sobre ideas matemáticas necesitamos representarla internamente de manera que permita a la mente operar sobre ellas" (Hiebert y Carpenter, 1992) citado por Rico, Castro y Romero (S/F, pág. 1), lo anterior se puede sintetizar al decir que cada representación se manifiesta en forma externa mediante un acto, una imagen o un símbolo.

De acuerdo con Espinosa (S/F) citando a Cucoo (2001), pueden ser:

- **Representaciones Externas:** Las cuales son las que se hacen escribiendo en papel o cualquier superficie que lo permita, dibujando o haciendo representaciones geométricas (Configuraciones observables: palabras, gráficos, dibujos, polinomios, ecuaciones,

etc.), actúan como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales, además permiten la expresión de conceptos e ideas a los sujetos que las utilizan.

- **Representaciones Internas:** Son las imágenes que creamos en nuestra mente para representar procesos u objetos matemáticos (configuraciones que no son observables directamente).

De acuerdo con Duval (1993) ambas se relacionan ya que las representaciones mentales son el resultado de la interiorización de las representaciones externas dándose lo que llamaremos procesos cognitivos los cuales manipulan representaciones.

La relación entre las representaciones internas y las representaciones externas es clave en el estudio de los fenómenos de comprensión, puesto que son medios de comunicación que tanto el profesor como el alumno pueden utilizar para expresar ideas y conocimientos.
Sacristán Rock (op. cit.) considera que es la construcción de vínculos entre las representaciones cognitivas y piezas de conocimiento que facilita el aprendizaje de un concepto, y que esta construcción, a su vez, es más fácil cuando hay más oportunidades de participación. Se adopta la posición de que la construcción de significados implica el uso de las representaciones, que las representaciones son herramientas para la comprensión, y que el aprendizaje de un concepto es más fácil cuando hay más oportunidades de interactuar con la construcción, tan diversos como sea posible, representaciones en el exterior.

Investigaciones han señalado que si un alumno es capaz de resolver problemas, puede ser que se deba en gran parte a su habilidad de construir representaciones que le ayuden a entender la información y la relación de la situación problemática (Espinosa, S/F), por lo que el uso de representaciones es importante y necesaria para la enseñanza de las matemáticas
Se ha probado que cambiar la forma de una representación es, para muchos alumnos de los diferentes niveles de enseñanza, una operación difícil e incluso en ocasiones imposible. Todo sucede como si para la gran mayoría de los alumnos la comprensión que logran de un contenido quedará limitada a la forma de representación utilizada (Duval, 1999b, pág. 28). No hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación.

2.7 Razonamiento Geométrico

Los griegos descubrieron un nuevo método mucho más poderoso: el del correcto *razonamiento geométrico*. Mediante este método, convirtieron conjeturas plausibles en conocimiento firme y aprendieron algunas cosas asombrosas que nadie hubiera creído sin ver su demostración. De esta manera, los griegos sentaron las bases de la matemática moderna y, por consiguiente, de la ciencia moderna en general (Moise & Downs, 1966, pág. 3).

El razonamiento es usado para resolver problemas de geometría por tanto "los procesos de razonamiento son considerados hoy en día como una variedad de acciones que toman los alumnos para comunicarse y explicar a otros, tanto como a ellos mismos, lo que ven, descubren, piensan y concluyen" (Hershkowitz, 2001, S/P), al hacer buen uso del razonamiento los estudiantes podrán comunicarse y expresar más fácilmente lo que encuentren en el problema planteado.

Cada problema lleva consigo un seguimiento de argumentos y conjeturas, es decir "el razonamiento es una secuencia lógica de proposiciones que llevan a demostrar algo y se hace con orden y método; consta de explicaciones, argumentos o motivos" (Vara Orozco, op. cit. pág. 6), es decir que al razonar un problema se seguirá un orden establecido y coherente en su resolución.

Para Hershkowitz, R. (op. cit.) las funciones principales del razonamiento son entender, explicar y convencer; entender que es lo que se plantea en un determinado problema, explicar con orden esa situación y que el estudiante quede convencido de lo que se le ha planteado y como ha llegado a obtener su resultado.

Duval, citado por Hershkowitz, R. (op. cit.) presenta un análisis metacognitivo de los procesos de razonamiento geométrico y sus interacciones con otros procesos de pensamiento.

En un análisis profundo e interesante que refiere al razonamiento como un proceso holístico en el cual la "demostración" es sólo una de sus tres funciones. Las otras dos son: la "extensión del

conocimiento" y la "explicación". También analiza la interacción entre el proceso de *razonamiento* y otros dos procesos de pensamiento en geometría - *visualización* y *construcción.* El análisis de la visualización de Duval y sus interacciones con el razonamiento en geometría, surge el aspecto del razonamiento visual en geometría.

Continúa Hershkowitz, que los dos aspectos clásicos: el razonamiento deductivo como parte de la cultura humana a ser aprendida por los seres humanos, y este, como un vehículo para la verificación de las proposiciones geométricas y para mostrar su universalidad.

Como en la actualidad se están implementando nuevas tendencias didácticas, para que la geometría sea aprendida de una forma dinámica Hershkowitz (op. cit.) sugiere que "la actividad de aprendizaje en ambientes de geometría dinámica es una tendencia que demuestra la democratización del razonamiento en el aprendizaje de la geometría" de esta forma el alumno aprenderá y razonará en ambientes más favorables a una enseñanza tradicional.

Los alumnos son confrontados con situaciones en las que ellos observan y resuelven problemas en un contexto geométrico realista e investigan los invariantes de figuras geométricas y relaciones bajo cambios realista. En esta interacción con el contexto ellos matematizan, digamos que ellos construyen acciones mentales superiores. La *Matematización* es vista como una actividad humana, como una clase de proceso de organización mediante los cuales elementos de un contexto son transformados en objetos geométricos y relaciones… La matematización en geometría requiere de razonamiento geométrico. Las diferentes clases de razonamiento y explicaciones, emergen de la necesidad de actuar geométricamente (para matematizar) en "diferentes campos de experiencia", son parte de las similitudes y diferencias entre estos ambientes geométricos. Como parte de la matematización los alumnos razonan y explican mientras construyen y expanden su conocimiento geométrico (Hershkowitz, op. cit.)

Sobre el razonamiento visual, Duval, citado por Hershkowitz (op. cit.), distingue entre procesos visuales y procesos de razonamiento, y parece sugerir que son categorías diferentes de pensamiento. Él propone que una función principal de los procesos visuales es el de la *verificación subjetiva*. Algunos investigadores se han referido al razonamiento visual como un

estadio intuitivo, de apoyo, global y preliminar en los procesos de razonamiento en general, el cual en algunas ocasiones apoya razonamientos posteriores. Pero Duval incluye mucho más, si no a la mayoría de los aspectos atribuidos a otras clases de razonamiento incluyendo aspectos analíticos e incluso la demostración. Más aún, el razonamiento visual puede funcionar por sí mismo a fin de completar argumentos matemáticos rigurosos o combinando con otras clases de razonamiento.

Se pueden diferenciar al menos tres tipos de razonamiento en relación con los procesos discursivos desarrollados por Duval (1998, pág. 45) citado por Torregrosa & Quesada (op. cit. pág. 288): el *proceso configural*, que se identifica con la aprehensión operativa; el *proceso discursivo natural,* que es espontáneamente realizado en el acto de la comunicación ordinaria a través de la descripción, explicación y argumentación, y el *proceso discursivo teórico,* que se caracteriza por un desarrollo del discurso mediante la deducción y puede ser hecho en un registro estrictamente simbólico o en el lenguaje natural.

Estos tipos de razonamiento han sido tomados en cuenta para este estudio, ya que se irá observando el análisis sobre los registros escritos de las respuestas que elaboran los estudiantes cuando se enfrentan a tareas en las que se resuelven problemas de geometría. A continuación se describen cada uno de ellos:

- **El razonamiento como un proceso configural:** es el desarrollo de la acción coordinada *aprehensión discursiva/aprehensión operativa* que efectúa el estudiante, cuando resuelve un problema de geometría, lo cual genera una interacción entre la configuración inicial y sus posibles modificaciones con las afirmaciones matemáticas adecuadas. La coordinación entre la aprehensión operativa y la discursiva (proceso configural) puede desembocar en dos situaciones:

  1.-La coordinación da una solución al problema. Aquí se distinguen dos clases de procesos:

- Truncamiento: cuando la coordinación proporciona la "idea" para resolver deductivamente el problema. Es decir, el proceso configural permite conjeturar afirmaciones que se prueban a través de la deducción.
- Conjetura sin demostración: el proceso configural permite resolver el problema aceptando las conjeturas mediante percepción simple.

2.-La coordinación no consigue ninguna solución. En este caso, se denomina el proceso bucle. Un bucle es un proceso configural en el que ha llegado a una situación de bloqueo que no permite el avance hacia la solución y, por tanto, hay un estancamiento del razonamiento producido.

- **El razonamiento como un proceso discursivo natural:** este se lleva a cabo de manera espontánea en el lenguaje natural a través de descripciones, explicaciones o argumentaciones. Para poder identificarlo es necesario distinguir las operaciones discursivas básicas, como los conectores **"y", "o",** además de los símbolos verbales abreviados (**"="** significa **"produce"**; **"-"** indica **"quitar de"**) que puedan aparecer en la descripción, la explicación o la argumentación utilizada en la resolución de problemas de geometría.

- **El razonamiento como un proceso discursivo teórico:** este proceso utiliza solo teoremas, axiomas o definiciones para llegar a la conclusión, está estructurado deductivamente y ocurre en un registro estrictamente simbólico o en el lenguaje natural

2.8 Las Construcciones Geométricas

Hasta ahora se ha estado haciendo geometría con regla y un trasportador. En efecto, los postulados nos dicen que se tiene una regla de longitud infinita, con marcas, numéricas. Utilizamos esta "regla" para trazar rectas y medir distancias. Además, se tiene un transportador. Con este, se puede medir ángulos y, también, marcar ángulos con una medida dada, a partir de un rayo.

Probablemente, esta es la manera más fácil de hacer geometría. Sin embargo, hay otra manera muy importante, que consiste en hacer uso de regla y compás. En este caso, no tenemos una regla con marcas, sino una regla lisa (de longitud infinita, desde luego), de modo que aun cuando se puedan trazar rectas, no se puede medir distancias. También, se tiene un compás. Con este, se puede dibujar circunferencias con centro en un punto cualquiera y pasando por otro punto dado arbitrario. Pero no se puede medir ángulos, de igual modo se puede medir distancias. Este es el esquema desarrollado por los antiguos geómetras griegos, el cual es de gran interés para los matemáticos de hoy y conduce a algunos problemas curiosos cuando se trata de averiguar qué tipo de figuras se puede trazar con la regla y el compás.

No importa cómo se estudie la geometría, se tiene ciertos instrumentos reales para dibujar y una teoría matemática correspondiente. En todos los casos, la teoría matemática es exacta, pero los resultados que se obtienen con los instrumentos reales de dibujo son solamente aproximaciones.

También, en esta investigación el papel que juegan las construcciones geométricas realizadas en el entorno de geometría dinámica es fundamental, pues se convierten en los objetos de "experimentación" sobre la teoría, sin utilizar de manera directa el discurso, contribuyendo a superar uno de los obstáculos principales del aprendizaje de la geometría, como es, la superación de las tensiones entre los procesos de visualización y su potencial pedagógico heurístico en la resolución de problemas y los procesos de justificación y su potencial pedagógico para dar sentido a la organización deductiva del conocimiento matemático. (Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales, 2004, pág. 29).

Para aprovechar ese potencial, no basta con proponer a los alumnos una construcción. Es necesario que la tarea de construcción sea un problema en cuya solución pongan en juego sus conocimientos previos y las posibilidades del software. El software se convierte en un socio cognitivo que acompaña al estudiante en sus indagaciones sobre los objetos matemáticos, se convierte en un inspirador de ideas sobre cómo manipular las representaciones de los objetos matemáticos en juego y contribuye a darles sentido. (Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales, óp. cit., pág. 35).

2.9 El Uso de la Tecnología

Desde algún tiempo atrás, con el incremento de uso de nuevas tecnologías aplicadas a la educación, la enseñanza de la matemática está teniendo una transformación en la forma de abordar las metodologías de aprendizaje y la utilización de recursos gráficos e interactivos.

Los cambios que se están dando actualmente en el sistema educativo, nos conducen a buscar nuevas metodologías para la enseñanza de la geometría, "la visualización juega un papel importante, y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del problema" (Hitt, F. 2003, pág. 215), un problema que será resuelto haciendo uso de los cambios de representación.

De acuerdo a las consideraciones teóricas propuestas por Duval (1998), citada por Hitt, F. (op. cit.), "para la construcción de conceptos matemáticos no basta trabajar las actividades dentro de un sistema de representación, sino también realizar las tareas de conversión de una representación a otra, y viceversa" (pág. 216).

Fuglestad (2004) citado por Gamboa, R. (2007) señala que las actividades de "lápiz y papel" se han enriquecido con los ambientes computacionales…además, con el uso de la computadora es posible profundizar en el estudio de un concepto, cuya comprensión fue superficial o al cual el docente no pudo dedicarle mucho tiempo… el uso de herramientas computacionales da acceso a los estudiantes a varias formas de expresar sus ideas matemáticas y experimentar con ellas (pág. 19).

La tecnología forma parte de un tipo de representación, por tanto "la tecnología servirá como herramienta fructífera para la construcción de conceptos matemáticos más profundos que se reflejen en procesos exitosos por parte de los estudiantes en la resolución de problemas" (Hitt, F. óp. cit., pág. 222), desde este punto de vista la tecnología deberá ser utilizada dentro del aula de clases.

Si la tecnología es usada con frecuencia en el aula de clases se obtendrán cambios ya que "el uso de la tecnología ha generado cambios sustanciales en la forma como los estudiantes aprenden matemáticas. Cada uno de los ambientes computacionales que pueden emplear, proporcionan condiciones para que los estudiantes identifiquen, examinen y comuniquen distintas ideas matemáticas" (Gamboa, R., 2007, pág. 9), estos cambios se verán reflejados en los estudiantes al momento de resolver cada día con mayor facilidad los problemas que se les presenten.

Continua Gamboa, R. (op. cit. pág. 10) que la introducción de la tecnología en el salón de clases ha cambiado la forma en que se lleva a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A diferencia del enfoque algorítmico que se le ha dado a la enseñanza de esta disciplina, esta se puede desarrollar ahora en un ambiente de descubrimiento y reflexión.

La tecnología es uno de los principios para las matemáticas escolares, por tanto "la tecnología es fundamental en la enseñanza de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y enriquecen su aprendizaje" (NCTM, 2000, pág. 26), esta forma de enseñar ayudará a los estudiantes a comprender mejor los conceptos matemáticos y a hacer sus propias conjeturas.

Los estudiantes pueden desarrollar un entendimiento más profundo de las matemáticas mediante el uso apropiado de la tecnología. La tecnología puede ayudar a apoyar las investigaciones de los estudiantes en todas las áreas de las matemáticas y permitirles focalizar su atención en tomar decisiones, reflexionar, razonar y resolver problemas. La existencia, versatilidad y poder de las nuevas tecnologías hacen que sean posible y necesario reexaminar que matemáticas deberían aprender los estudiantes y como ellos pueden aprenderlas mejor (NCTM, op. cit.).

El avance tecnológico que se ha producido en los últimos años, ha proporcionado herramientas que han cambiado notablemente la forma en que se aprenden las matemáticas. El uso de esta tecnología en forma reflexiva puede ser de gran ayuda para resolver problemas. El uso de la tecnología nos puede proporcionar ayuda para ser más eficientes y lograr mayor precisión al resolver un problema. Sin embargo, se debe tener en cuenta que se pueden cometer errores en

el uso y aplicación de estas herramientas, por lo que es importante crear mecanismos para "comprobar" los resultados, ya sea con el uso de la tecnología o por otros métodos (Gamboa, R. op. cit, pág. 23).

Aunque se le ha dado un gran impulso a las nuevas metodologías, aun muchos profesores rechazan el uso de computadoras porque creen que su uso inhibirá otras habilidades, Hitt (1998) citada por Gamboa, R. (op. cit.); señala que el profesor de matemáticas sentirá la necesidad del cambio cuando se le presenten materiales y estudios que muestren la efectividad de la tecnología en el aula, en donde se presente un concepto inmerso en una situación problema y donde se busque el adecuado sistema de representación para visualizarlo (pág. 15).

Los docentes juegan un papel importante como facilitadores del aprendizaje de los estudiantes por tanto, "el perfil del docente debiera configurarse como un profesional atento a todas las posibilidades de comunicación que la herramientas tecnológicas le ofrecen, para hacer más adecuado, exitoso y atractivo el proceso de aprendizaje de los alumnos" (Acosta, J., 2007, pág. 612), el maestro que constantemente este actualizándose y buscando la forma en que los estudiantes se sientan apoyados y bien orientados, estará contribuyendo a que sus alumnos aprendan a aprender en esta sociedad que está en cambios y renovaciones.

Sigue Gamboa (op. cit.) insistiendo en que las tareas que se propongan deben despertar el interés del estudiantes. Aquellas que presente cierto grado de desafío atraen más respecto a las que son rutinarias o de fácil solución. Por lo general, los alumnos se sienten animados al trabajar con la computadora, pero esto solamente es duradero si las actividades así lo permiten… El profesor debe ayudar a sus estudiantes para desarrollar habilidades sobre el empleo del software y diseñar tareas que requieran el uso de herramientas tecnológicas. Una introducción y motivación con ejemplos animan al inicio de una clase, mientras que un resumen y una reflexión al final, son necesarios (pág. 20-21).

Dentro de este contexto es fundamental la utilización de **procesadores geométricos** para la enseñanza de esta disciplina. Este tipo de aplicaciones permite abordar la geometría desde una

forma dinámica e interactiva que ayuda a los alumnos a visualizar contenidos matemáticos que son un poco más complicados de abordar desde un dibujo estático.

Pero surge la pregunta ¿Qué es un software de Geometría Dinámica?; a primera vista, un programa de geometría dinámica es un editor gráfico que da la posibilidad de dibujar diagramas geométricos en la pantalla del computador. Pero en realidad es más que un simple editor en el que el usuario puede agarrar con el ratón un elemento del diagrama y arrastrarlo en la pantalla: el diagrama se redibuja de manera continua conservando intactas las relaciones geométricas que hayan sido declaradas en su construcción, así como todas las propiedades geométricas implícitas en ella. Así la naturaleza de las figuras que se hacen en un entorno de geometría dinámica es diferente a la de los dibujos que se hacen con lápiz y papel, (Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales, 2004, pág. 19).

Existen diversos programas de geometría dinámica, con diferencias sustanciales de funcionalidad, calidad gráfica y precisión matemática. Entre estos programas están Cabri Géometre, Geometre Stketch Pad, y GeoGebra. En este estudio se utilizó el software GeoGebra. Las principales características del medio geométrico dinámico son las siguientes, (Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales, 2004, pág. 19-22):

a) La capacidad de arrastre de las figuras que favorece la búsqueda de rasgos que permanecen invariantes durante la deformación.
   La diferencia fundamental entre un entorno de lápiz y papel y un entorno de geometría dinámica es precisamente el dinamismo. Como las construcciones son dinámicas, las figuras en la pantalla adquieren una temporalidad.
b) El uso extensivo del lugar geométrico y la huella que deja una figura geométrica cuando se arrastra, que permite visualizar y descubrir hechos geométricos.
c) La animación de figuras permite presenciar el proceso constructivo de un hecho geométrico.

2.10 Ventajas y Desventajas en el Uso de la Tecnología

Milevicich & Lois (2007, pág. 645) señalan algunas ventajas en la utilización del computador como un recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas:

a) Permite al alumno interactuar con objetos matemáticos de forma simple y natural, lo que favorece su autonomía en el aprendizaje, además de tener un mayor acercamiento a la matemática, siéndole esta más familiar.
b) Facilita la representación gráfica y de forma dinámica de los conceptos y procedimientos matemáticos. En este sentido, decimos que agiliza el cambio entre diferentes sistemas de representación.
c) Facilita la construcción de objetos matemáticos, conjeturar hipótesis, comprobar propiedades, simular y descubrir regularidades.
d) Facilita el tratamiento de muchos temas sin exigir al alumno grandes conocimientos matemáticos favoreciendo una metodología en la que participen de forma activa en su aprendizaje.
e) Permite combinar los datos de forma numérica, simbólica y gráfica, tratando a las matemáticas de manera global.

Al respecto Hitt, F. (2000, pág. 8) hace una reflexión sobre problemas que se plantean en los ejercicios no rutinarios, o que implican la utilización de tecnología y hace unas observaciones sobre las ventajas y las desventajas de esta, las cuales se presentan en las siguientes tablas:

Aspectos negativos	
Con ninguna tecnología	**Gracias a la tecnología**
• Los errores hechos en los procesos algebraicos no son fáciles de percibir. • Los procesos algebraicos no promueven la interacción con las representaciones geométricas.	• Promueve la búsqueda de una respuesta a través del método de ensayo y error. • Inhibe el pensamiento analítico en la cara de la representación gráfica. •En algunos casos, se trivializa el problema convirtiéndolo en un ejercicio de rutina.

Aspectos Positivos	
Con ninguna tecnología	**Gracias a la tecnología**
• Analítica y el pensamiento algorítmico se promueven en la solución de problemas desde un punto de vista algebraico.	• Permite la construcción geométrica de una situación dada. • Permite la visualización de los resultados producidos en un proceso algebraico. • Algunas veces es posible que el estudiante pueda visualizar su error. • La representación gráfica es posible que pueda ayudar a predecir los resultados. • La manipulación simbólica es posible que permita la concentración en las tareas más complejas, promoviendo así el aprendizaje conceptual. • Aumenta el interés en el aprendizaje de las matemáticas.

2.11 Geogebra en el Aula de Clases

GeoGebra es un software de matemáticas desarrollado por Markus Hohenwarter de la Universidad de Salzburgo que engloba geometría, álgebra y cálculo. Por un lado, es un sistema de geometría dinámica. Permite realizar construcciones tanto con puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas como con funciones que a posteriori pueden modificarse dinámicamente. Por otra parte, se pueden introducir ecuaciones y coordenadas directamente, permite hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un repertorio de comandos propios del análisis matemático. La interfaz del programa consta de dos ventanas, una algebraica y otra geométrica. Una expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa. GeoGebra es un programa interactivo especialmente diseñado para la enseñanza y aprendizaje de Álgebra y Geometría a nivel escolar medio (secundaria).

Este programa representa una tecnología informática que puede tener gran impacto en los procesos de mediación en la educación matemática a nivel secundario, pues ofrece la posibilidad de trabajar la geometría y el álgebra simultáneamente de formas dinámicas, atractivas e integradas, Rechimot, E. et al (2007) dice que la utilización del GeoGebra no solo es motivadora a la hora de trabajar sino que también es un disparador de procesos de resolución de problemas, elaboración de conjeturas y validación.

El GeoGebra es un software libre, galardonado en el 2002 con el European Academic Software Award (Suiza, 2002), con el International Free Software Award, category Education (Francia, 2005) y con el Distinguished Development Awar otorgado por la Association for Educational Communications and Technology de Orlando (USA, 2008), entre otros reconocimientos.

Este recurso, al igual que el Derive y el Geometer Sketchpad, es un software matemático en los que funciona una colección de objetos básicos, un conjunto de acciones elementales referidas a estos objetos, y un lenguaje de programación de alto nivel con una semántica y una sintaxis particulares, que, complementado con una interfaz accesible, permite obtener resultados predecibles al relacionar estos objetos y operar sus acciones. En este sentido, representa un micromundo de posibilidades, que ofrece gran autonomía y capacidad de manipulación a sus usuarios; un entorno dinámico e interactivo con prestaciones que:

1.- Requieren la realización de acciones informáticas relativamente complejas (diseño, programación, ejecución).
2.- Devuelven resultados matemáticos (como gráficas, construcciones, transformaciones, cálculos), y paramatemáticos (como simulaciones, modelos, clasificaciones, ordenamientos, iteraciones).
3.- Facilitan el desarrollo de acciones matemáticas (como resolución de problemas, demostración, conjeturación, aplicación, verificación), y matemáticas (como análisis, deducción, inducción, reflexión, enseñanza, aprendizaje, valoración, experimentación).

GeoGebra es un programa muy similar a Cabri en cuanto a instrumentos y posibilidades, pero incorporando elementos algebraicos y de cálculo. La gran ventaja sobre otros programas de geometría dinámica es la dualidad en pantalla: una expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa.

Reúne todas las ventajas didácticas de Cabri y además incorpora herramientas básicas de estudio de funciones, sobre todo polinómicas. Es una gran ventaja la doble presentación geométrica y algebraica de los objetos estudiados ya que posibilita el tránsito natural de la geometría sintética a la geometría analítica.

Es de muy fácil aprendizaje y presenta un entorno de trabajo agradable. Los gráficos se pueden exportar con facilidad tanto a páginas web interactivas en las que la construcción funciona como un applet de Java, como a documentos de texto. Los estudiantes pueden hacer una diversidad de cosas con GeoGebra, tales como:

- Construir en forma precisa y rápida usando los componentes básicos de la geometría.
- Razonar y comprender a cerca de las relaciones geométricas entre diferentes objetos.
- Controlar el aspecto gráfico de una figura, usando simplemente el mouse.
- Ejecutar cálculos de medida.
- Manipular las figuras geométricas y observar las semejanzas y diferencias entre ellas.
- Repetir las construcciones las veces que ellos necesiten hacer, es decir observar los pasos que se siguieron para realizarlas.
- Hacer las conjeturas respectivas de las construcciones realizadas.
- Imprimir sus construcciones.

C A P I T U L O 3

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1 Tipo de Investigación

Esta investigación es de tipo cualitativo, de corte exploratorio, sobre como visualizan y razonan geométricamente los estudiantes de segundo de magisterio en las construcciones geométricas utilizando el software GeoGebra.

Según Hernández S. (2006) el estudio cualitativo es inductivo, el cual se puede adentrar en el tema de estudio, suele incluir los objetivos, las preguntas de investigación, la justificación y la viabilidad, sobre todo de una exploración de las deficiencias en el conocimiento del problema y la definición inicial del ambiente o contexto.

3.2 Participantes en el Estudio

La población a nivel de secciones fueron todos los grupos de segundo de magisterio de la Escuela Normal Mixta "Pedro Nufio" que lo conforman las secciones del 8 al 14; de los cuales se seleccionaron dos grupos, porque hubo disposición de parte del maestro que los atendía, el grupo 13 y 14, se seleccionaron para realizarles una prueba diagnóstica.

A nivel de estudiantes la población total fueron los 45 alumnos del grupo 13 y 14 a los cuales se les aplicó el diagnóstico. La muestra fueron doce estudiantes de segundo de magisterio; seis alumnos del grupo 13 y seis alumnos del grupo 14.

Se escogieron estos doce estudiantes tomando en cuenta no solo aquellos que tenían mayores habilidades y conocimientos para el trabajo en la geometría, si no que, también aquellos que presentaban deficiencias. También ellos eran los que presentaban mayor disposición para profundizar sobre dicho estudio y desarrollar trabajos extra clase.

La investigación se ejecutó en un período de dos meses: septiembre y octubre del año dos mil nueve.

3.3 Etapas del proceso

El estudio se realizó en cuatro etapas: Diagnóstica, Taller Geogebra, Sesiones de Trabajo y una Prueba Final.

La etapa diagnóstica se realizó con 45 estudiantes de dos grupos de segundo año de educación magisterial, con el objetivo de determinar las habilidades y dificultades que estos estudiantes

tenían en las construcciones geométricas; luego de aplicada la prueba diagnóstica y escogido el grupo de doce estudiantes se procedió a tener sesiones regulares con ellos.

Las demás etapas de trabajo se realizaron con estos doce estudiantes. Como el problema de investigación no estaba contemplado en el contenido del curso, para no afectar la programación de la clase, las sesiones se desarrollaron extra clase.

Las sesiones de trabajo con los estudiantes tenía una duración de tres horas y se llevaron a cabo durante trece reuniones incluyendo las sesiones del taller, se tenía planificada trabajarla los días sábados, pero debido a la crisis política que atravesaba el país en esos momentos los estudiantes se presentaban a las sesiones durante algunos días de semana en jornada contraria para poder lograr el objetivo de la investigación. Estas sesiones de trabajo continuaban su curso normal a pesar de las irregularidades que habían en esos momentos, y en algunas semanas nos reuníamos los cinco días, ya que se contaba con la máxima voluntad y disponibilidad de parte del alumno y el padre de familia.

En cada una de las sesiones se trató de lograr poco a poco los objetivos planteados en este trabajo, y así tratar de dar respuesta a las preguntas de investigación.

3.4 Metodología en las Sesiones de Trabajo

Las sesiones de trabajo se desarrollaron en base a guías de laboratorio y hojas de trabajo, las cuales se distribuían por equipo y otras en forma individual.

En las guías se les presentaban problemas que involucraban construcciones geométricas, lo hacían en el interior de cada equipo si esta era en grupo, cada uno si era en forma individual, luego procedían a la discusión y apoyo entre ellos, hasta llegar a la verificación de los resultados y así poder obtener una mejor comprensión y construcción del conocimiento.

El papel que realizó la maestra, consistió en observar el proceso de desempeño de los estudiantes y apoyarlos en los casos que lo ameritaban, teniendo siempre el cuidado de no proporcionarles las respuestas sino más bien de hacerles preguntas o comentarios que los hiciera reflexionar y profundizar en el problema, en las primeras oportunidades se les explicaba el funcionamiento del software para las construcciones geométricas y así ellos llegaban a obtener un razonamiento apropiado para el logro del objetivo propuesto. La maestra

los conducía a poder visualizar de la mejor manera la construcción que se les pedía en cada uno de los problemas.

En el desarrollo de las guías se les proporcionaba el tiempo necesario para ello, luego se realizaba una discusión con todo el grupo con el objetivo de resumir las diferentes estrategias implementadas en las construcciones, algunos errores cometidos y así establecer conclusiones.

3.5 Metodología Empleada en la Recolección de la Información

El tipo de instrumento utilizado así como también la metodología está en función a las cuatro etapas que se desarrollaron en dicha investigación.

Etapa Diagnóstica

En esta etapa se recolectó la información de los conocimientos previos de los alumnos sobre el uso del computador y de los conceptos fundamentales en geometría sobre construcciones geométricas; esto último mediante una prueba escrita, donde se identificaron las habilidades que tienen en el manejo de los instrumentos de dibujo y medida habituales (regla y compás) para el trazado y medida de elementos geométricos, también se realizaron actividades que relacionen estos elementos geométricos para determinar el nivel de abstracción y aplicación de estos conceptos; todo esto con el propósito de verificar si poseían estos conocimientos y poder reforzarlos; esta prueba se aplicó la primera semana del mes de septiembre.

La prueba diagnóstica consistió en identificar en tres figuras geométricas algunos conceptos fundamentales de geometría y en realizar tres construcciones utilizando únicamente la regla y el compás.

Se procuró que los problemas seleccionados, involucraran conceptos familiares para los estudiantes, que lo hayan visto en el año anterior utilizando la metodología tradicional.

Taller GeoGebra

En este taller se introdujo el programa **GeoGebra;** a través de lecciones sobre uso de los comandos básicos del programa, explicando las interfaces de aplicación: zona de trabajo, ventana algebraica, menús desplegables, barra de herramientas y línea de comandos.

Asimismo se realizaron preguntas guiadas con el fin de que los estudiantes exploraran otros comandos, e interactuaran con mayor facilidad con el programa, ya que era su primer contacto con dicho programa.

Cada guía de laboratorio fue preparada con sus respectivas instrucciones, de tal manera que el alumno pudiese familiarizarse de manera rápida con los comandos a utilizar, ya que este es un paquete muy amigable en donde el alumno puede aprender de forma fácil y atractiva, y en él se implementa de forma implícita una nueva tendencia didáctica para aprender geometría.

El taller de **GeoGebra** se desarrolló en cuatro sesiones de trabajo con una duración de tres horas cada sesión.

Sesiones de Trabajo

Esta etapa se desarrolló en función de los resultados de la Prueba Diagnóstica y también tomando en cuenta los contenidos del programa de matemáticas en la Educación Magisterial, los cuales fueron vistos en el primer año utilizando solamente una metodología tradicional.

Vista desde esa perspectiva, en esta etapa la recolección de datos se generó mediante guías de laboratorio, guías de trabajo (Representaciones) y experiencias de aula con actividades enmarcadas en el enfoque constructivista y tecnológico orientadas a generar en el estudiante una actividad cognitiva.

En esta fase se implementó el programa **GeoGebra** en la visualización y razonamiento al hacer construcciones geométricas, mediante la aplicación de guías de laboratorio, cuyo propósito consistió en que los alumnos interactuaran, construyeran, manipularan y descubrieran todo lo relacionado con las construcciones geométricas.

Estas guías de laboratorio incluían actividades de aprendizaje en las que el alumno realizó diferentes construcciones, con las cuales pudo hacer mediciones, rotaciones, traslaciones y así poder comprobar lo que en algunas ocasiones hizo con lápiz y papel.

También tuvieron la oportunidad de trabajar a la par con algunas guías en las cuales utilizaban lápiz, papel y compás y luego comprobaban utilizando el GeoGebra como una herramienta de trabajo. Al trabajar con estas guías ellos tenían la oportunidad de representar y hacer sus

propias conjeturas, ya que la tecnología no lo es todo, es solamente una buena herramienta de trabajo pero no se debe dejar de lado las representaciones usando lápiz y papel.
Los alumnos con las guías de representación trabajaban en equipo y luego elaboraban sus conclusiones, al final cada equipo de trabajo explicaba como lo había realizado y luego utilizaban el GeoGebra.
Cabe aclarar que en no todas las sesiones se trabajó con guías utilizando regla y compás; es más, se utilizó la mayor parte de sesiones guías de laboratorio.

En cada sesión de trabajo las guías contemplaban construcciones con sus respectivas indicaciones y luego se planteaban diferentes situaciones problemáticas las que generaban ambientes de discusión, crítica y reflexión a nivel individual, de equipo y luego discusiones a nivel de todo el grupo. Los acuerdos a los que llegaban, las justificaciones y las conclusiones respectivas quedaron registradas en cada una de las guías de trabajo.

Las actividades planteadas también llevaron a los estudiantes a la manipulación y observación directa de cada una de las construcciones geométricas, lo que permitió la formulación de conjeturas y el fomento de la visualización y razonamiento geométrico. Estas actividades se desarrollaron algunas en equipo (las de representación) y otras de forma individual (las guías de laboratorio) en un lapso de ocho sesiones de trabajo de tres horas cada una.

Los estudiantes fueron video grabados durante toda la investigación al momento de desarrollar las guías de trabajo; en los cuales se encuentran las evidencias de las discusiones internas de cada equipo y las preguntas que se le hicieron a cada uno de forma individual.

En la elaboración de estas guías de tomó como material de apoyo los libros para la educación básica que fueron desarrollados por el Proyecto de Mejoramiento en la Enseñanza Técnica en el Área de Matemática (PROMETAM) que ejecuta la Secretaria de Educación, dentro de los cuales se encuentra una gran variedad de ejemplos sobre construcciones geométricas que pueden ser construidas con regla y compás y también llevarlas al computador.

Prueba Final (Retroalimentación)

En ésta fase se realizó la retroalimentación y evaluación de los conocimientos adquiridos, en donde los estudiantes mediante diversas construcciones realizadas en **GeoGebra** identificaron conceptos básicos de la geometría, relaciones y propiedades de las figuras geométricas que se vieron a lo largo de esta investigación.

Esta etapa se efectuó durante todo el proceso del estudio y culminó con la aplicación de una prueba, en donde se reforzaban todos los conceptos que se habían conocido y así comprobar la adquisición de los conocimientos en los estudiantes. La aplicación de esta prueba se realizó en una sola sesión con una duración de dos horas.

3.6 Instrumentos Empleados en la Recolección de la Información

3.6.1 Guías de Trabajo: durante el proceso se realizaron tres actividades o guías de trabajo en las cuales solamente se utilizaron los materiales de construcciones como ser: el lápiz, el compás y la regla. Estas actividades las trabajaron en grupos de tres estudiantes.

La primera actividad se desarrolló en la primera sesión de trabajo con el objetivo de identificar ángulos, rectas paralelas y perpendiculares; esta actividad fue desarrollada antes de pasar a trabajar en el computador. La segunda actividad se realizó en la segunda sesión con el objetivo de que los estudiantes puedan hacer diferencias y semejanzas al momento de trabajar con un instrumento y otro, como lo es el uso de la tecnología y el uso de instrumentos de dibujo como regla y compás ya que esta actividad se hizo luego de haber trabajado en el computador. La tercera actividad se hizo en la cuarta sesión de trabajo con el propósito de explorar las condiciones que deben de cumplir los cuadriláteros para ser paralelogramos.

En cada una de las guías de trabajo se les presentó diferentes situaciones problemáticas que generaban la participación activa de cada uno de los integrantes del equipo, un ambiente de discusión y reflexión hasta llegar a la solución. Los acuerdos o soluciones a las que llegó cada equipo de trabajo quedaron registrados en las respectivas guías de trabajo.

3.6.2 Guías de Laboratorio: en este estudio se desarrollaron cinco guías de laboratorio en el taller de GeoGebra y ocho guías de laboratorio en cada sesión de trabajo, en el salón de

cómputo de la Escuela Normal Mixta “Pedro Nufio”, las cuales fueron desarrolladas en forma individual, sin embargo al momento de resolver las guías individuales se apoyaban como equipo, es decir discutían sus respuestas, despejando sus dudas, hasta llegar a un consenso y así poder hacer la construcción solicitada en el computador, luego cada uno escribía su respuesta en su guía bajo su propio criterio.

En cada guía de laboratorio se les planteaba diferentes situaciones problemáticas, encaminadas a desarrollar la visualización y el razonamiento en las construcciones geométricas, a la vez permitían registrar las estrategias y las dificultades que los estudiantes presentaban en el desarrollo de las mismas.

La distribución de las guía se hizo de acuerdo a los temas que plantean los programas de matematicas que se encuentran en la institución y de acuerdo al nivel en el cual se hizo dicho estudio.

En la última sesión de trabajo se realizó una guía similar al diagnóstico, con la que se pretendía evaluar el desempeño de los estudiantes al resolver situaciones que desarrollen la visualización y el razonamiento. Por lo que se esperaba que en esta etapa no se presentaran dificultades y se pudiera resolver problemas, hacer construcciones con los instrumentos de medida y utilizar de forma correcta el software aprendido durante todo el proceso del estudio y que ellos utilizaran diversas estrategias en la resolución de problemas y llevar a si a la construcción de su propio conocimiento.

3.7 Procedimiento del Análisis

Para la prueba diagnóstica se realizó un análisis combinando el cuantitativo con el cualitativo, pues interesa conocer la cantidad de estudiantes que contestaron de forma correcta los incisos de las preguntas de identificación y construcción que en él estaban y así observar las habilidades que habían adquirido en estos contenidos cuando fueron vistos con la metodología tradicional en el año anterior.

De esta forma también se buscaban evidencias de cómo los estudiantes visualizaban y razonaban geométricamente ante estas situaciones problemáticas.

En la etapa de la implementación o sesiones de trabajo, las actividades que se realizaron fueron un proceso en el cual se esperó que los estudiantes reforzaran sus conocimientos y obtuvieran habilidades matemáticas, en este caso su razonamiento geométrico y la visualización en las construcciones geométricas. También se esperaba lograr un conocimiento y una habilidad en el uso y manejo de la tecnología como lo es el software **GeoGebra**.

En esta etapa se realizó un análisis de tipo cualitativo observando el desempeño de los estudiantes en sus respectivos equipos de trabajo, también observando la forma individual en la que se desenvolvían al momento de adquirir las habilidades en el manejo del programa **GeoGebra.**

Los aspectos que integraron este análisis en cada una de las guías de laboratorio fueron los siguientes: las construcciones geométricas siguiendo cada una de las indicaciones allí dadas, el dibujo que realizaban con su regla y compás, la resolución del problema presentado al final de cada guía de trabajo.
Cada estudiante trató de hacer las conjeturas y llegar a una conclusión basada en el objetivo que cada actividad contemplaba y así ir construyendo las conclusiones generales de esta investigación.

C A P I T U L O 4

PRESENTACION Y ANALISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se presenta un análisis de tipo cualitativo sobre la información recolectada a lo largo del proceso de investigación. En la etapa diagnóstica se hace un análisis cualitativo con ciertos elementos cuantitativos que responden a los propósitos de dicha etapa.
Se analizó cada actividad de aprendizaje por separado, donde a través de la observación y la experimentación se descubrieron las características, propiedades y elementos en cada construcción geométrica que se hizo.

En la primera etapa se presenta el análisis del diagnóstico aplicado a los estudiantes, en la segunda etapa se despliega un análisis de cada una de las guías de laboratorio que sirvieron como base para aprender a utilizar el programa **GeoGebra**, en la tercera etapa se analiza cada una de las actividades y guías de laboratorio que realizaron los alumnos en el proceso de esta investigación y en la cuarta etapa se hace la valoración completa de los conocimientos adquiridos por los estudiantes, así como también de la prueba final que ellos realizaron.

A continuación se detalla este análisis por cada una de las etapas:

Prueba Diagnóstica

La prueba diagnóstica se aplicó a 45 alumnos de Segundo Año de Educación Magisterial de la Escuela Normal Mixta “Pedro Nufio”.
Esta prueba se realizó en dos partes; la primera parte se hizo mediante la observación directa de cada uno de los estudiantes en cuanto a las actitudes y habilidades que mostraron en el uso y manejo de la computadora; en la segunda parte se aplicó una prueba escrita la cual pretendía determinar si los estudiantes presentaban dificultades en la identificación de conceptos geométricos, observar las habilidades que tienen en el manejo de los instrumentos de dibujo y medida habituales (regla y compás).
Además se buscó indicios del uso de la visualización y el razonamiento matemático y geométrico al momento de enfrentarse a problemas relacionados con las construcciones geométricas.

Esta prueba diagnóstica contenía dos ejercicios de identificación de figuras geométricas con varios incisos cada uno y un problema sobre construcciones geométricas utilizando regla y compás el cual contenía tres incisos.

A continuación se muestran los resultados y un análisis de la prueba diagnóstica aplicada a estos estudiantes:

Ejercicio Nº 1

Dadas las siguientes figuras

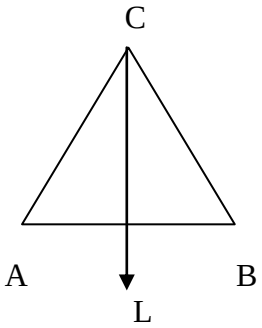


Figura 1

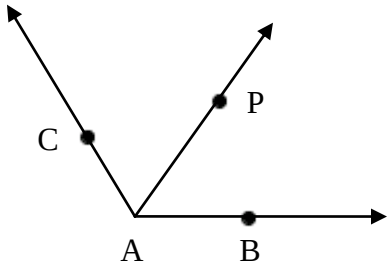


Figura 2

Identificar:

a) ¿Cuántos ángulos están determinados por la figura 1? Nombrarlos_____
b) ¿Cuántos vértices se forman en la figura 1? Nombrarlos_____
c) ¿Cuál es la mediatriz en este triángulo? _____
d) ¿Qué ángulo se forma en la figura 2? _____
e) ¿Cuál es la bisectriz del ángulo formado en la figura 2? _____

El objetivo principal de este ejercicio era que el alumno identificará conceptos básicos de geometría, en cada una de las figuras que allí se encuentran y que se les pide en cada inciso.
El resumen de los resultados se muestra en la siguiente tabla:

Tabla Resumen Nº 1

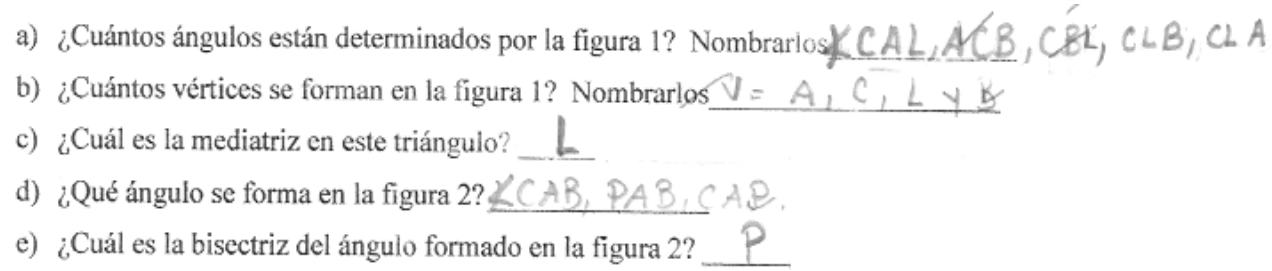
INCISOS	JUSTIFICACION			
	Correcta	**Incorrecta**	**No Contestó**	**Incompleta**
1 a	3	38	4	0
1 b	3	33	6	3
1 c	30	10	5	0
1 d	8	31	3	3
1 e	29	13	3	0

En la tabla anterior se puede observar que los resultados obtenidos son muy variados; se puede describir cada inciso, observando que en el inciso **a)** solamente el 7% de las respuestas fueron correctas, mientras tanto la gran mayoría, o sea el 84% de los estudiantes contestaron de forma incorrecta y el 9% de los alumnos pues tan solo no contestaron ese inciso; en esta respuesta se muestra la gran deficiencia que tiene el alumno(a) en identificar ángulos en diversas figuras geométricas, aunque estas figuras estén respectivamente etiquetadas.

El inciso **b)** al igual que en el inciso **a)** se puede observar la dificultad que muestran los estudiantes en identificar los vértices en las figuras geométricas, ya que solamente el 7% contestó de forma correcta, el 73% contestó de forma incorrecta, un 13% no contestó y un 7% contestó dejando incompleta su respuesta.

A continuación se da una muestra de las respuestas de una estudiante que identificó de manera correcta los vértices y los ángulos en esa figura geométrica

Respuesta que dio Carmen:


a) ¿Cuántos ángulos están determinados por la figura 1? Nombrarlos ∠CAL, ACB, CBL, CLB, CLA
b) ¿Cuántos vértices se forman en la figura 1? Nombrarlos V = A, C, L y B
c) ¿Cuál es la mediatriz en este triángulo? L
d) ¿Qué ángulo se forma en la figura 2? ∠CAB, PAB, CAB.
e) ¿Cuál es la bisectriz del ángulo formado en la figura 2? P

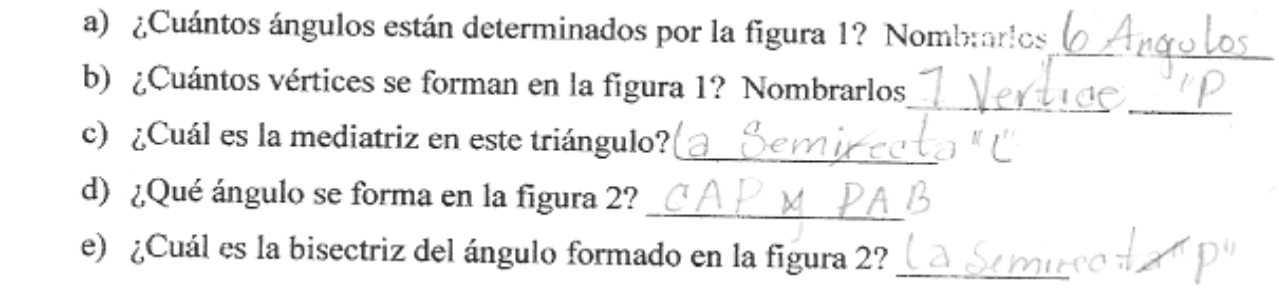
En el inciso **c)** se observa que la mayoría de los estudiantes está familiarizado con el término "mediatriz" ya que es el porcentaje mayor el cual contestó de forma correcta, siendo este el 67% de los estudiantes, un 22% aun está teniendo dificultad en identificar la mediatriz en un segmento determinado ya que ellos contestaron de forma incorrecta y un 11% no supo la respuesta correcta, pues tan solo no contestaron.

En el inciso **d)** nuevamente se hace la comparación con los dos primeros incisos, ya que se puede observar que los estudiantes si tienen problemas en la identificación de los ángulos, pues en esta figura al igual que la primera, la gran mayoría no pudo identificar esos ángulos; pues tan solo un 18% de los estudiantes contestaron correctamente, el 68% de esos estudiantes contestaron de forma incorrecta, el 7% no contestó y otro 7% dejó incompleta su respuesta.

En el inciso **e)** se muestra claramente que los estudiantes están también familiarizados con el término "bisectriz" ya que el 64% de estos estudiantes contestaron correctamente esta pregunta, el 29% contestó de forma incorrecta y el 7% no contestó.

He aquí una muestra más de las respuestas de estos estudiantes:

Respuesta que dio Alejandro:


a) ¿Cuántos ángulos están determinados por la figura 1? Nombrarlos 6 Angulos
b) ¿Cuántos vértices se forman en la figura 1? Nombrarlos 1 Vertice "P"
c) ¿Cuál es la mediatriz en este triángulo? la Semirecta "L"
d) ¿Qué ángulo se forma en la figura 2? CAP y PAB
e) ¿Cuál es la bisectriz del ángulo formado en la figura 2? la Semirecta "p"

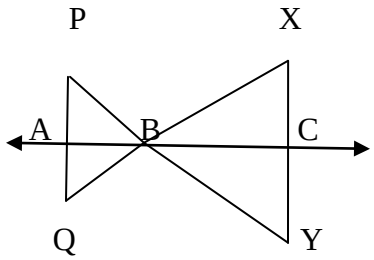
En esas respuesta se evidencia claramente en que algunos estudiantes manejan ciertos conceptos básicos de geometría y logran identificarlos en las figuras que se les mostró en el ejercicio, pero también presentan dificultades en otros conceptos.

De este modo al no manejar dichos conceptos presentan dificultades en la visualización así como lo dice De Guzmán (1997) que con la visualización se pretende que las ideas y

conceptos de las matemáticas presenten una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulte muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos, en los cuales los estudiantes están presentando gran dificultad.

Ejercicio Nº 2

Observa y nombra lo que se te pide en la siguiente figura



a) Rectas Paralelas_____

b) Rectas Perpendiculares_____

c) Triángulos_____

El propósito en este ejercicio al igual que en el número uno, era identificar algunos conceptos de geometría que el estudiante de segundo de magisterio debe de manejar, ya que estos han sido vistos en años anteriores; son conceptos que ellos en algún momento como estudiantes de de magisterio deberán aplicar en su carrera profesional. El estudiante en este ejercicio debía identificar tipos de rectas en una figura ya dada y etiquetada e identificar triángulos.

Los resultados se muestran a continuación:

Tabla Resumen Nº 2

INCISOS	JUSTIFICACION			
	Correcta	**Incorrecta**	**No Contestó**	**Incompleta**
2 a	22	18	3	2
2 b	0	34	3	8
2 c	1	24	3	17

Los resultados obtenidos en este ejercicio muestran claramente la falta de visualización que presentan estos estudiantes, y la habilidad para discriminar visualmente ya que como lo dice Hoffer (1981) la habilidad de distinguir similitudes y diferencias entre objetos, dibujos o imágenes mentales entre sí colaboran al aprendizaje de la discriminación visual; ya que

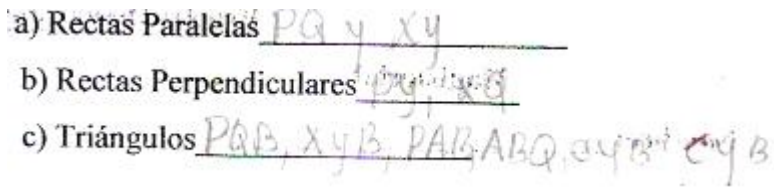
difícilmente lograron identificar lo que son rectas tanto paralelas como perpendiculares y los triángulos que en la figura se logran observar.

Se puede reparar que los estudiantes manejan más el concepto de una recta paralela que una perpendicular ya que en las rectas paralelas el 49% de estos estudiantes las contestaron de manera correcta, el 40% lo contestó incorrecto o sea que no las lograron identificar, el 7% no contestó y 4% contestó dejando incompleta su respuesta ya que solo escribían la cantidad de rectas paralelas que observaban, pero no las nombraron con sus letras respectivas.
Lamentablemente en la identificación de las rectas perpendiculares se observa que los estudiantes muestran serios problemas con este concepto ya que no hubo ni una sola respuesta correcta, 76% de estos estudiantes contestó de manera incorrecta y el 17% dejó incompleta su respuesta.

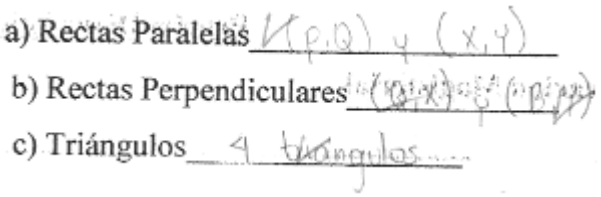
En la identificación de los triángulos solamente el alumno Alejandro logró identificar todos los triángulos que en la figura se podían observar lo cual es solamente un 2% de las respuestas correctas, el 53% contestó de manera incorrecta, el 7% no contestó y un buen número de estos estudiantes, el 38% lograron identificar algunos de estos triángulos, dejando así su respuesta incompleta.

Lo que se logra observar es que se debe de estimular la visualización en cada uno de los estudiantes, en el área de geometría; puesto que en la geometría es donde los estudiantes aprenden a razonar (NCTM); y que la visualización según De Guzmán ha jugado un importante papel en el desarrollo del pensamiento matemático.

A continuación se muestran las respuestas de dos estudiantes:
Respuesta de Alejandro:


a) Rectas Paralelas PQ y XY
b) Rectas Perpendiculares
c) Triángulos PQB, XYB, PAB, ABQ

Respuesta de Irma:



En estas respuestas se muestran como estos estudiantes logran identificar las rectas y otras respuestas las dejan incompletas, lo cual se permite decir que aún no han desarrollado completamente los procesos de visualización.

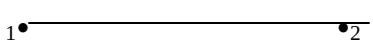
Ejercicio Nº 3

Problema sobre construcciones

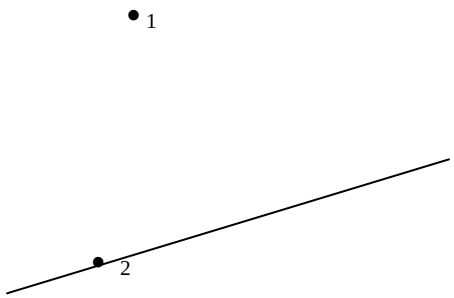
Utilizando regla y compás realice las siguientes actividades. Escriba los pasos que sigue para realizar las construcciones.

a) Encontrar el punto medio de dos puntos 1 y 2.

b) Construya un triángulo equilátero sobre el segmento 1-2.



c) Construya la circunferencia con centro 1 y tangente a la línea 2



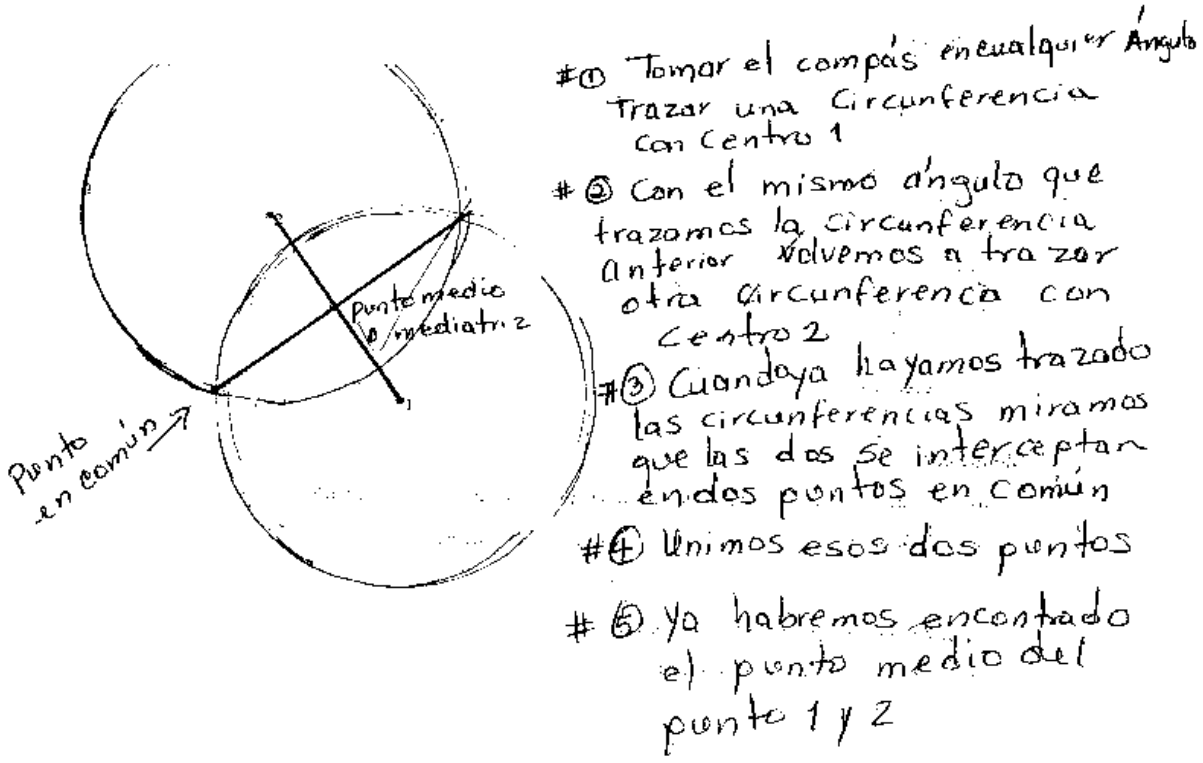
El objetivo principal en este problema era observar las habilidades que tienen los estudiantes en el manejo de los instrumentos de dibujo y medida habituales (regla y compás) para el trazado y medida de elementos geométricos; también el de realizar actividades que relacionen elementos geométricos para determinar el nivel de abstracción y aplicación de estos conceptos. A continuación se muestran estos resultados:

Tabla Resumen Nº 3

INCISOS	JUSTIFICACION			
	Correcta	**Incorrecta**	**No lo Realizó**	**Sin Justificación**
3 a	6	33	3	3
3 b	2	31	2	10
3 c	0	37	0	8

En las construcciones **a** y **b** se debían realizar los mismos procedimientos, sin embargo el objetivo no fue logrado, ya que en el inciso **a)** el cual se trataba de construir un punto medio entre dos puntos hubo solamente un 13% de los estudiantes que hicieron la construcción con las justificaciones respectivas y un 7% que realizó la construcción pero se notó la dificultad en justificar su trabajo, un 73% de los estudiantes trataron de hacerla, pero sin tener clara la forma de cómo utilizar el compás para hacer una construcción, por lo cual su respuesta fue incorrecta, y solamente un 7% de estos estudiantes no realizaron la construcción.

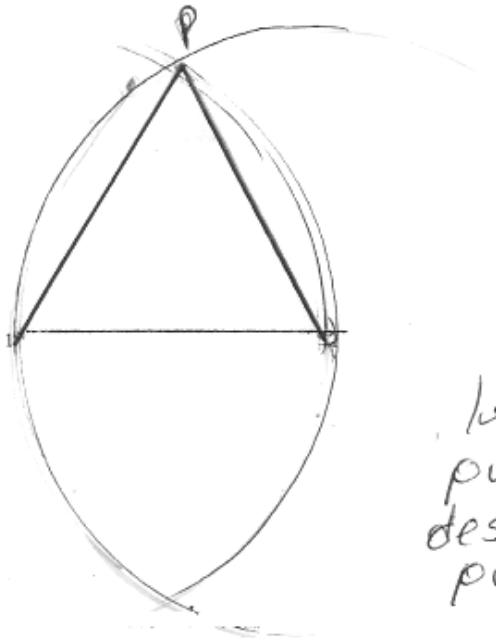
He aquí una muestra, la construcción del inciso **a)** con su respectiva justificación hecha por la alumna Carmen Jolany



Como se mencionó anteriormente la construcción **b** debía seguir el mismo procedimiento que la primera construcción; aquí hubo menos respuestas correctas que en la primera construcción, pues tan solo dos estudiantes hicieron la construcción (4%) con su respectiva justificación, pero aumentó la cantidad de estudiantes que hicieron la construcción sin justificaciones, siendo esto el 23% de los estudiantes; hubo un 69% que realizó de forma incorrecta la construcción y tan solo un 4% no realizó dicha construcción.

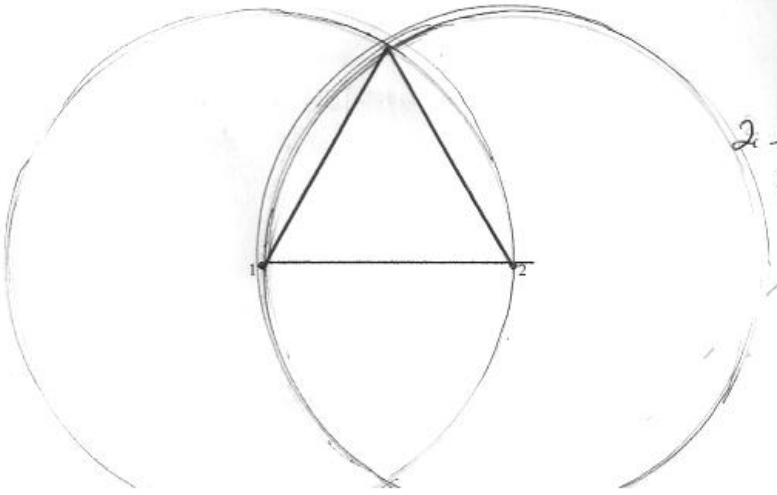
A continuación hay una muestra de los estudiantes que realizaron estas dos construcciones geométricas.

Construcción hecha por Carolina



trazar 2 circunferencias en una tomando en cuenta el punto 1 y otra tomando el punto 2 luego se hace un punto P que es donde se interceptan las circunf luego unir el punto 1 con el punto P.
despues el punto 2 con el punto P.

Construcción hecha por Alejandro



1.- Coloqué el compás en el punto uno y dos y tracé una circunferencia para cada punto
2.- La parte superior donde se cortaran las circunferencias las uní con los puntos uno y dos

En la tercera construcción, al observar la tabla resumen Nº 3 se evidencia que hay gran deficiencia en estos conceptos de geometría ya que esta construcción los alumnos no pudieron realizarla, hay solamente un 18% que intentó realizarla sin justificar su procedimiento y un gran número de estudiantes (82%) la realizaron de forma incorrecta.

Cabe mencionar que toda esta falta de conocimiento de los conceptos en geometría se debe al incumplimiento de los contendidos de estudio de esta área, ya que por lo general no son enseñados en los centros educativos y por ende se muestran en estos resultados de esta prueba diagnóstica.

De acuerdo a los antecedentes anteriores partiré en mi trabajo utilizando una metodología dinámica y activa para el logro de estos conocimientos en los estudiantes de segundo de magisterio, que será una oportunidad para ellos, de enfatizar estos conceptos que les será de mucho provecho, ya que son los futuros educadores de nuestro país, un país que está requiriendo de educadores de calidad y que obtengan las competencias necesarias para insertarse al mundo laboral.

Taller GeoGebra

En esta fase los estudiantes entraron por primera vez en contacto con el programa a través de un taller, al cual se le llamó **"Aprendamos GeoGebra"**; el objetivo de este taller era que los estudiantes conocieran y exploraran los comandos y herramientas básicas de **GeoGebra**, como un apoyo en el aprendizaje de la geometría.

Este taller se inició una semana después que se aplicó el diagnóstico, trabajando únicamente con doce estudiantes seleccionados; cada estudiante trabajaba de forma individual en su computadora y si en algún momento tenían alguna duda se acercaban unos a otros para poder compartir y ayudarse mutuamente y de esa forma ir haciendo un solo equipo de trabajo. Estos estudiantes ya tenían un conocimiento previo de computación, lo que permitió que fácilmente se familiarizaran con el taller, cada uno de ellos mostró interés y motivación en esta investigación, y esto hizo que ellos obtuvieran un buen rendimiento en el transcurso del taller.

Cabe hacer mención que los estudiantes de segundo de magisterio son estudiantes que ya han obtenido cierta madurez, para ellos el iniciar un taller con esta metodología y esta tendencia didáctica, la cual está muy de moda, el aprender sobre tecnología, les pareció interesante y motivador y de inmediato mostraron el agrado por participar en el proyecto de investigación, la cual se mostró en todo el proceso.

Un aspecto importante que se debe recalcar es que los estudiantes al utilizar por primera vez este programa, empezaron por si solos la exploración y la construcción de objetos geométricos; también se hacían preguntas unos a otros y así de esa forma lograban el objetivo de conocer **GeoGebra.**

Es importante saber que **GeoGebra** es un programa en el que además de trabajar con geometría también se puede trabajar álgebra y cálculo por que cuenta con una ventana algebraica, la cual estos estudiantes también lograron explorarla y en las guías se hacían preguntas con referencia a esta ventana algebraica.

El taller integraba una serie de actividades útiles e interesantes para identificar los componentes del software y que el alumno se habituara al mismo; además incluían actividades que incentivaban a los estudiantes a la comprensión de conceptos, características y propiedades de figuras, a partir de sus propias conjeturas y deducciones.

A cada uno de los estudiantes se les entregó una copia del taller previamente elaborado y que sería la guía para ir conociendo y familiarizándose con el programa. El taller contenía cinco guías de laboratorio que se iban entregando en cada sesión de trabajo, las cuales fueron cuatro sesiones en total, con una duración de tres horas cada sesión.

Las primeras tres guías de laboratorio fueron para que el estudiante conociera y explorara la barra de menú, la barra de herramientas, la ventana algebraica, la zona gráfica, la línea de comandos; se procuró darle al estudiante todos los lineamientos para que mediante el desarrollo de estas guías el mismo fuera construyendo y descubriendo objetos geométricos, al mismo tiempo que exploraran como se podía hacer las modificaciones en los objetos

geométricos construidos. En las dos últimas guías del taller se trabajó en la construcción de ángulos y triángulos.

En las primeras tres guías de laboratorio también se estuvo observando las dificultades y deficiencia en los conceptos geométricos; se observó que los estudiantes tenían deficiencia en la visualización de ángulos, dificultad en algunos conceptos tales como: recta secante, ángulos adyacentes.

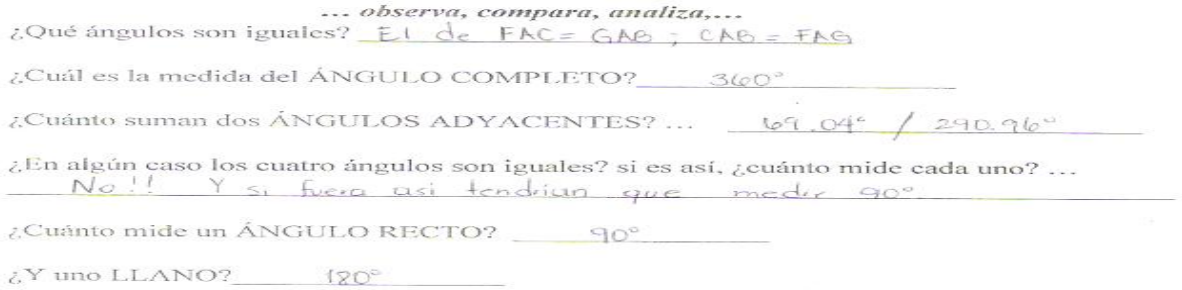
En la cuarta guía que se le llamó "Trabajando con Ángulos" el objetivo principal era que los estudiantes descubrieran relaciones entre ángulos determinados por rectas secantes. Aquí también se observó la falta de conocimiento de los conceptos geométricos, pero a la vez superaron estas dificultades, también se observó que hubo mejoramiento en el uso y manejo de las herramientas de **GeoGebra**.

Para lograr el objetivo propuesto por esta guía de laboratorio se hizo la construcción (una muestra de esta guía) de estas dos rectas secantes siguiendo las siguientes instrucciones:

- Construye una recta AB y otra AC. En propiedades elige 3 para su grosor y fija el punto A.
- Construye los siguientes puntos: D en la semirrecta opuesta a AB y E en la semirrecta opuesta a AC.
- Marca los cuatro ángulos que las dos rectas determinan. Píntalos de diferente color.
- Haz clic en el punto D, luego en el Menú contextual haz clic en muestra objeto y oculta el punto D, haz lo mismo para el punto E.
- Arrastra de los puntos libres

A continuación se muestra las respuestas dadas por dos estudiantes:

Respuestas dadas por la alumna Irma Michelle


... observa, compara, analiza,...

¿Qué ángulos son iguales? El de FAC = GAB ; CAB = FAG

¿Cuál es la medida del ÁNGULO COMPLETO? 360°

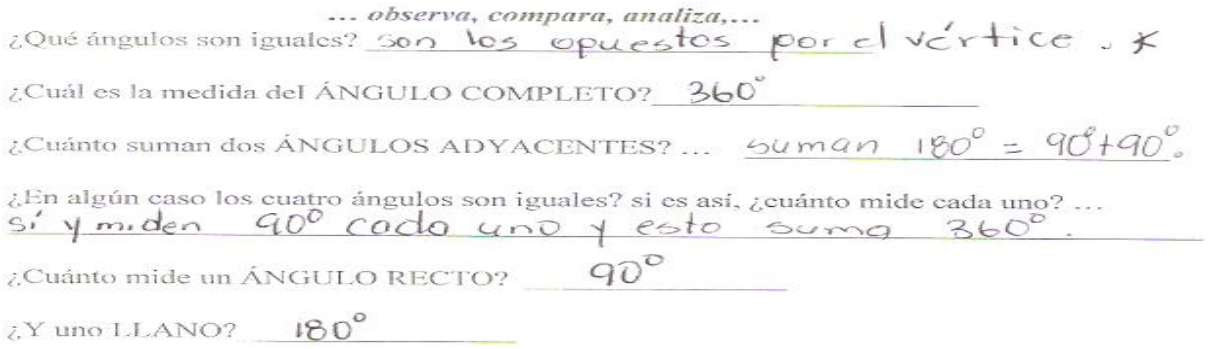
¿Cuánto suman dos ÁNGULOS ADYACENTES? ... 69.04° / 290.96°

¿En algún caso los cuatro ángulos son iguales? si es así, ¿cuánto mide cada uno? ...
No!! Y si fuera así tendrían que medir 90°.

¿Cuánto mide un ÁNGULO RECTO? 90°

¿Y uno LLANO? 180°

Respuestas dadas por la alumna Carmen


... observa, compara, analiza,...

¿Qué ángulos son iguales? Son los opuestos por el vértice. *

¿Cuál es la medida del ÁNGULO COMPLETO? 360°

¿Cuánto suman dos ÁNGULOS ADYACENTES? ... suman 180° = 90°+90°.

¿En algún caso los cuatro ángulos son iguales? si es así, ¿cuánto mide cada uno? ...
Sí y miden 90° cada uno y esto suma 360°.

¿Cuánto mide un ÁNGULO RECTO? 90°

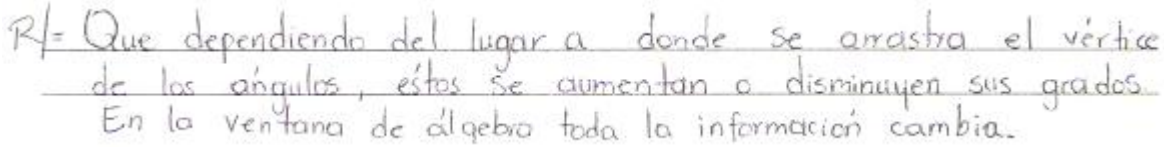
¿Y uno LLANO? 180°

En la quinta y última guía "Trabajando con Triángulos" el propósito era que los alumnos descubrieran relaciones entre los elementos de un triángulo e incorporar nuevas herramientas de **GeoGebra**. Se presenta una muestra de las conjeturas dadas por los alumnos; la primera parte de la guía contenía las siguientes instrucciones:

- Oculta los ejes de coordenadas.
- Construir el triángulo ABC.
- Construye los ángulos interiores.
- Arrastra los vértices del triángulo y observa en la ventana de álgebra.

¿Qué observas?, escribe tus conjeturas.

Respuesta dada por Irma


R/= Que dependiendo del lugar a donde se arrastra el vértice de los ángulos, éstos se aumentan o disminuyen sus grados. En la ventana de álgebra toda la información cambia.

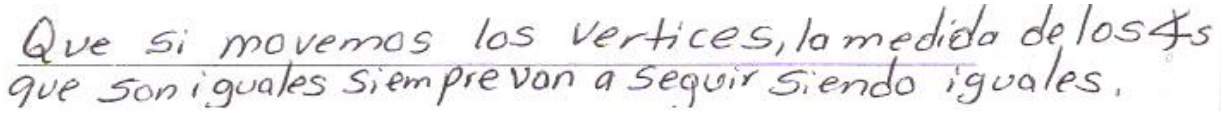
La siguiente parte de la guía contiene las instrucciones:

- Construye por A una recta paralela a BC; un punto D en esa recta, perteneciente al semiplano (AB, C); un punto E en la semirrecta opuesta de la (AD).
- Construye los ángulos DAC y EAB.
- Arrastra de los vértices del triángulo, observa las medidas de todos los ángulos.
- Construye los puntos medios M y N de los lados del triángulo AB y AC respectivamente.

- Construye los ángulos AMN y ANM, utilizando segmentos. Arrastra de los vértices del triángulo, observa las medidas de todos los ángulos construidos y pinta del mismo color los que siempre tengan la misma medida. Observa las posiciones relativas de las rectas BC y MN,

¿Qué puedes conjeturar?, ¿fundamenta tus observaciones?, escríbelo…

Respuesta dada por Alejandro

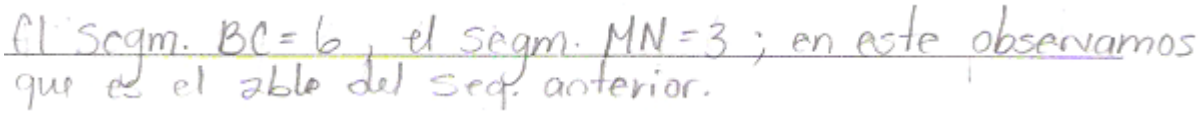


Las instrucciones que se dieron en otra parte de la guía son las siguientes:

- Construye el segmento MN. Renombra el segmento "MN" y el segmento "BC" usando el menú contextual. Defínelos como "Objeto auxiliar" para observar sus medidas.
- Arrastra de los vértices del triángulo y observa las medidas de los segmentos MN y BC.

¿Qué relación hay entre ellos? Escribe tus conjeturas.

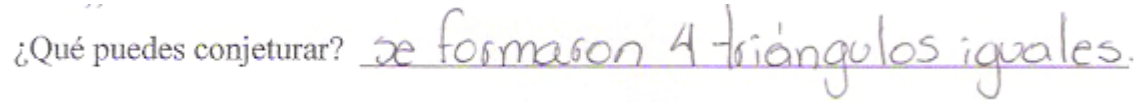
Respuesta dada por Sofía



En la última parte de la guía se construye lo siguiente:

- Construye el punto medio P del lado BC y los segmentos PM y PN.
- Construye el triángulo PMN y sus ángulos interiores.
- Arrastra de los vértices del triángulo ABC.
- Observa las medidas de todos los ángulos construidos y pinta del mismo color los que siempre tengan la misma medida.
- Observa los triángulos que quedan construidos, compara sus elementos (ángulos, lados)

Una de las conjeturas hechas por Esther



En cuanto a la apreciación que tuvieron los estudiantes del programa **GeoGebra**, sus respuestas fueron satisfactorias, logrando así los objetivos que se pretendían en el taller. Se les hizo varias preguntas sobre el conocimiento que obtuvieron de dicho programa, en donde estas respuestas fueron bastante positivas. Algunas de estas respuestas se muestran a continuación:

Respuesta de Marelin

a) Que objetos geométricos se pueden construir con **GeoGebra**?
Triangulos, Circulos, Poligonos, puntos, rectas, Elipses, Angulos
b) ¿Qué conceptos básicos sobre geometría se emplearon al utilizar **GeoGebra**?
vertice, lado opuesto, triangulo, lado perpendicular etc.

Respuesta de Luis

a) Que objetos geométricos se pueden construir con **GeoGebra**?
Triángulos, Cuadrados, Poligonos.
b) ¿Qué conceptos básicos sobre geometría se emplearon al utilizar **GeoGebra**?
Ángulos, Vertices, Segmentos, paralelas y perpendiculares

Referente a la utilidad del programa, la totalidad de los alumnos mostraron simpatía, refiriéndose de forma positiva y manifestando que les había facilitado su aprendizaje y que la metodología era atractiva. La evidencia esta en los escritos de los estudiantes.

Respuesta de Ángela

c) ¿**GeoGebra** le ha facilitado el aprendizaje de estos conceptos?
Sí, porque de la manera, que se está aprendiendo, me parece muy bien!
e) ¿**GeoGebra** le parece interesante? ¿Porque?
Sí, Clara!! Clarisímooo que sí ya que son muy importante para el conocimiento matemáticos.... etc.

Respuesta de Marelin

c) ¿**GeoGebra** le ha facilitado el aprendizaje de estos conceptos?
Sí, ya que todo se ve de manera más facil, y se aprende con mucha facilidad.
e) ¿**GeoGebra** le parece interesante? ¿Porque?
Sí, ya que los terminos se hacen más factibles de aprender, los terminos, tambien es mas facil a la hora de elaborar una figura.

De aquí se deduce que los estudiantes presentan mayor facilidad en el aprendizaje de la geometría, cuando esta es activa y se está utilizando una metodología diferente a la que se está acostumbrada, rompiendo así estos esquemas tradicionales ya que según el NCTM la tecnología es fundamental en la enseñanza de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y enriquecen su aprendizaje.

Queda también evidenciado que en la construcción de figuras geométricas obtendrán una mejor visualización si se utiliza la tecnología como una herramienta de trabajo en el área, estando esta a disposición de todos los docentes que deseen implementar una nueva forma de enseñar.

Sesiones de Trabajo

En esta etapa se implementó el programa GeoGebra para promover el desarrollo de la visualización y el razonamiento en las construcciones geométricas con el desarrollo de guías de laboratorio, en las cuales se propusieron una secuencia de actividades que permitían a los estudiantes explorar y manipular directamente los objetos matemáticos. La tecnología se utilizó como una herramienta en la enseñanza de la matemática; pero también se utilizaron guías de trabajo en las cuales se hacían construcciones con lápiz y papel; Duval (1999a) considera, que la única forma de tener acceso a los objetos matemáticos es a través de las representaciones; las construcciones hechas con regla y compás conducen a un tipo de representación.

Los doce estudiantes trabajaron de forma individual en sus computadoras, teniendo así mayor interacción con la tecnología. Las conjeturas y conclusiones que obtenían fueron discutidas entre todos. Las guías de trabajo en donde utilizaron regla y compás se trabajaron en forma grupal, se organizaron en grupos de tres y con ello fomentaron la interacción grupal y el trabajo de equipo.

En esta etapa el trabajo fue más extenso, pues interesó detectar las actividades que promueven el desarrollo de las habilidades visuales y de qué forma contribuye el desarrollo de la visualización y el razonamiento geométrico en el proceso de aprendizaje en los alumnos.

Se presenta un análisis detallado de la información recolectada en cada una de las guías de trabajo y de laboratorio desarrolladas por los alumnos. Se hará el análisis por cada sesión que se desarrolló en esta investigación; las cuales fueron ocho en total, estas se describen a continuación:

Sesión Nº 1

En esta sesión se desarrollaron dos guías de trabajo, una primera guía que se desarrolló utilizando los materiales de construcciones geométricas como lo es: lápiz, regla y compás, la cual los estudiantes la trabajaron en grupos de tres y la otra fue una guía de laboratorio que se trabajó de manera individual, con el propósito de que los estudiantes puedan comprender que la tecnología es una herramienta del aprendizaje matemático, pero que también se pueden hacer otras representaciones y a la vez hacer comparaciones entre las dos formas de aprendizaje. Se describirán a continuación las actividades desarrolladas por los estudiantes en estas guías:

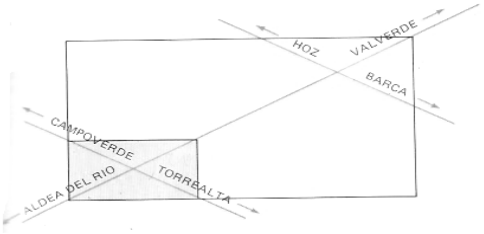
Actividad 1

Esta actividad es realizada con el objetivo de identificar ángulos, rectas paralelas y perpendiculares. También el hecho de que el estudiante aprenda geometría de la forma como lo hacían los antiguos geómetras griegos utilizando una regla sin marcas y un compás para hacer las construcciones geométricas.

Otro objetivo de esta actividad es evidenciar las representaciones que en ella se harán y luego irán al computador para hacer notar la diferencia; como lo dice Duval (1999b) que el pasaje de un sistema de representación a otro en la actividad matemática resulta de gran dificultad para la mayoría de los estudiantes.

La primera actividad consistió en que observarán el dibujo de un plano en donde la zona sombreada es la huerta de la granja. El resto es la finca vecina, que está atravesada por un camino que es paralelo al que une Campoverde con Torrealta.

La figura es la siguiente:



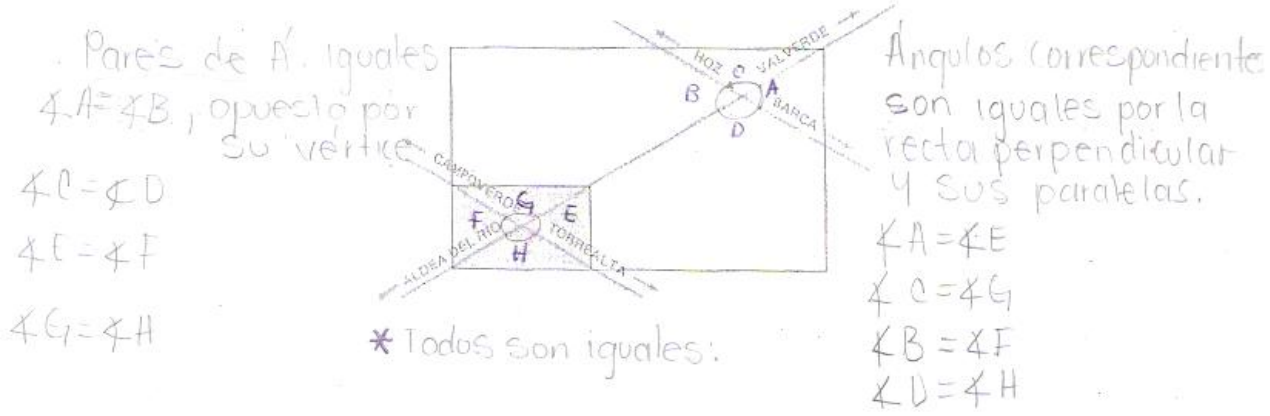
Esta figura sirvió para que los estudiantes compararan los ángulos que se forman al cortar una recta a dos paralelas; los cuales en un comienzo mostraron una serie de dificultades ya que estos estudiantes no estaban acostumbrados a trabajar con esta metodología, porque para hacer estas comparaciones tenían que hacer uso de la visualización y como lo menciona Cantoral y Montiel, que la visualización no es el simple acto de ver los objetos o dibujos, en un sentido más amplio, es la habilidad para representar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual.

Las preguntas que se hacían en esta primera actividad fueron:

¿Cuántos ángulos forma el camino de Valverde a Aldea del río con los otros dos caminos? _____ ¿Cuántos tipos de ángulos se forman? _____

Nómbralos_____ ¿Cómo se llaman esos ángulos? _____

Los alumnos lograron llegar a las conclusiones con ayuda de la maestra que sirvió como guía para lograr el objetivo propuesto. Se muestra a continuación una de las respuestas dadas por tres alumnas:



Como se puede observar ellas nombraron cada ángulo con letras mayúsculas e identificaron tipos de ángulos, los opuestos por el vértice y los ángulos correspondientes.

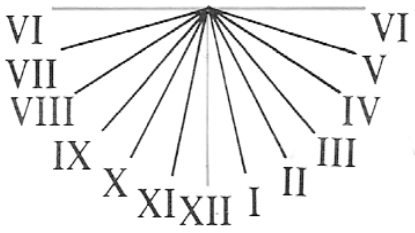
Otra de las preguntas estuvo relacionada con las rectas paralelas y perpendiculares; y es la siguiente:

¿Puedes nombrar las rectas que se forman? 2 rectas paralelas y 1 perpendicular.

Al parecer en este concepto los alumnos están claros y lograron visualizar correctamente las rectas paralelas con la perpendicular.

La segunda actividad presentada en esta guía de trabajo fue la siguiente:

Juan Valverde hizo un reloj de sol. Está formado por semirrectas. Las horas representadas a la izquierda de las XII son de la mañana, las de la derecha son de la tarde. Observó que había semirrectas perpendiculares. La figura es la siguiente:



Las preguntas que se realizaron en torno a este problema también se basaban en la identificacion de rectas y ángulos, todo esto para ir desarrollando la visualizacion en los estudiantes. De las respuestas que dieron los estudiantes se tomó la de un equipo y se muestran a continuacion:

¿Podrías reconocer algunos pares de semirrectas perpendiculares? XII I VI a.m. y VI p.m

¿Crees que Juan fue inteligente cuando hizo un reloj de sol con solo 12 horas? Sí

¿Qué horas forman ángulos rectos en este reloj de sol? XII con VI a.m. y p.m.

¿Cómo es el Ángulo formado por la semirrecta XII y XI de la mañana? agudos

¿Y el formado por las VI de la mañana y las VI de la tarde? llano

Las VIII de la mañana y las XII forman un ángulo. Las XII y las III de la tarde otro. ¿Cómo son esos ángulos? adyacentes

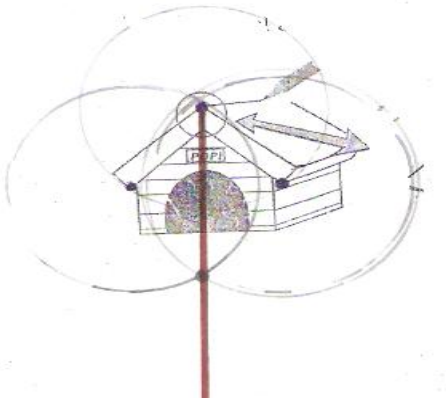
En esta actividad algunos estudiantes mostraron mayor habilidad para identificar las rectas y los ángulos y otros estudiantes se detuvieron a visualizarlas de la mejor manera hasta llegar a una conclusión en su equipo de trabajo.

Para finalizar con esta guía de trabajo se les presentó a los estudiantes un problema en donde solamente debían utilizar regla y compás. El problema es el siguiente:

- Oswaldo está haciendo el diseño de una casita para su perro. El terminó de dibujar las paredes y empezó a dibujar el techo.

  El quiere trazar una línea recta de modo que el ángulo de cada pieza del techo mida la mitad del ángulo total del techo

El dibujo realizado por un equipo de trabajo fue el siguiente:



Los estudiantes para llegar hacer esta construcción primero discutieron la forma de cómo dividir el techo en dos partes iguales y luego como utilizarían solamente la regla y el compás sin hacer una sola medida. Llegaron a la conclusión que necesitaban marcar los puntos que formaban el ángulo y de esa forma utilizaron el compás para trazar las circunferencias y lograr hacer la intercepción del segmento que unía los dos puntos hasta dividir el techo de la casita.

Las preguntas y las respuestas dadas por los estudiantes fueron las siguientes:

Después de trazar esa línea recta, conteste:

¿Cómo lo hizo?…

primero ubicamos los tres puntos del ángulo (B,A,C). después tomamos el segmento AB y en cada uno de esos puntos trasamos una circunferencia y así sucesivamente en los demás puntos y así encontramos la mitad (bisectriz)

¿Qué tipo de ángulo es? agudo ¿Por qué? mide menos de 90°

Entonces ¿Cómo se llama esa línea que se trazó a la mitad del techo? Bisectriz

¿Puedes escribir la definición?

Es una recta que divide el ángulo en 2 segmentos

En esta guía de trabajo los alumnos discutieron en equipos cada una de las actividades y luego con el grupo en conjunto lograron llegar a los resultados esperados, una de las alumnas mostró en el pizarrón como hicieron para que su equipo pudiera identificar los ángulos respectivos.

En estas actividades lograron desarrollar una habilidad visual según Hoffer (1981) que es la coordinación visomotora que es la habilidad para coordinar la visión con el movimiento del cuerpo.

Con estas primeras actividades desarrolladas en esta guía de trabajo quedó evidenciado que los estudiantes se motivaron y se interesaron por una metodología más activa y más participativa, comentando que esto les serviría a ellos como futuros profesores.

Guía de laboratorio 1

Luego de tener un contacto con los materiales para hacer construcciones geométricas se instalaron en el laboratorio de computación para realizar una serie de construcciones siguiendo las indicaciones respectivas que se daban en la guía de laboratorio. Como estos estudiantes ya habían recibido el taller "Aprendamos GeoGebra" ya tenían un cierto contacto con el programa para hacer estas construcciones geométricas.

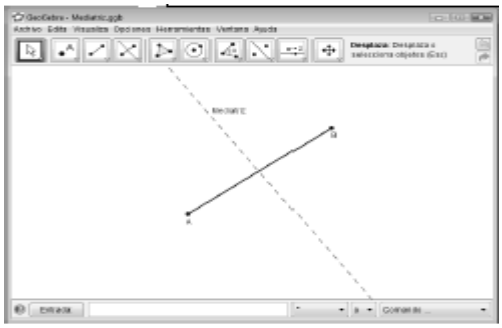
Las guías de laboratorio están diseñadas de tal forma que el alumno en un inicio pueda hacer construcciones siguiendo cada una de las indicaciones que en ella se dan y luego se tiene un problema para que pueda encontrar la solución haciendo uso de la tecnología como una herramienta de aprendizaje. Esta guía fue una extensión de la **Actividad 1** que se detalló anteriormente para identificar tipos de ángulos, rectas paralelas y perpendiculares.

En esta guía se desarrollaron tres actividades de construcción con sus respectivas indicaciones, las cuales fueron:

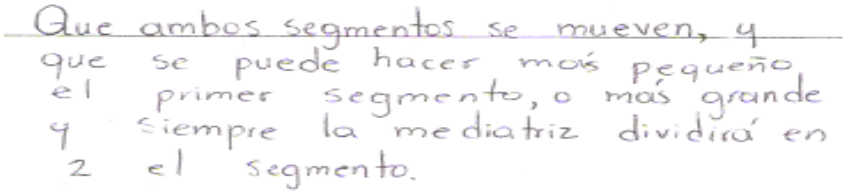
1.- Dibuja un segmento y traza su mediatriz.

En esta actividad como las que a continuación se detallaran, contemplan y llevaron suficiente indicación por parte de la profesora debido a que después de su taller de GeoGebra es su primera guía de laboratorio. Lo que se pretendía encontrar era la mediatriz de en un segmento.

Tal como se muestra en la siguiente figura:

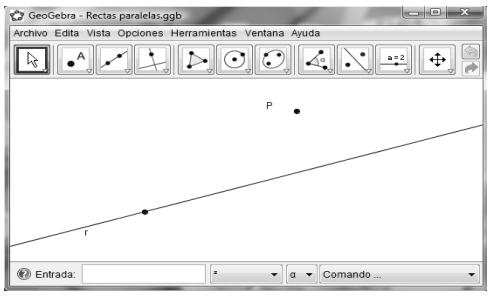


Al arrastrar uno de los extremos del segmento se les pidió a los estudiantes que escribieran lo que observaban. Y esta es una evidencia de ello:



2.-Construcción de dos rectas (Rectas Paralelas)

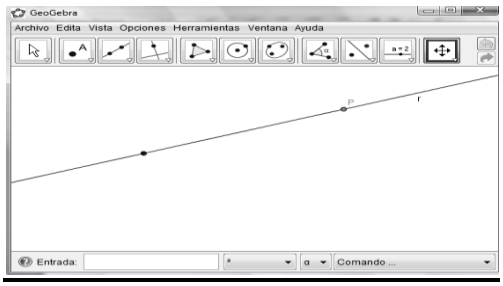
En esta actividad se pretendía que el estudiante pudiera construir un par de rectas perpendiculares dada una recta y un punto cualquiera, como lo que se puede observar:



También los estudiantes podían interactuar con sus compañeros para poder hacer conjeturas y llegar a la construcción correcta. Y que llegaran a mejorar el uso de las herramientas del GeoGebra.

3. ¿Construimos dos rectas más? (Rectas Perpendiculares)

Al igual que en las dos construcciones anteriores, aquí se les va dando cada indicación para que logren construir las rectas perpendiculares Dando un punto dentro de la misma recta:



Utilizaron circunferencias para llegar a obtener los puntos de intercepción. Son algunas de las preguntas que se les hacía en esta construcción:

e) ¿Qué recta se forma? perpendicular Definala rectas que se intersectan

f) Arrastra con el puntero los puntos o las rectas. Comenta con tus compañeros y describe lo que sucede. Sucede que la recta sigue siendo perpendicular, solo en punto P se mueve con A, y B.

Aquí la alumna Ángela María llegó a obtener estas conclusiones después de haber discutido con sus compañeros de grupo y luego las dio a conocer.

Para finalizar se les presentó el problema que anteriormente lo habían trabajado utilizando la regla y el compás. Con el objetivo de que observaran la diferencia entre hacer una representación en un papel y hacer otra en el computador. Como lo dice Fuglestad (2004) citado por Gamboa, R. (2007) que las actividades de "lápiz y papel" se han enriquecido con los ambientes computacionales y que además, con el uso de la computadora es posible profundizar en el estudio de un concepto, cuya comprensión fue superficial o al cual el docente no pudo dedicarle mucho tiempo.

Se recordará el problema que se trabajó anteriormente:

- Oswaldo está haciendo el diseño de una casita para su perro. El terminó de dibujar las paredes y empezó a dibujar el techo. El quiere trazar una línea recta de modo que el ángulo de cada pieza del techo mida la mitad del ángulo total del techo

Las preguntas que se hicieron se muestran a continuación junto con las repuestas que dio el alumno Alejandro:

- ¿Construiste el ángulo respectivo? Si Etiqueta cada uno de sus puntos
- Con **Desplaza** coloca bien las letras, de tal forma que puedas tener una buena visualización
- Si ya construiste la bisectriz del ángulo, en el menú *Contextual* de la recta, elige **Renombra** y escribe **Bisectriz.** Dale color, y trázala con líneas punteadas
- En **Angulo**, dale la medida al ángulo que hiciste. ¿Cuál es esa medida? 32°
- Y, ¿Cuál es la medida del otro ángulo? 16 y 16
- *Arrastra* uno de los puntos, para mover los lados del ángulo, ¿Qué sucede con la bisectriz? Siempre Se mantiene ¿Con el ángulo formado? Cambian de Valor
- Entonces ¿Cuál es el valor del ángulo de cada pieza del techo? 16°

Para la mayoría de los estudiantes el hacer este problema en el computador les resultó sencillo, ya que lo habían visualizado anteriormente y solamente debían hacer uso efectivo de las herramientas del programa GeoGebra para poder hacer la construcción respectiva. De esa forma se logró afianzar el concepto de ángulos y bisectriz de un ángulo.

En general con todas las actividades planteadas se logró que los alumnos llegaran a establecer relaciones entre los aspectos visuales y los aspectos analíticos. También hicieron uso del razonamiento ya que es usado para resolver problemas de geometría por tanto como lo dice Hershkowitz "los procesos de razonamiento son considerados hoy en día como una variedad de acciones que toman los alumnos para comunicarse y explicar a otros, tanto como a ellos mismos, lo que ven, descubren, piensan y concluyen" y ellos en estas actividades llegaron a conclusiones de lo que veían y descubrían.

Sesión Nº 2

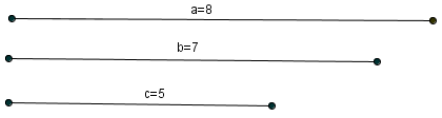
En esta sesión como la anterior se trabajaron dos guías, con la diferencia que en esta oportunidad los alumnos comenzaron a trabajar con su guía de laboratorio y después trabajaron con la guía utilizando sus materiales de construcción. El objetivo de estas guías era identificar las características y propiedades de los triángulos, las cuales se describen a continuación:

Guía de laboratorio 2

En esta guía de laboratorio se les presenta a los estudiantes dos actividades de construcción siguiendo sus respectivas indicaciones con el objetivo de que ellos se vayan familiarizando con las características especiales de los triángulos.

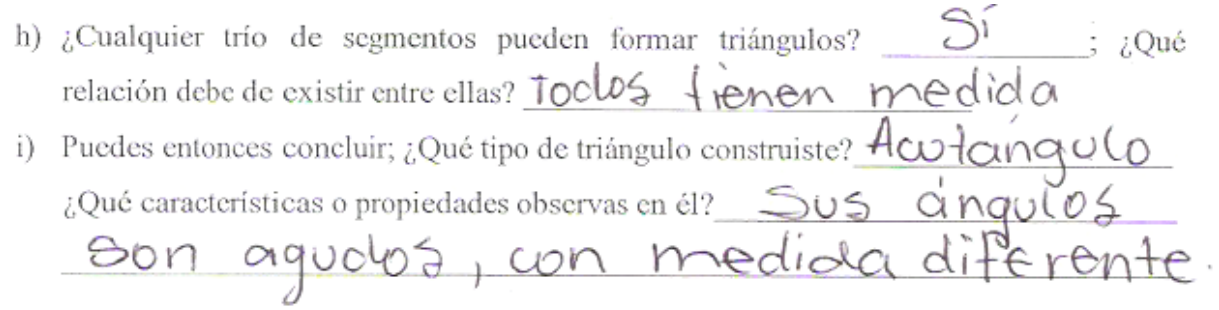
La primera construcción es la siguiente:

1.- Construya un triángulo, partiendo de los siguientes segmentos, con la medida propuesta para cada uno.



Con las indicaciones ya dadas los alumnos muestran menor dificultad para la construcción del triángulo y comienzan a nombrar las características de los triángulos, como ser: el vértice, los segmentos, que son polígonos y por eso utilizan la herramienta ***polígono*** en el GeoGebra, descubren que la suma de sus ángulos internos mide 180º, etc.

Se muestra a continuación una de las preguntas junto con las respuestas que se hicieron en esta actividad:


h) ¿Cualquier trío de segmentos pueden formar triángulos? Sí ; ¿Qué relación debe de existir entre ellas? Todos tienen medida

i) Puedes entonces concluir; ¿Qué tipo de triángulo construiste? Acutángulo ¿Qué características o propiedades observas en él? Sus ángulos son agudos, con medida diferente.

La alumna Fiama al igual que sus compañeros lograron identificar el tipo de triángulo que formaron los segmentos que se les dio, solamente uno de ellos no llegó a la conclusión.

2.- Resuelve y Practica

Esta segunda construcción consistió en que los alumnos construyeran un triángulo ABC cualquiera con el objetivo de que dibujaran en el triángulo las medianas y así poder encontrar el baricentro en la construcción de dicho triángulo.

Algunos alumnos construyeron un triángulo equilátero, otros un triángulo isósceles y otros un triángulo rectángulo. Trabajando en equipo lograron comprender y visualizar el punto de intersección de las medianas en un triángulo cualquiera.

3.- Resuelva el siguiente problema

En la tercera y última actividad fue relacionada con la resolución de problemas como una estrategia didáctica en la construcción de triángulos equiláteros congruentes, el objetivo era que realizaran la construcción en los recuadros que se les daba en la guía de trabajo para que ellos primero pudieran hacer uso de la visualización y a la vez hacer uso de las cuatro etapas

que propone Polya (1987) al resolver un determinado problema. En la primera parte iban a comprender el problema que se les plantea y a la vez concebir un plan para que luego de esta comprensión ellos pudieran pasar al ordenador a ejecutar el plan propuesto. El problema consistía en:

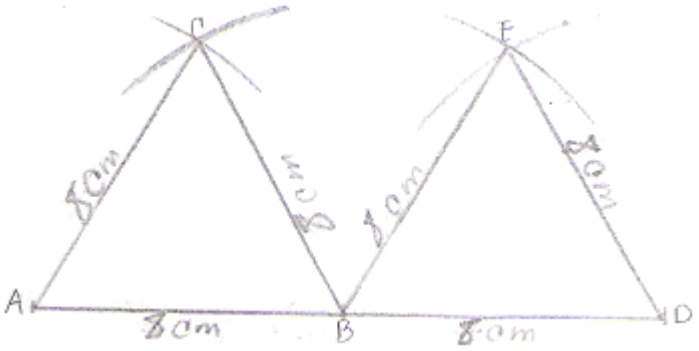
ABC y BDE son triángulos equiláteros congruentes de lado 8cm y cuyo vértice común B es un punto fijo.

a) Realice la construcción en GeoGebra y luego dibújela en el recuadro que se le proporciona.

Algunos alumnos lograron plantearse un plan para la solución del problema, más algunos no lograban visualizar los triángulos equiláteros.

El alumno Alejandro pudo construir los triángulos equiláteros, utilizando la visualización y el razonamiento para hacerlo. Para Hershkowitz una de las funciones principales del razonamiento es entender lo que se plantea en un determinado problema, explicar con orden esa situación y que el estudiante quede convencido de lo que se le ha planteado y como ha llegado a obtener su resultado.

A continuación la construcción que hizo este estudiante:

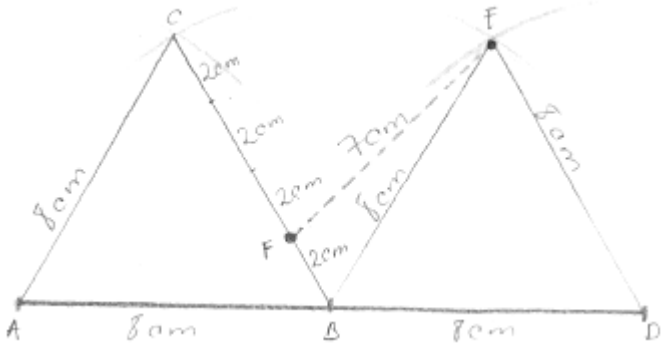


Esta construcción la realizó en primera instancia usando el software GeoGebra, en donde según Hitt la tecnología sirve como herramienta fructífera para la construcción de conceptos matemáticos más profundos que se reflejen en procesos exitosos por parte de los estudiantes

en la resolución de problemas. Luego de visualizar la construcción en el ordenador los estudiantes la construyeron en el recuadro que se les proporcionaba en su guía de trabajo.
Cada uno de ellos hacía sus conjeturas y razonamientos para poder llegar a obtener sus propios resultados. También en este problema pudieron descubrir y comprobar las características de los triángulos equiláteros.
La segunda parte del problema fue:

b) Si $\overline{CB} = 4\overline{FB}$, utilizando GeoGebra encuentre la medida de $\overline{FE}$.

A continuación se puede observar la construcción que este estudiante hizo, primero en el GeoGebra y luego lo dejó plasmado en su guía de laboratorio.



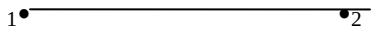
El objetivo con esta parte del problema era que los estudiantes visualizaran ese lado en el triángulo equilátero ya que la visualización le permite al estudiante representar lo mental a través de formas visuales externas; además la visualización está estrechamente unida al razonamiento y en esta actividad se logró observar un tipo de razonamiento como se describe en el marco teórico, el razonamiento como un proceso configural, ya que según Duval es el desarrollo de la acción coordinada que efectúa el estudiante, cuando resuelve un problema de geometría, lo cual genera una interacción entre la configuración inicial y sus posibles modificaciones con las afirmaciones matemáticas adecuadas.

Con esto queda evidenciado que los alumnos pueden llegar a la comprensión de un problema si se le permite ir desarrollando la visualización y el razonamiento en cada construcción, ya que esto es una práctica que se desarrolla día con día.

Actividad 2

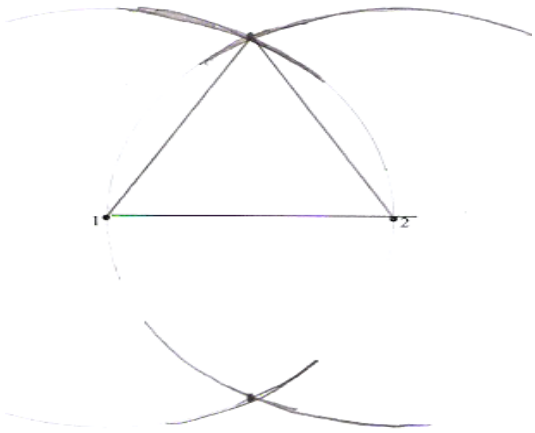
Esta actividad es realizada con el objetivo de que los estudiantes puedan hacer diferencias y semejanzas al momento de trabajar con un instrumento y otro, como lo es el uso de la tecnología y el uso de instrumentos de dibujo como regla y compás. Es también un objetivo de que ellos comprendan que la tecnología es solo un instrumento que facilita la comprensión del aprendizaje matemático y que hace más dinámica la enseñanza de la geometría. De esta forma estos estudiantes aprenden a diferenciar un tipo de representación con otro y les facilitará su aprendizaje ya que esto también lo aplicarán en sus prácticas profesionales, debido a que ellos son los futuros docentes encargados de dar una nueva enseñanza de la geometría, más activa y más dinámica. Al igual que en la guía de laboratorio se deseaba identificar las características y propiedades de los triángulos, en esta guía se continua la identificación de las mismas. Esta guía de trabajo consistió en realizar dos construcciones utilizando regla y compás. La primera actividad consistía en lo siguiente:

1.- Construya un triángulo equilátero sobre el segmento 1-2.



Los estudiantes como ya habían tenido contacto con guías de esta clase en la sesión anterior, se les facilitó comprender que era lo que se les pedía y en equipos de tres estudiantes razonaban y planeaban las estrategias para la resolución de esta construcción. De igual forma siempre se encuentra un cierto número de estudiantes que se les dificulta hacer construcciones con regla y compás. En estos casos la facilitadora del aprendizaje trata de conducir a los estudiantes para que puedan llegar al razonamiento respectivo o al que se desea que ellos puedan alcanzar.

A continuación se muestra una de las construcciones realizadas por un equipo de estudiantes:



También se muestra como explican los pasos que siguieron para hacer dicha construcción:

a) Explique cada uno de los pasos que siguió en la construcción

Trazamos una circunferencia del punto 1 al punto 2 luego trazamos otra circunferencia del punto 2 al 1 y colocamos sus puntos de intersección en ambas circunferencias y por ultimo construimos el triangulo equilátero

Se puede observar que los estudiantes llegaron a hacer las conjeturas para poder hacer la construcción respectiva. En esta pregunta lo que se pretende es que los estudiantes puedan explicar o escribir lo que piensan y han visualizado o razonado, cada problema lleva consigo un seguimiento de argumentos y conjeturas, para Vara Orozco "el razonamiento es una secuencia lógica de proposiciones que llevan a demostrar algo y se hace con orden y método; consta de explicaciones, argumentos o motivos" es decir que lo que se pretende es que el estudiante argumente con orden lo que hizo en la construcción y este es en si el fin del desarrollo del razonamiento.

Otra de las preguntas que se les hizo relacionado con esta construcción es la siguiente:

b) ¿Qué características y propiedades observas en este triángulo? Comenta con tus compañeros y descríbelas.

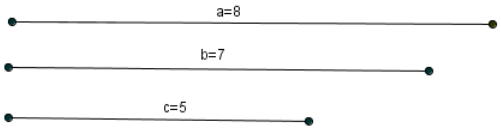
Que sus tres lados tienen la misma medida por lo tanto sus lados son iguales.

La mayoría de los estudiantes llegó a esta respuesta que se observa, se pretendía que los estudiantes pudieran concluir que este era un triángulo equilátero pero solamente concluyeron que sus tres lados eran iguales y esa es una de las características de este triángulo.

Cabe destacar que los estudiantes lograron adquirir mayor habilidad en el uso de la regla y el compás y a la vez hacer una comparación entre este tipo de representación y el uso de la tecnología como una herramienta didáctica.

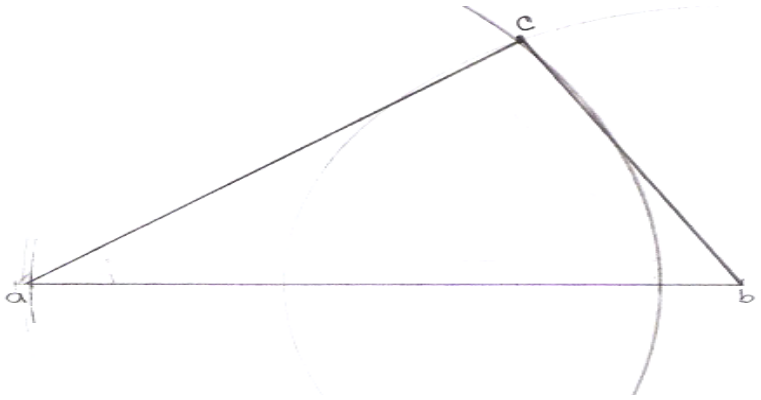
La segunda actividad en esta guía de trabajo es la siguiente:

2.- Construya un triángulo, partiendo de los siguientes segmentos, con la medida propuesta para cada uno.



Esta actividad es la misma que se mostró en la guía de laboratorio, los estudiantes ya hicieron esta construcción el GeoGebra y ahora la realizan utilizando regla y compás. En este caso también harán uso de la visualización, descubrirán que hay otra forma de representar la misma figura que hicieron en el ordenador. Al igual que en la construcción anterior se les pidió que argumentaran lo que habían realizado.

A continuación se muestra la construcción realizada por un equipo de estudiantes junto con las respuestas a las interrogantes planteadas:



a) ¿Se obtiene el triángulo? Explica cada paso que seguiste para construir este triángulo

claro que si! Tomamos el segmento # 8 como base, con el compás medimos el seg. # 7 y trazamos una semi-circunferencia, de nuevos medimos el seg. # 5 e igual trazamos otra semicircunferencia y encontramos el punto de intersección y formamos el triángulo dado.

b) ¿Qué relación ha de existir entre los lados a, b y c para que se pueda construir el triángulo? Su relación entre ellos es el punto de intersección, y también es necesario 3 segmentos para su construcción.

c) ¿Qué tipo de triángulo construistes? Un Triángulo Acutángulo

d) ¿Qué características y propiedades encuentras en él?

1) Sus lados son de distinta medida.
2) Es necesario trazar circunferencias para construir triángulos.

Al realizar esta serie de preguntas los estudiantes pueden razonar y desarrollar uno de los razonamientos propuestos por Duval ***El razonamiento como un proceso discursivo natural,*** este se lleva a cabo de manera espontánea en el lenguaje natural a través de descripciones, explicaciones o argumentaciones.

A la vez se fue desarrollando la visualización que es la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y lenguaje que se aprende (Cantoral y Montiel, 2001-2002).

Sesión Nº 3

Esta sesión está caracterizada porque que en ella solamente se realizó una guía de laboratorio como continuación del aprendizaje de los triángulos que se hizo en la sesión Nº 2, la cual se detalla a continuación:

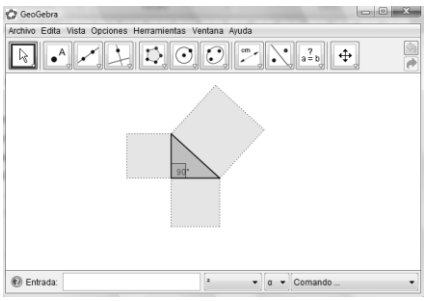
Guía de laboratorio 3

Este laboratorio consistió en comprobar el teorema de Pitágoras para todo triángulo rectángulo, estableciendo una relación entre los catetos y la hipotenusa. Esta guía se dividió en dos partes en donde la primera parte consistía en hacer dos construcciones en donde los estudiantes seguían paso a paso cada indicación que se le daba y en la segunda parte del laboratorio se plantean dos problemas relacionados con el teorema de Pitágoras.

En la parte I del laboratorio se encuentran las siguientes construcciones:

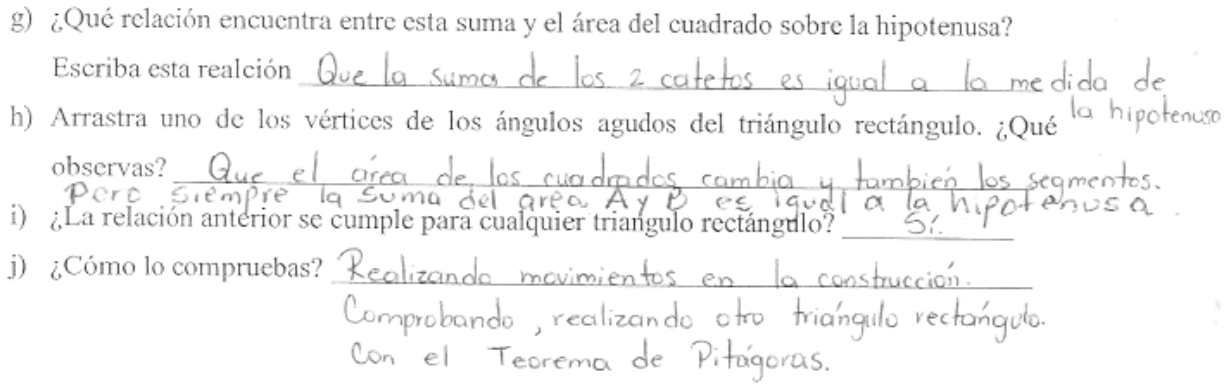
1.-Creación de un triángulo rectángulo

Los alumnos comenzaron a hacer la construcción siguiendo las indicaciones hasta crear un triángulo rectángulo, necesario para el logro del objetivo propuesto. Con este triángulo rectángulo se construyeron cuadrados sobre los catetos y sobre la hipotenusa de la siguiente manera:



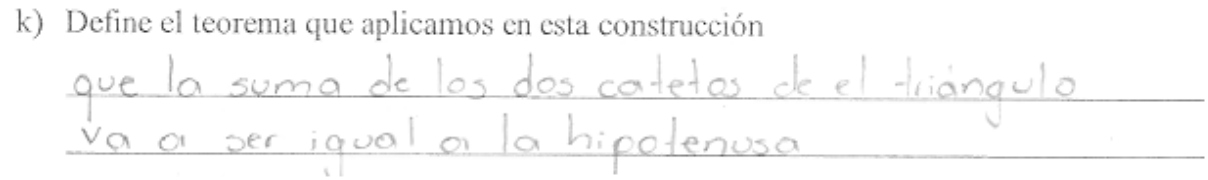
Seguidamente se encontró el área de cada uno de los cuadrados, los cuales a uno le llamaron A, a otro B y C, como también la suma del área de los cuadrados sobre los catetos. En seguida los alumnos contestaron que la suma de los cuadrados A y B era igual a C. Existía una pregunta en la guía de laboratorio en donde se les pedía que escribieran que relación existía

entre esta suma y el área del cuadrado sobre la hipotenusa y ellos comentaron: “al sumar los dos catetos el resultado es igual a la hipotenusa”. Observemos las respuestas que la alumna Irma dio en esta guía:


g) ¿Qué relación encuentra entre esta suma y el área del cuadrado sobre la hipotenusa?
Escriba esta realción Que la suma de los 2 catetos es igual a la medida de la hipotenusa
h) Arrastra uno de los vértices de los ángulos agudos del triángulo rectángulo. ¿Qué observas? Que el área de los cuadrados cambia y también los segmentos. Pero siempre la suma del área A y B es igual a la hipotenusa.
i) ¿La relación anterior se cumple para cualquier triangulo rectángulo? Sí.
j) ¿Cómo lo compruebas? Realizando movimientos en la construcción.
Comprobando, realizando otro triángulo rectángulo.
Con el Teorema de Pitágoras.

Al observar lo que sucedía en la construcción los estudiantes mostraron facilidad para contestar estas preguntas.

Estas conclusiones dieron pie para que los estudiantes pudieran hacer exploraciones más profundas a cerca del triángulo rectángulo y razonar como podrían definir esa relación entre la relación anterior, la cual se estableció como **Teorema de Pitágoras.** Y para formalizarlo los alumnos usaron sus palabras expresando lo siguiente:


k) Define el teorema que aplicamos en esta construcción
que la suma de los dos catetos de el triángulo va a ser igual a la hipotenusa

En esta misma parte se realizó otra construcción con el objetivo de ahondar más sobre el teorema de Pitágoras y darle a conocer a los estudiantes otra estrategia para construir un triángulo rectángulo, de tal manera que ellos puedan elegir el método para tal construcción.

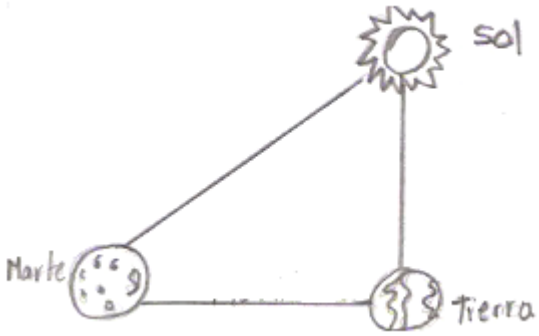
Como estos estudiantes son de segundo año de magisterio, ya traían algunos conocimientos previos sobre este teorema, en este caso tuvieron la oportunidad de profundizar estos conocimientos y de visualizarlos de manera diferente.

Los estudiantes mostraron mucho interés en este tema y de inmediato concluyeron que el Teorema de Pitágoras se escribe de forma algebraica así: $c^2 = a^2 + b^2$. Expresaron que de esa forma era más fácil observar como la hipotenusa era igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

En la Parte II de esta guía de laboratorio se les presentó dos problemas, los cuales se muestran a continuación:

- En un cierto momento el Sol, la Tierra y Marte forman un triángulo rectángulo con el ángulo recto en la Tierra. Sabiendo que la distancia de la Tierra al Sol es de 150 millones de kilómetros.

Este problema tenía dos incisos, el inciso **a)** consistía en que simulara con GeoGebra esta situación y que seguidamente lo dibujara en el recuadro que se le proporcionaba en su guía de laboratorio. Este inciso fue resuelto satisfactoriamente después de haber trabajado las dos construcciones anteriores, les agradó tanto que lo realizaron haciendo dibujos y es allí en donde se observa la habilidad que estos estudiantes van adquiriendo en el manejo de las herramientas del programa, seguidamente de haber observado la construcción en el programa los estudiantes la construyeron en el recuadro, como se muestra a continuación el dibujo realizado por la alumna Irma Michelle:



Se puede apreciar la representación del triángulo rectángulo que esta alumna hizo, como dice Duval (1999a) que la representación se refiere a un amplio rango de actividades significativas, que son utilizadas para denotar objetos, y esta ha sido una actividad significativa.

El inciso **b)** es el siguiente: Si la distancia de la Tierra a Marte es de 173 millones de kilómetros. ¿Cuál será la distancia de Marte al Sol? *(Utilice la línea de comandos para efectuar esta operación y abra la ventana algebraica).*

En este inciso los estudiantes hicieron la construcción y ya sabiendo la distancia de la Tierra al Sol y de la Tierra a Marte solo necesitaban encontrar la distancia de Marte al Sol,

inmediatamente se dieron cuenta que lo que debían de encontrar era la hipotenusa. Algunos de ellos no leyeron bien la indicación que se les dio en este inciso la cual era de utilizar la línea de comandos para poder encontrar este valor y así utilizar la ventana algebraica y no solamente la zona en donde se hacen las construcciones; estos estudiantes inmediatamente empezaron a hacer la operación algebraica del Teorema de Pitágoras de forma manual, lo que también se puede destacar que lograron visualizar y representar esta construcción.

Los estudiantes que no se percataron de esta indicación lograron ubicarse gracias a la ayuda de sus demás compañeros y así comenzaron a trabajar en la línea de comandos para calcular la hipotenusa.

Después de trabajar en el GeoGebra los estudiantes representaron en su guía la construcción que habían hecho en el ordenador, quedando de esta forma satisfechos con la visualización hecha del triángulo rectángulo.

El problema Nº 2 es el siguiente:

- Obtener el ángulo que forma un poste de 7.5 m de alto con un cable tirante que va, desde la punta del primero hasta el piso, y que tiene un largo de 13.75 m

Este problema fue fácil hacerlo y se dejó a opción de que cada estudiante buscara la manera o planeara el camino a seguir en la solución. Los estudiantes hicieron la construcción en el ordenador para poder tener una mejor visualización y luego algunos de ellos trabajaron manualmente como encontrar el ángulo que hacía falta, pero otros fácilmente haciendo uso de las herramientas del GeoGebra llegaron pronto a la solución. Los estudiantes que primero terminaron la construcción se les dio la oportunidad de explicar en la pantalla que se encontraba en el laboratorio para que los demás pudieran observar las diferentes estrategias que utilizaron para llegar a obtener una conclusión.

Al llegar a la solución de estos problemas se logro desarrollar uno de los tipos de razonamiento propuestos por Duval: ***el razonamiento como un proceso discursivo teórico,*** este proceso utiliza solo teoremas, axiomas o definiciones para llegar a la conclusión, está estructurado deductivamente y ocurre en un registro estrictamente simbólico o en el lenguaje natural. Y, como se pudo observar en estos problemas se hizo uso de un Teorema para llegar a la solución deseada.

También se puede concluir que estas actividades como lo dice Gamboa, que la introducción de la tecnología en el salón de clases ha cambiado la forma en que se lleva a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A diferencia del enfoque algorítmico que se le ha dado a la enseñanza de esta disciplina, esta se puede desarrollar ahora en un ambiente de descubrimiento y reflexión.

El desarrollo de la visualización y el razonamiento se irá dando en la medida que los estudiantes entren en este proceso de práctica como lo hicieron en esta guía de laboratorio, ya que aquí se pudo observar que ellos ya están en ese proceso de desarrollo, al descubrir, conjeturar y reflexionar cada una de las situaciones que se les plantea y que cada vez van observando que la tecnología formará parte de las herramientas matematicas para la enseñanza de estas.

Sesión Nº 4

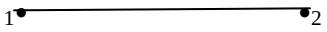
Esta sesión fue la última en la que se involucró una guía de laboratorio y una actividad de representación, se inicio con la actividad en donde usarían el compás y la regla.

Actividad 3

El propósito de estas actividades es explorar las condiciones que deben de cumplir los cuadriláteros para ser paralelogramos.

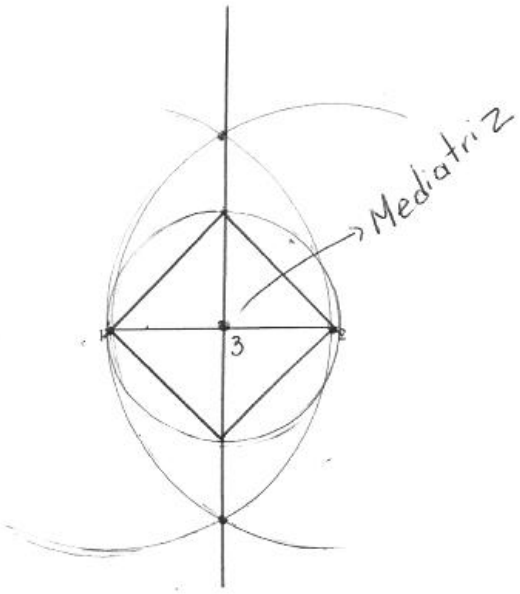
En esta guía se presentaron dos actividades de construcción en donde en cada una de ellas los estudiantes debían explicar los pasos que siguieron para realizarlas. La primera actividad de construcción es la siguiente:

1.- Construye el cuadrado con el segmento 1-2 como diagonal.



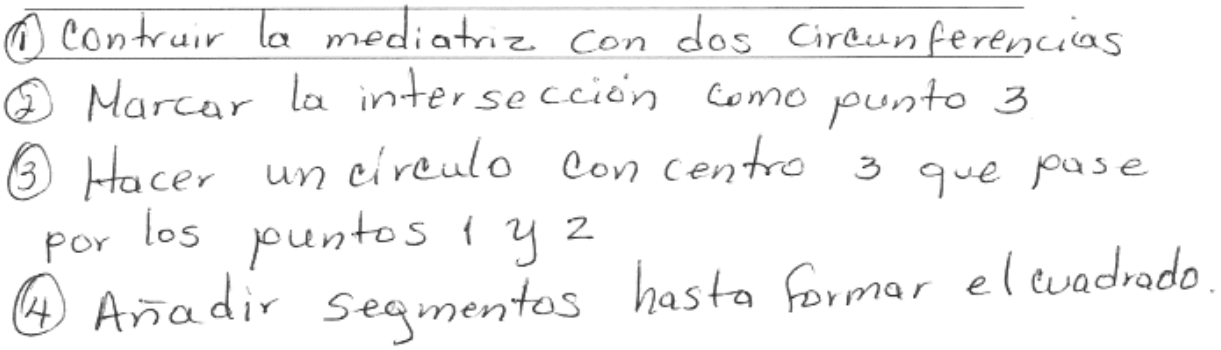
Dos equipos de cuatro lograron identificar que lo primero que se debía hacer es encontrar la mediatriz del segmento que se les había proporcionado, un equipo hizo la construcción doblando el segmento o sea que alargaron otro segmento más para dejar la unión de ellos como el centro de los segmentos y luego trazar las circunferencias con el compás.

De los equipos que recordaron el concepto de mediatriz y realizaron la construcción correcta se muestra una prueba de ello:



Se logró observar que los estudiantes habían adquirido mayor habilidad en el uso de los instrumentos de dibujo, ya que algunos de los integrantes del equipo de trabajo pasaron al pizarrón a demostrar lo que habían hecho.

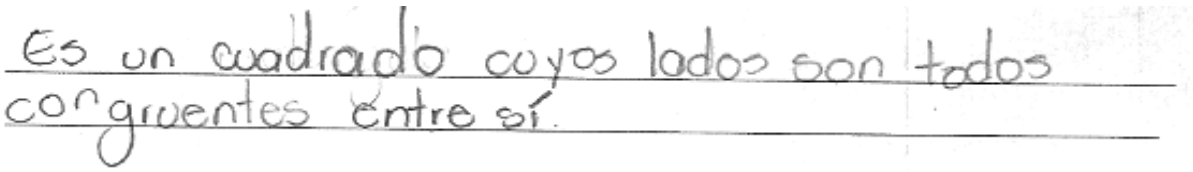
También se les pidió que escribieran los pasos que habían seguido para hacer dicha construcción, y esta es una de las respuestas del equipo:



Se puede observar que los estudiantes de este equipo llegaron fácilmente a la solución deseada, con tan solo recordar un concepto clave para realizar dicha construcción.

La siguiente interrogante que se les hizo fue que observaran el cuadrado que habían construido y comentaran con sus compañeros las características que podían encontrar en la construcción que realizaron.

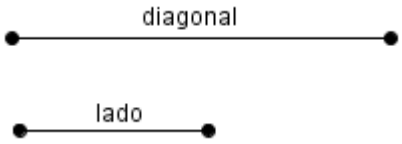
Algunas de las respuestas fueron:



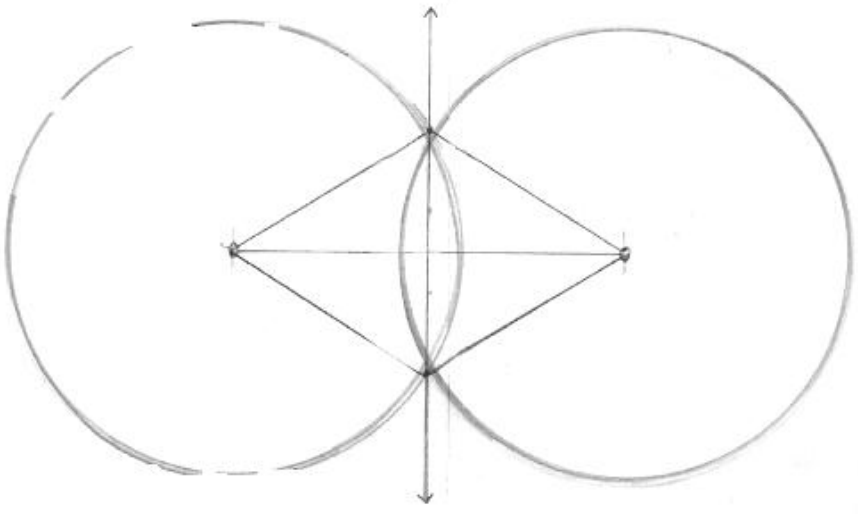
Esta es solamente una de las características de las que pudieron visualizar en esta construcción.

La segunda actividad de construcción es la siguiente:

2.- Construye un rombo conociendo el lado y una diagonal.

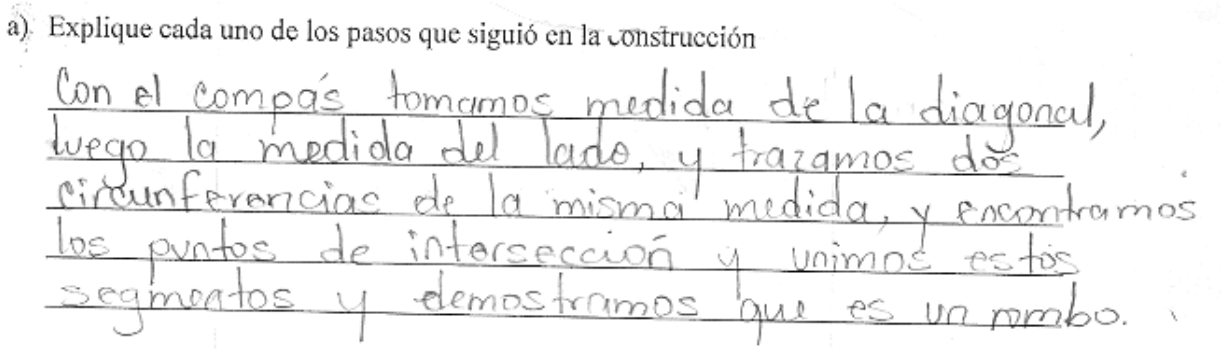


En esta actividad todos los equipos de trabajo llegaron a la solución de manera más rápida que en las anteriores, demostrando así mayor dominio y habilidad al momento de razonar para hacer las construcciones que se les planteaba. Pasaron al pizarrón a demostrar el trabajo que habían realizado en su guía. Esta es una de las construcciones que realizó un equipo:



Como se puede observar en la construcción, los estudiantes manejaron correctamente los conceptos que ellos por sus propios medios fueron descubriendo y de la misma forma ellos

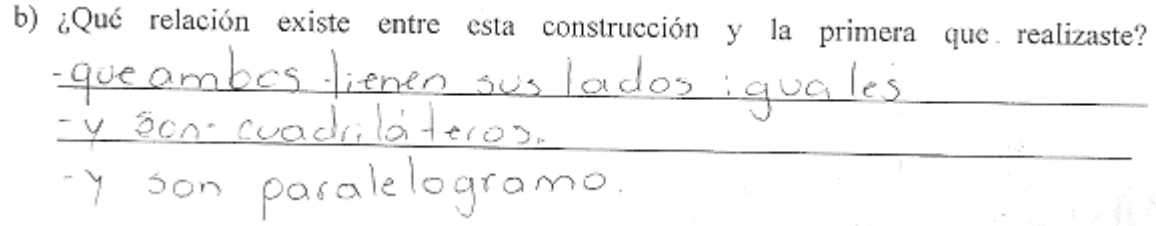
llegaron a realizar de manera independiente esta construcción. Estas son las respuestas que ellos dieron en la construcción del rombo:


a) Explique cada uno de los pasos que siguió en la construcción

Con el compás tomamos medida de la diagonal, luego la medida del lado, y trazamos dos circunferencias de la misma medida, y encontramos los puntos de intersección y unimos estos segmentos y demostramos que es un rombo.

Esta es una construcción sencilla pero en donde se debe aplicar correctamente el uso de los instrumentos de dibujo.

También se les preguntó la relación que existe entre la primera construcción del cuadrado con esta del rombo. Esta es una de las respuestas:


b) ¿Qué relación existe entre esta construcción y la primera que realizaste?

-que ambos tienen sus lados iguales
-y son cuadriláteros.
-y son paralelogramo.

Llegaron a la conclusión que ambos son cuadriláteros y que cumplen algunas condiciones para llegar a ser paralelogramos

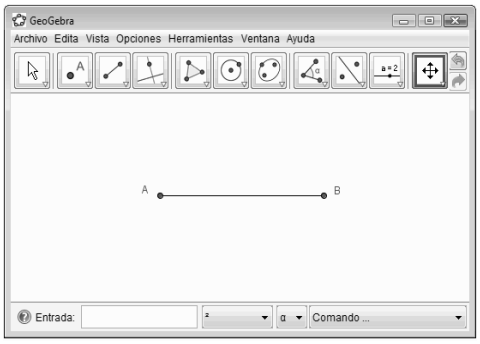
En estas actividades se puede concluir que no puede haber comprensión en matemática si no se distingue un objeto de su representación (Duval, 1999b).

Guía de laboratorio 4

El objetivo de esta guía de laboratorio es igual al propósito de la guía de representación; explorar las condiciones que deben de cumplir los cuadriláteros para ser paralelogramos, una vez familiarizándose con ellos en la construcción del cuadrado y del rombo.

En esta guía se hacen dos construcciones con sus respectivas indicaciones y se plantea una situación problemática. La primera actividad consiste en:

1.- Construye el cuadrado con el segmento $\overline{AB}$ como diagonal.



Los estudiantes con el concepto de mediatriz aprendido y practicado en la guía anterior fue lo primero que trazaron después de construir el segmento $\overline{AB}$. Los estudiantes dibujaron una circunferencia con centro en la mediatriz y radio igual a la mitad del segmento y construyeron el cuadrado con los puntos encontrados, al etiquetar cada uno de los ángulos del cuadrado lograron descubrir que en verdad cada ángulo interno mide 90^{o} , que todos son iguales y que son ángulos rectos. También se dieron cuenta que los segmentos del cuadrado tienen la misma medida y que las diagonales entre si también miden igual. Observemos la respuesta que escribió el alumno Alejandro:

n) Comenta lo que observas y describe las características que encontraste en este cuadrado.

→ Todos los ángulos internos del cuadrado miden lo mismo
→ los segmentos que se relacionan entre sí. También miden lo mismo → Solamente podemos mover los puntos A y B

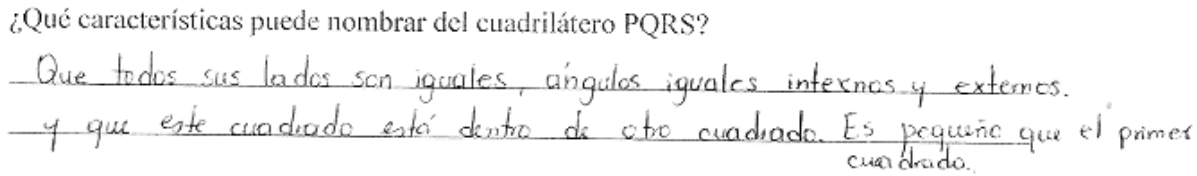
Estas son algunas de las características que cumplen los cuadriláteros para que puedan ser paralelogramos.

La segunda actividad es la siguiente:

2.- Construcción del cuadrilátero de Varignon

En esta ocasión ya se habla en sí de cuadrilátero y lo que se pretende es que los estudiantes lleguen a conjeturar y descubrir este teorema llamado el **Teorema de Varignon.**

Los estudiantes siguen las indicaciones que se les da en la guía, construyen un cuadrilátero cualquiera y encuentran los puntos medios de cada lado del cuadrilátero y finalmente construyen dentro de él, otro cuadrilátero con cada uno de los puntos medios que habían encontrado. Se les pregunto sobre las características que observan en ese cuadrilátero y aquí se muestra una de las respuestas:

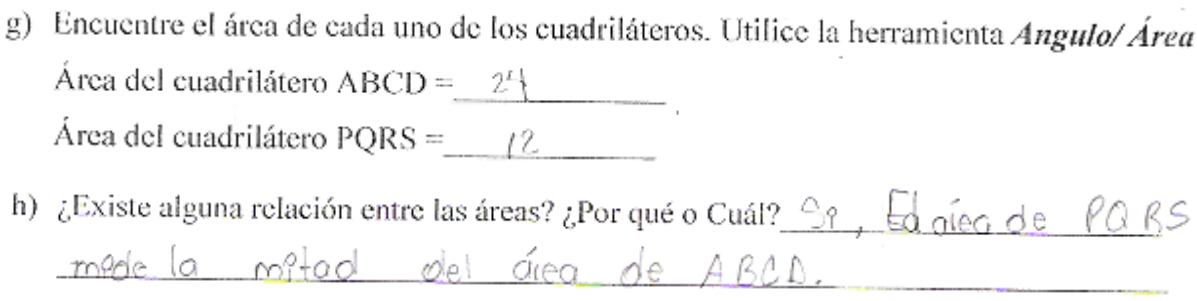

¿Qué características puede nombrar del cuadrilátero PQRS?

Que todos sus lados son iguales, ángulos iguales internos y externos.
y que este cuadrado está dentro de otro cuadrado. Es pequeño que el primer cuadrado.

Se les preguntó que si el cuadrilátero que habían construido dentro era también un paralelogramo y la mayoría de los estudiantes contestaron que si porque tenían dos de sus lados paralelos y esa es una de las condiciones para que ellos puedan ser paralelogramos.

Encontraron el área de cada uno de los cuadriláteros y se observaran algunas respuestas dadas por los estudiantes antes de llegar a la conclusión que se desea:

Respuestas dadas por Marelin

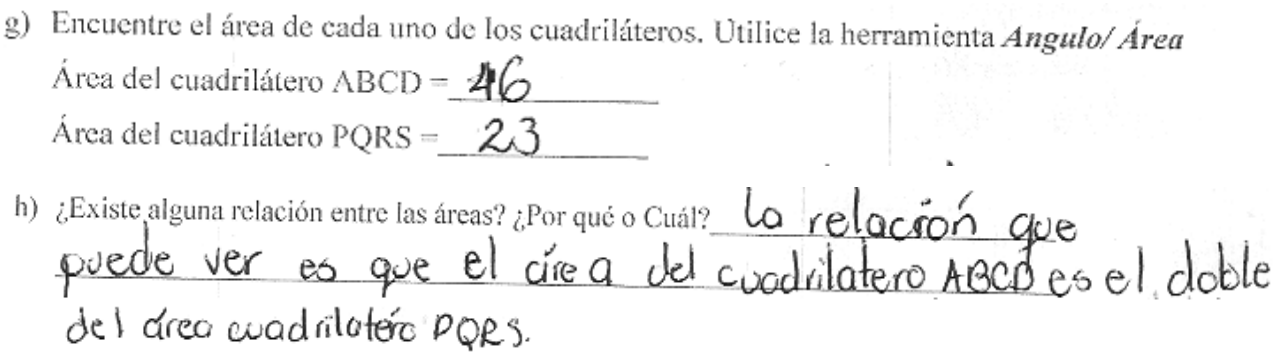

g) Encuentre el área de cada uno de los cuadriláteros. Utilice la herramienta ***Angulo/ Área***

Área del cuadrilátero ABCD = 24

Área del cuadrilátero PQRS = 12

h) ¿Existe alguna relación entre las áreas? ¿Por qué o Cuál? Si, El área de PQRS mede la mitad del área de ABCD.

Respuestas dadas por Ángela María


g) Encuentre el área de cada uno de los cuadriláteros. Utilice la herramienta ***Angulo/ Área***

Área del cuadrilátero ABCD = 46

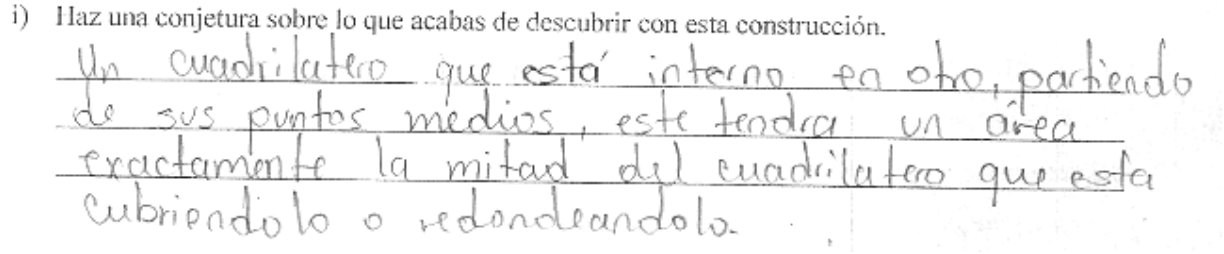
Área del cuadrilátero PQRS = 23

h) ¿Existe alguna relación entre las áreas? ¿Por qué o Cuál? la relación que puede ver es que el área del cuadrilatero ABCD es el doble del área cuadrilatero PQRS.

La respuesta que dio Marelin es que el área de uno mide la mitad del área del otro y la respuesta que dio Ángela es que el área de uno mide exactamente el doble que la otra. No

importa la forma en que la hayan definido, lo importante es que llegaron a la misma conclusión por caminos distintos solamente observando la medida de las áreas de los cuadriláteros.

Finalmente los estudiantes lograron llegar a la respuesta que se ha esperado y concluyeron que lo que existía era un teorema y que lo llamarían el **Teorema de Varignon.** Y, esta es la conjetura que obtuvo la alumna Sofía de toda la discusión que se dio alrededor de la construcción de un cuadrilátero dentro del otro:


i) Haz una conjetura sobre lo que acabas de descubrir con esta construcción.

Un cuadrilatero que está interno en otro, partiendo de sus puntos medios, este tendra un área exactamente la mitad del cuadrilatero que esta cubriendolo o redondeandolo.

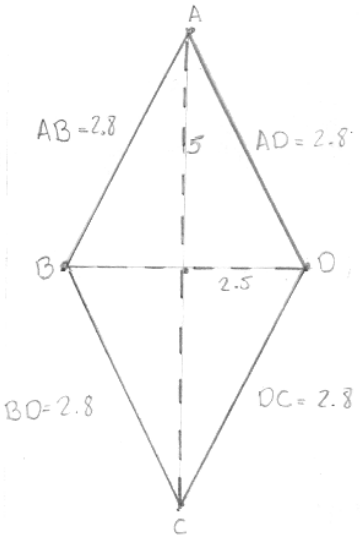
El uso de la tecnología nos ha proporcionado llegar de manera más fácil a la solución de este problema como lo dice Gamboa que la tecnología puede proporcionar ayuda para ser más eficientes y lograr mayor precisión al resolver un problema.

La última actividad en esta guía de laboratorio fue un problema relacionado con la construcción de un rombo y es el siguiente:

- Construye en GeoGebra un rombo en donde; AC de longitud doble que diagonal BD. Calcula el valor del lado si AC vale 5 cm.

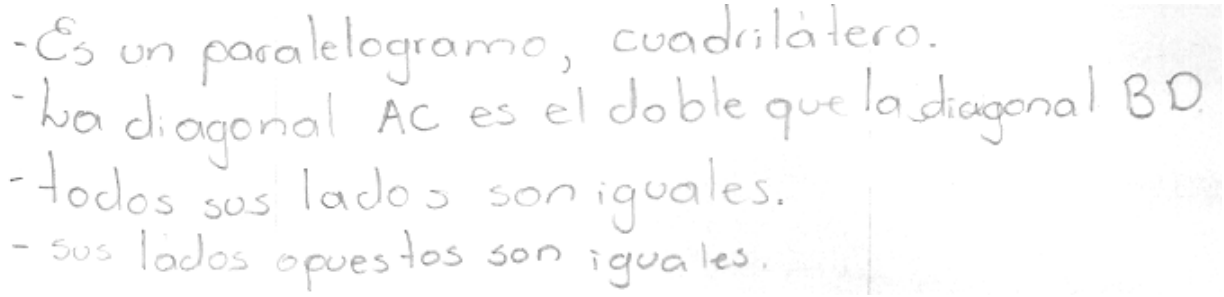
Cada uno de los estudiantes planeó una estrategia diferente para encontrar la solución del problema, se les dificultó para hacer la construcción en GeoGebra debido a que no podían visualizar la figura que se les pedía, para Arcavi la visualización es una componente clave del razonamiento y a la resolución de problemas, y en este problema como todos los demás, los estudiantes necesitan razonar las posibles soluciones para poder hacer la construcción pedida.

La alumna Esther después de haber hecho la construcción en el ordenador dejó en su guía de trabajo un dibujo que representó lo que hizo en el GeoGebra y es lo que se ve a continuación:

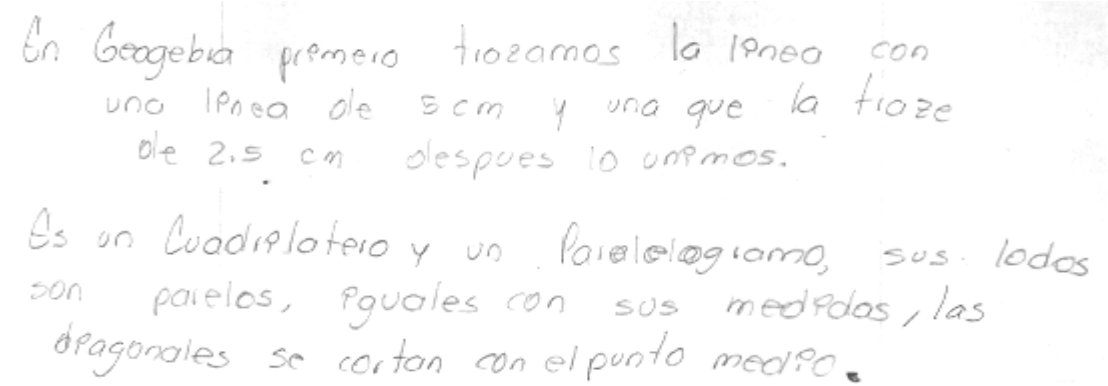


También se muestran los comentarios y conjeturas que se hicieron al momento de construir el rombo:

Conjeturas de la alumna Esther



Conjeturas de la Alumna Marelin



Todos concluyeron que este rombo es un cuadrilátero y un paralelogramo, también mencionaron otras condiciones para ser un paralelogramo, como ser: dos pares de lados son paralelos, dos pares de lados opuestos son congruentes, dos pares de ángulos opuestos son congruentes, las diagonales que dibujaron se cortan en el punto medio y que los lados opuestos son paralelos y congruentes.

Con todas estas actividades se logra desarrollar algunas habilidades visuales Hoffer (1981) y una de ellas es la discriminación visual, que es la habilidad de distinguir similitudes y diferencias entre objetos, dibujos o imágenes mentales entre sí, distinguir figuras o cuerpos congruentes, descubrir las figuras diferentes dentro de un conjunto, etc.

Sesión Nº 5

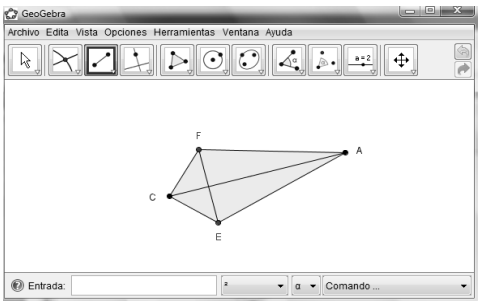
A partir de esta sesión solamente se desarrollaron laboratorios. Y el objetivo de esta guía era identificar las características de los cuadriláteros.

Guía de laboratorio 5

En esta guía de trabajo se pretende que los estudiantes se conecten a la vez con la guía que se realizó en la sesión anterior, ya que en ella se trabajó haciendo construcciones e identificando las características de los paralelogramos. Los estudiantes aquí ya se han relacionado con los cuadriláteros y los paralelogramos ya que fácilmente llagaron a encontrar que condiciones debe reunir un cuadrilátero para ser un paralelogramo.

En esta guía los estudiantes realizaron una serie de construcciones, las cuales les permitieron llegar a comprender que un cuadrilátero no siempre puede ser paralelogramo, a la vez descubrieron fácilmente las características de estos.

Se inició con la construcción de una cometa:



En esta construccion los estudiantes iban siguiendo paso a paso cada indicacion que tenía la guia hasta formar por completo la figura de una cometa. Aquí los estudiantes identificaron que solamente dos de sus ángulos eran congruentes entre si, que ninguno de sus lados eran paralelos enttre ellos y que sus diagonales no eran congruentes, ni se cortaban en el centro de la figura. Comentaron que se parecía a un rombo pero que en realidad el rombo tiene todos sus lados congruentes y la cometa solo tiene dos pares de lados iguales entre si. Concluyeron entonces que este no podria ser un paralelogramo, por tanto decidieron que solamente dirian que es un cuadrilátero.

Las siguientes actividades se trataron de las construcciones de dos trapecios en donde lograron identificar que al menos un par de lados eran paralelos entre si, también visualizaron que los ángulos internos todos tenian distinta medida, lo contrario que sucedia con las construcciones del cuadrado, rectángulo y rombo. Se les pidió que hicieran la suma de la medida de los ángulos internos en cada una de las construcciones y encontraron que esta suma es igual a 360º en ambos y que aunque se arrastren los vertices de cualquier extremo la medida de ellos cambiará pero la suma seguirá siendo la misma.

De igual forma que en la primera construcción concluyeron que estos trapecios no podrian ser paralelogramos porque no cumplian las condiciones que se necesitaban, entonces decidieron que también solo los llamarian cuadriláteros.

Los estuidiantes lograron concluir que un cuadrilátero es distinto a un paralelogramo, que el cuadrilátero es solamente una figura formada por cuatro segmentos y que posee elementos similares a los paralelogramos como ser: lados, vértices, ángulos y diagonales.

La última actividad consistió en la resolución de un problema:

- El trapecio ABCD es isósceles. EG // AB, la m$< FAD$ = 120º y el $< ACB$ es recto.
  Encuentra la altura y el área de la figura.
  Dibuja esta construcción en GeoGebra y luego en tu guía de trabajo.

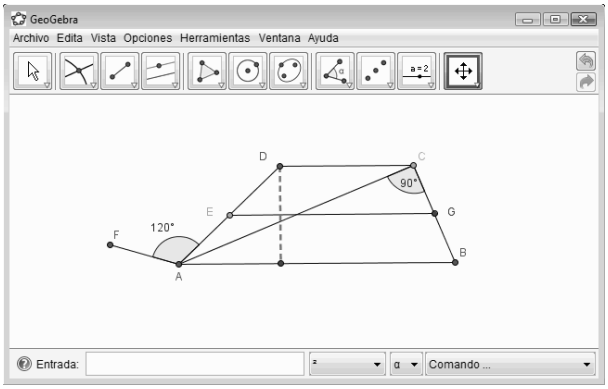
En esta situación problemática se siguió al igual que en cada una de las situaciones presentadas en las sesiones anteriormente los pasos propuestos por Polya, y también se puede

recalcar que el propósito fundamental del maestro será ayudar al alumno a resolver un problema y que esto es una cuestión de habilidad práctica, que en efecto, si el alumno logra resolver con éxito el problema en cuestión, está desarrollando su habilidad en la resolución de problemas y que la habilidad se adquiere mediante la imitación y la práctica.

Esta habilidad se ve reflejada en esta situación debido a que los estudiantes acudieron a la imitación para hacer esta construcción, ya que la hicieron aplicando los pasos que realizaron en las primeras construcciones de esta guía.

Se puede hacer notar que se está justo a la mitad de esta investigación y que los estudiantes ya han adquirido ciertas destrezas y habilidades en la resolución de problemas ya que se pudo observar que en esta situación problemática los estudiantes hicieron más preguntas y jugaron aun más con las herramientas del GeoGebra para indagar y llegar a la solución que se deseaba. La mayoría de los estudiantes lo hicieron por caminos distintos hasta llegar a visualizar la figura que se pretendía obtener.

Se presentará a continuación la muestra de cómo se vería la figura que se pretendía obtener en el GeoGebra



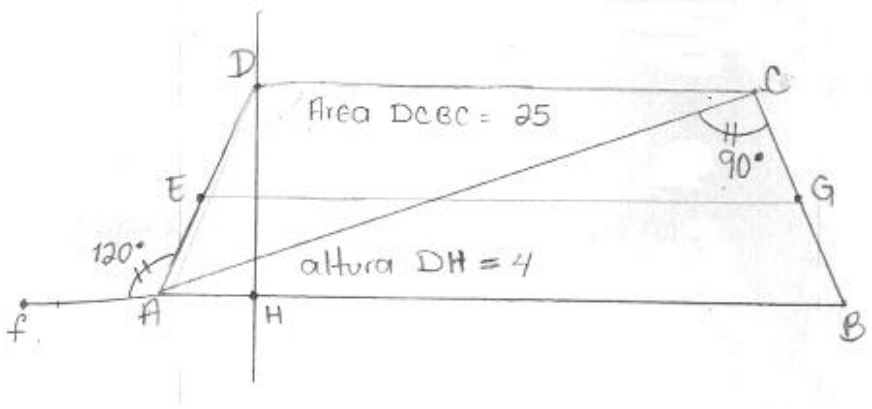
Se les pedía a los alumnos que encontraran la altura y el área de la figura, pero eso era lo mas sencillo de hacer, puesto que esas herramientas ya las manejan de forma correcta, lo importante en esta situacion problemática es el razonamiento que los estudiantes tienen al momento de construir la figura.

Para los estudiantes lo más dificil fue la prolongación del segmento $\overline{FA}$ y encontrar el valor de esos ángulos, ya que tenían que ingeniársela para poder dejar la construccion de tal manera que se visualizaran dichos ángulos, pero es aquí en donde entra la importancia del uso y

manejo del ordenador como una herramienta didáctica para la enseñanza de la matemática tal como lo dice Gamboa (2007) que si la tecnología es usada con frecuencia en el aula de clases se obtendrán cambios sustanciales en la forma como los estudiantes aprenden matemáticas. Cada uno de los ambientes computacionales que pueden emplear, proporcionan condiciones para que los estudiantes identifiquen, examinen y comuniquen distintas ideas matemáticas. De esta forma los estudiantes lograron visualizar la figura y encontrar lo que se les pedía.

Los estudiantes construyeron el trapecio y al igual que en las primeras construcciones llegaron a comprobar que la figura realmente es un cuadrilátero pero que no cumple las condiciones respectivas para llegar a ser un paralelogramo.

Los estudiantes después de hacer la construcción en GeoGebra hicieron una representación en la hoja que se les había proporcionado la situación problemática. A continuación se muestra el dibujo que hizo la alumna Yeimi Sofía después de haber hecho la construcción en el ordenador, manifestando que esta figura le había parecido más interesante debido a que en ese momento se consideraba con mayor habilidad para resolver un problema haciendo uso de la tecnología.



Como se puede observar esta alumna llegó hasta esa figura haciendo uso del razonamiento y el buen uso que hizo de las herramientas del programa. Las apreciaciones y conjeturas que hizo son las mismas que se mencionaron anteriormente, llegando a descubrir en cada una de las construcciones las características de los cuadriláteros.

Sesión Nº 6

En esta sesión se trabajó una guía de laboratorio la cual tenía el propósito de identificar los elementos de un polígono regular.

Guía de laboratorio 6

Las actividades realizadas en esta guía son construcciones enfocadas a que los estudiantes vayan descubriendo poco a poco los elementos de los polígonos regulares y de una manera atractiva y dinámica.

La primera construcción que se realizó es el dibujo de un panal, con el objetivo de que los estudiantes fácilmente se relacionen con los polígonos y de cierto modo se relajen emocionalmente observando que al momento de aprender matemática también se puede hacer un cierto juego que pueda conducir a obtener aprendizajes significativos. Al final lo que ellos podían observar con los hexágonos construidos fue un mosaico, el cual lo manipularon de una manera fácil, divertida e interesante para el estudiante normalista que se está preparando para entrar a un práctica profesional.

La siguiente construcción se hizo con el propósito de que los estudiantes fuesen observando y descubriendo cada elemento del hexágono, se comenzó relacionándolo con la actividad anterior hasta manipular correctamente las herramientas del GeoGebra y así construir el hexágono pretendido. Se les preguntó lo que observaban en la figura y ellos contestaron que los lados del hexágono todos tenían la misma medida. Midieron cada uno de los ángulos internos del hexágono y comprobaron que todos tenían la misma medida pero también observaron que la suma de los ángulos internos de un polígono es distinta a otro polígono, ellos dijeron que eso dependía de los lados que tuviese el polígono que se construya.

Encontraron el centro del hexágono haciendo uso del concepto de mediatriz, construyeron los segmentos del centro del hexágono a los vértices y tomaron sus medidas y concluyeron que a ese segmento lo llamarían **“radio”** y lo definieron como el segmento que une el centro con un vértice del polígono. Luego construyeron segmentos del centro del hexágono a los puntos medios y tomaron las medidas respectivas, conjeturaron y llamaron a dicho segmento

“apotema” como el segmento que une el centro del polígono con el punto medio de cada lado. Al final se les pidió que describieran cada uno de los elementos que habían identificado en el hexágono que construyeron. Y ellos definieron de manera puntual cada uno de estos elementos como ser: lado, radio, apotema, centro y ángulos. Todo este aprendizaje fue obtenido usando el razonamiento deductivo que menciona Hershkowitz que se usa como un vehículo para la verificación de las proposiciones geométricas y a la vez haciendo un buen uso de la herramienta didáctica como lo es la tecnología, hacer figuras animadas permitan presenciar el proceso constructivo de un hecho geométrico, esta es una de las características del medio geométrico dinámica en la enseñanza matemática.

En la parte de las situaciones problemáticas, se les presentaron dos problemas y el primero es el siguiente:

- Hallar el área de un decágono regular dado el valor de su apotema y uno de sus lados.

En este problema se les pidió a los estudiantes que construyeran el decágono en el programa GeoGebra. Ellos utilizaron correctamente cada una de las herramientas que necesitaban para dicha construcción, inmediatamente construyeron los elementos del polígono, calcularon el área del polígono usando una de las herramientas del programa, pero también se les pidió que dedujeran una fórmula matemática para calcular dicha área, con el objetivo de que ellos puedan alcanzar esta habilidad de razonamiento. Para algunos de los estudiantes se les hizo más cómodo solamente usar la herramienta del programa ya que aducían a que era más fácil y que si existía una herramienta que facilitaba este proceso para que se iba a hacer algo más. La maestra intervino diciendo de que la tecnología es solamente una herramienta didáctica y que ellos serán los futuros docentes del país y que probablemente más de alguno de ellos se tendrá que ir a trabajar a algún lugar en donde no existan estos recursos de aprendizaje, que de hecho en la mayoría de los centros educativos del país no cuentan con estos medios que son tan importante en la enseñanza de la matemática.

Partiendo de esa discusión los estudiantes se esforzaron aun más para deducir la fórmula que necesitarían para encontrar el área del polígono que tenían hecho. Los alumnos pudieron visualizar que en el polígono se encontraban varios triángulos y encontraron primero el área de

dichos triángulos y luego pudieron deducir que al obtener el área del triángulo era más fácil obtener el área del polígono porque luego solamente tenían que multiplicar ese dato por la cantidad de lados que posea el polígono que construyan. La mayoría de los estudiantes logró llegar a esta conclusión y luego hicieron una comparación entre el área que encontraron con la herramienta del programa y el área que calcularon utilizando la fórmula matemática que entre todos pudieron deducir. De esa forma observaron que ambas áreas del polígono eran iguales.

El segundo problema es el siguiente:

- Tobías hizo un diseño simbólico para la actividad del día del árbol. Este diseño tiene la forma de un pentágono regular.

En este problema se les presentó un dibujo con la forma de un pentágono, cada uno de los estudiantes construyó a su manera y con las medidas que ellos decidieran hacer la construcción, se les facilitó, ya que en el problema anterior habían hecho una deducción correcta del área del polígono.

Los estudiantes observaron en el polígono que habían triángulos isósceles, dedujeron que la fórmula era multiplicar la base por la altura del triángulo y luego dividir entre dos y después la respuesta encontrada la multiplicaron por cinco que es el número de lados que tiene el pentágono construido.

Como se puede observar los estudiantes lograron con éxito hacer las construcciones respectivas y visualizar fácilmente las fórmulas requeridas. También se quiere apuntar con estos problemas lo importante que es la geometría en situaciones de la vida diaria como lo menciona Bressan et al, (2000) que la geometría forma parte de nuestro lenguaje cotidiano.

Sesión Nº 7

Esta sesión está relacionada con el aprendizaje de los círculos y circunferencias, aquí se pudo observar mayor independencia en los estudiantes en el uso y manejo de las herramientas del programa GeoGebra.

Guía de laboratorio 7

El objetivo de esta guía era describir los elementos de una circunferencia y un círculo, en ella se desarrollaron las siguientes construcciones:

1.-Construyendo una circunferencia

Como se mencionó al inicio, los estudiantes en esta actividad ya habían adquirido mayor independencia en el manejo de las herramientas del programa, por tanto las indicaciones que se les proporcionó para esta construcción fueron las mínimas, hasta llegar a obtener el objetivo buscado.

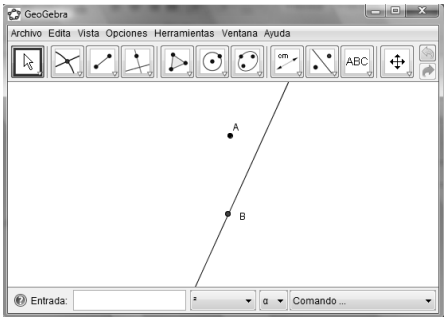
En esta actividad se buscaba que los estudiantes llegaran de manera inductiva a visualizar los elementos de la circunferencia, y cada pregunta que se les hacia los conducía a encontrar dichos elementos. Se les pidió que construyeran una circunferencia dado su centro y uno de sus puntos, seguidamente que unieran con un segmento el centro del círculo con el punto que toca la circunferencia, los alumnos identificaron inmediatamente que ese segmento era el **radio** del círculo y lo definieron como "segmento que va desde el centro del círculo a un punto cualquiera de la circunferencia", ese sería entonces el primer elemento de la circunferencia y el círculo.

Luego de observar el radio del círculo se les pidió que marcaran dos puntos sobre la circunferencia y trazaran un segmento que uniera esos dos puntos, lo hicieron y le llamaron **cuerda** la cual definieron "el segmento que une dos puntos de la circunferencia", se les pidió de que realizaran varias cuerdas hasta que llegaron a una cuerda que pasa exactamente por el centro del círculo y definieron ese segmento como **diámetro** en el cual hicieron la observación de que ese segmento era el doble del radio en medida.

La mayoría de los estudiantes mostraron el avance que había obtenido en el manejo del ordenador y eso ha dependido en gran medida de las tareas que se asignen a los estudiantes, como apunta Gamboa que esas tareas que se propongan deben despertar el interés del estudiantes. Aquellas que presenten cierto grado de desafío atraen más respecto a las que son rutinarias o de fácil solución. Por lo general, los alumnos se sienten animados al trabajar con la computadora, pero esto solamente es duradero si las actividades así lo permiten

Para finalizar definieron con sus palabras que “la circunferencia es el conjunto de puntos en un plano que están a la misma distancia de un punto llamado centro de la circunferencia y que un círculo es la unión de la circunferencia y su interior”, tan solo dos de los estudiantes no llegaron a escribir la definición, por lo tanto diez de ellos lograron con éxito el objetivo de la construcción.

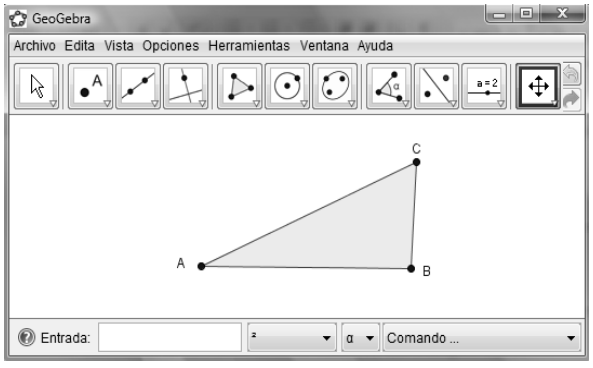
2.- Construcción de una circunferencia con centro A y tangente a una línea



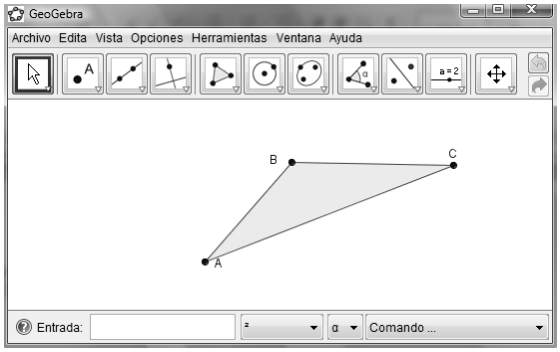
A los estudiantes se les presentó una línea con un punto **B** y otro fuera de ella llamado **A**, tal y como se muestra en la figura anterior, luego se les dio las indicaciones respectivas de tal forma que ellos construyeran una serie de circunferencias y llegaran a visualizar la recta tangente en una circunferencia y a la vez la pudieran definir según las observaciones respectivas.

Tan solo uno de ellos no llegó a observar correctamente lo que se deseaba, pero los demás si pudieron visualizar que la recta tangente es aquella que toca solamente un punto de una circunferencia. Con esto se dio por logrado el objetivo que se pretendía en esta actividad.

3.- Construir la circunferencia circunscrita del triángulo ABC.



4.- Construir la circunferencia inscrita en el triángulo ABC, así como su centro.



Estas dos actividades se analizaron en forma conjunta debido a que aquí se habla sobre una circunferencia circunscrita en un triángulo y otra inscrita, y lo que se pretendía era que los estudiantes aprendieran a diferenciar estos conceptos.

Dos de los estudiantes no pudieron hacer ambas construcciones y otros dos solamente llegaron a construir la circunferencia inscrita en el triángulo, el resto de los estudiantes aplicó correctamente los conceptos que habían aprendido en el transcurso de esta investigación, en donde cada uno de ellos lo hizo como creía que era conveniente.

En la circunferencia circunscrita se debía hacer uso del concepto de la mediatriz a los lados del triángulo para poder encontrar el centro del círculo. Luego se pretendía hacer que coincidiera la circunferencia con los vértices de dicho triángulo. En la circunferencia inscrita se necesitaba del concepto de la bisectriz de cada segmento y así poder encontrar de igual forma el centro del círculo que se iba a inscribir en el triángulo.

Al final los estudiantes que no habían logrado hacer las construcciones respectivas con la ayuda de sus compañeros lograron comprender y visualizar las circunferencias que se les pedía.

Para finalizar esta guía de laboratorio se les presentó a los estudiantes la siguiente situación problemática:

- En una exploración una abeja ha descrito una circunferencia de 4 Km de radio y otra, una circunferencia de 2 Km de radio. Las dos circunferencias tienen su centro en la colmena. ¿Qué área tiene el círculo que ha explorado la primera? ¿Y el que ha explorado la segunda? ¿Qué área de terreno ha explorado más la primera que la segunda?

En este problema los estudiantes se mostraron independientes por completo al momento de resolverlo, debido a que ya habían adquirido conocimientos anteriores y estos les condujo a tener éxito. Utilizaron correctamente la herramienta del programa para encontrar el área de cada uno de los círculos y así poder observar la diferencia que existía entre el área que exploró una abeja y otra.

Se recalca nuevamente que la geometría forma parte de la vida cotidiana y que el logro de los objetivos en esta guía de trabajo se ha debido a toda la práctica que se ha venido dando en el transcurso de cada una de las sesiones y en el buen uso que se le ha dado al ordenador teniendo como una de las ventajas de la tecnología que señala Milevicich & Lois (2007) que esta nos facilita el tratamiento de muchos temas sin exigir al alumno grandes conocimientos matemáticos favoreciendo una metodología en la que participen de forma activa en su aprendizaje.

Sesión Nº 8

Esta es la penúltima sesión de trabajo de esta investigación y trata de un tema muy particular que es, las construcciones imposibles de la antigüedad, es un tema poco tratado en el nivel medio y por esta razón se decidió tomarlo para que los estudiantes obtuvieran ciertos conocimientos. Se inició esta sesión hablando algo de la historia de las construcciones.

Guía de laboratorio 8

El objetivo de esta guía era descubrir que existen construcciones imposibles de construir con regla y compás. En esta guía se hizo una combinación de trabajo, en el laboratorio y con el uso de la regla y el compás. Se trabajaron dos problemas de aplicación con una cierta cantidad de incisos cada uno, de los cuales algunos solamente debían hacer uso de la herramienta tecnológica y otra parte hacer uso de los materiales de dibujo para poder alcanzar el objetivo deseado.

El primer problema consistió en lo siguiente:

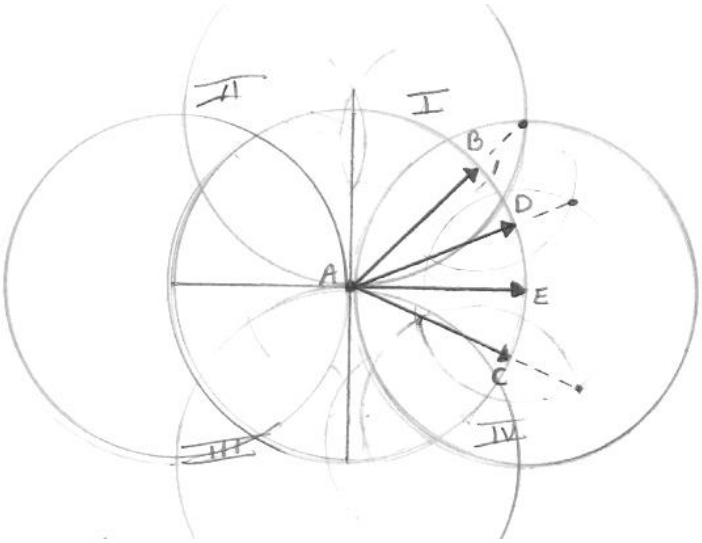
- Se da un ángulo BAC cualquiera; queremos construir dos rayos $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$ (con D y E en el interior del ángulo BAC) de manera que $\angle BAD \cong \angle DAE \cong \angle EAC$

En este problema se pretende que los estudiantes puedan deducir que es trisecar un ángulo ya dado. Aquí ellos mostraron cierta dificultad debido a que el único conocimiento previo que tenían es sobre la bisectriz de un ángulo y no sabían como dividir el ángulo en tres partes iguales.

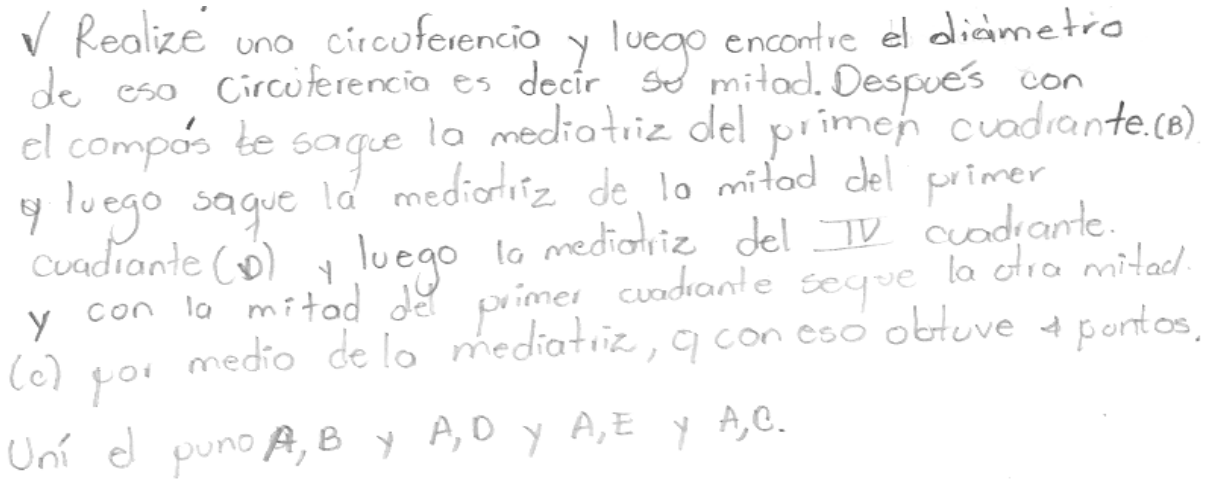
Primero se les pidió que hicieran la construcción utilizando la regla y el compás y que si lograban hacerla escribieran los pasos que siguieron para construirla.

Lo primero que la mayoría de las personas trata de hacer es tomar *AB=AC*, trazar $\overrightarrow{BC}$ y, luego, trisecar $\overrightarrow{BC}$. Esto no funciona; se puede demostrar que los ángulos $\angle BAD$ *y* $\angle EAC$ son congruentes, pero ninguno de estos ángulos es congruente con él $\angle DAE$. En realidad nadie ha encontrado un método que efectúe la construcción. Pero se analizará las construcciones o los intentos de construir este ángulo por los alumnos.

Solamente tres de los estudiantes expresaron poder realizar la construcción o al menos acercarse a la construcción que se les pedía realizando una serie de circunferencias que les permitió visualizar la construcción deseada. A continuación se muestra el intento que hizo Ángela por encontrar la trisectriz del ángulo utilizando solamente la regla y el compás:



Y esta es la descripción que ella hizo para poder hacer la construcción anterior:



Se puede observa que esta alumna al igual que las otras dos que también hicieron el intento por hacer las construcciones, aplicaron los conocimientos que han venido adquiriendo en el transcurso de este estudio y esto que han hecho es tan solo una representación de la trisección de un ángulo porque representar algo es tan solo una habilidad para comunicar o reflejar el objeto que se desea.

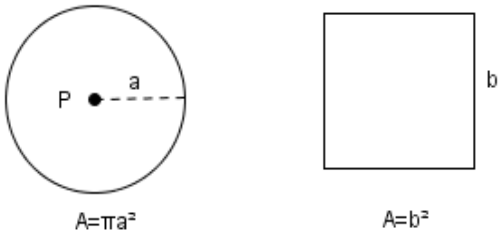
Los demás estudiantes después de varios intentos concluyeron que "no podían hacer dicha construcción, que era imposible realizarla solo con la regla y el compás ". Aquí se puede hacer notar que surge una de las situaciones de la coordinación entre la aprehensión operativa y discursiva del razonamiento como un proceso configural propuesto por Duval, que es: la coordinación no consigue ninguna solución, en este caso se denomina un proceso de bucle. Esto quiere decir que se ha llegado a un bloqueo que no permite el avance hacia la solución, y por tanto hay un estancamiento del razonamiento producido.

También se les pidió de realizaran la construcción con el programa Geogebra. Todos los estudiantes expresaron que utilizando la computadora se les facilitaba hacer el problema que se les planteaba y decidieron que mejor harían la construcción manipulando las herramientas del programa y de esa forma construir varios ángulos que se pudieran trisecar. De esa forma llegaron a la conclusión que trisecar un ángulo es dividirlo en tres partes iguales y GeoGebra ayuda en la construcción de dicho ángulo.

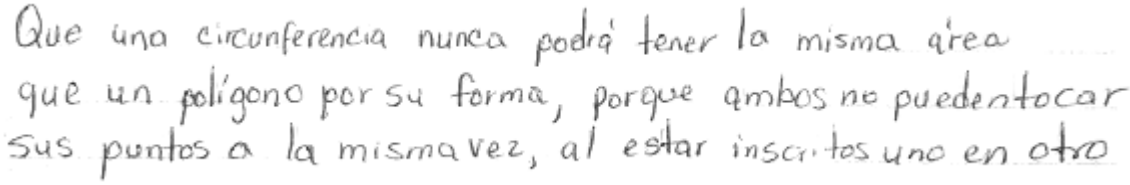
Pero este problema de la trisección de un ángulo merece algún análisis ulterior. Algunos ángulos pueden trisecarse fácilmente mediante regla y compás. Por ejemplo, el ángulo recto puede trisecarse de esa manera y esto significa que la trisección es posible para los ángulos de 45º, de $22\frac{1}{2}^{\circ}$ y muchos otros. Cuando se dice que el problema de la trisección de un ángulo es imposible, significa que hay algunos ángulos para los cuales no pueden construirse rayos trisecantes

El segundo problema se presenta a continuación:

- Dado un círculo (la reunión de una circunferencia y su interior), queremos construir un cuadrado cuya área sea igual a la del círculo.



Se les pidió a los estudiantes que hicieran esta construcción en GeoGebra y se les preguntó si era posible que un círculo pudiera tener la misma área que un cuadrado y todos ellos contestaron que no se podía, porque al momento de dibujar una circunferencia circunscrita en el cuadrado se podía observar que el cuadrado no tocaba todos los puntos de la circunferencia y al encontrar el área de cada uno de ellos también se observaba que era completamente distinta. Se les pidió que hicieran una conjetura de lo que acababan de descubrir con esta construcción, y esta es una de las respuestas dada por la alumna Irma:


Que una circunferencia nunca podrá tener la misma área que un polígono por su forma, porque ambos no puedentocar sus puntos a la mismavez, al estar inscritos uno en otro

Durante más de dos mil años, los mejores matemáticos trataron de resolver estos problemas mediante construcciones con regla y compás. Finalmente, se descubrió en tiempos recientes que estos problemas son imposibles de resolver con solo regla y compás. Imposibilidad en matemática no significa lo mismo que imposibilidad en la vida real y, por tanto, requiere una

explicación. Frecuentemente, cuando decimos que algo es imposible, queremos significar simplemente que es muy difícil, como encontrar una aguja en un pajar. A menudo, queremos decir que no sabemos cómo hacer algo y que dudamos de que se pueda hacer.
Pero de todo esto se puede obtener que la tecnología nos proporciona una gran ventaja, porque aunque estos problemas que son imposibles de construir, los estudiantes al momento de usar el ordenador lograron visualizar que algunas construcciones al momento de manipular las herramientas del programa, como lo apunta Milevicich & Lois (2007) nos facilita la construcción de objetos matemáticos, conjeturar hipótesis, comprobar propiedades, simular y descubrir regularidades aunque estas se consideren imposibles de construir con regla y compás.

También en estas actividades se logró desarrollar una de las habilidades visuales como lo es la constancia perceptual o constancia de forma tamaño y posición, que según Hoffer (1981), es la habilidad para reconocer que un objeto posee propiedades invariantes tales como el tamaño.

Prueba Final (Retroalimentación)

Cabe destacar que una de las particularidades que tiene el proceso enseñanza aprendizaje es la retroalimentación que se da de los contenidos enseñados en el aula de clases y la valoración de esos conocimientos adquiridos. Esta valoración se hizo de acuerdo a los objetivos que se plantearon desde el inicio de esta investigación; el desempeño de los estudiantes en el uso y manejo de las herramientas del programa GeoGebra, los procesos de comprensión, análisis, razonamiento y la aplicación de estos conocimientos en la solución de problemas.

Es importante apuntar que esta valoración no se hizo como un proceso final, sino que se efectuó en cada una de las actividades propuestas, dándoles la oportunidad a los estudiantes de participar de forma activa y así obtener los aprendizajes significativos que tanto se pretendió lograr en este estudio. De antemano se menciona que los logros alcanzados por los estudiantes fueron excelentes, tanto en la adquisición de las habilidades de visualización y razonamiento como en las habilidades de construcción que obtuvieron con el ordenador, complementos necesarios para el aprendizaje de la geometría. Y así dándole un valor importante a la enseñanza de la geometría en todos los niveles educativos como lo fundamenta Bressan et al,

(2000) que los docentes deben de convencerse del valor de enseñar geometría, y este ha sido un momento importante para estos estudiantes como futuros docentes de darse cuenta de este valor.

Las habilidades que los estudiantes adquirieron en el uso del programa GeoGebra fueron algunas de las que menciona Milevicich & Lois (op. cit.) como ser:

- Favoreció la autonomía en el aprendizaje, además de tener un mayor acercamiento a la matemática, siéndole esta más familiar
- Les facilitó la construcción de objetos matemáticos, conjeturar hipótesis, comprobar propiedades, simular y descubrir regularidades.

También se obtuvieron otras habilidades, tales como:

- Construir en forma precisa y rápida usando los componentes básicos de la geometría.
- Razonar y comprender a cerca de las relaciones geométricas entre diferentes objetos.
- Controlar el aspecto gráfico de una figura, usando simplemente el mouse.
- Ejecutar cálculos de medida.
- Manipular las figuras geométricas y observar las semejanzas y diferencias entre ellas.
- Repetir las construcciones las veces que ellos necesiten hacerlo, es decir observar los pasos que se siguieron para realizarlas.
- Hacer las conjeturas respectivas de las construcciones realizadas.

Rechimot, E. et al (2007) dice que la utilización del GeoGebra no solo es motivadora a la hora de trabajar sino que también es un disparador de procesos de resolución de problemas, elaboración de conjeturas y validación.

Esto nos conduce a reflexionar sobre la importancia del uso de la tecnología en el aula de clase como una herramienta didáctica para el desarrollo de habilidades, y cabe destacar que esta es uno de los principios para las matemáticas escolares que el NCTM propone como una herramienta fundamental en la enseñanza de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y enriquecen su aprendizaje. También el NCTM apunta que la tecnología puede ayudar a apoyar las investigaciones de los estudiantes en todas las áreas de las matemáticas y

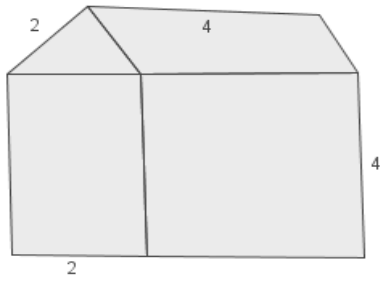
permitirles focalizar su atención en tomar decisiones, reflexionar, razonar y resolver problemas.

De igual forma las construcciones realizadas con la regla y el compás desarrollaron habilidades importantes en los estudiantes.

- Mejoraron el manejo de estos instrumentos de dibujo al momento de hacer las construcciones.
- De igual forma desarrollaron la parte del análisis, razonamiento y conjeturas en la resolución de problemas.
- Descubrieron que no se necesita una regla con medidas para hacer una construcción.
- Los resultados que se obtienen con los instrumentos reales de dibujo son solamente aproximaciones.

En cuanto a la retroalimentación de los conocimientos adquiridos sobre las construcciones geométricas, se aplicó una guía de laboratorio a manera de prueba; cuyo objetivo era reforzar los conceptos y propiedades encontradas en las construcciones geométricas, al visualizarlas con GeoGebra; la cual se analizará a continuación:

En primer lugar se les pidió que reprodujeran la figura que aparece a continuación:



Con esta figura se reforzaron los siguientes conceptos: segmento, recta, vértice, ángulo, triángulo, bisectriz de un ángulo, área de las figuras.

Se les pidió que escribieran las figuras geométricas que identificaban en la construcción y el área de cada una de ellas. Los estudiantes fácilmente describieron cada una de las figuras que observaban y con una las herramientas del programa lograron encontrar el área de dichas

figuras, seguidamente se les pidió el área total de la figura, ellos tan solamente sumaron cada una de las áreas encontradas y con ello lograron obtener el total del área.

De igual forma se les condujo a visualizar triángulos rectángulos en la figura que se les presentó, la mayoría de los estudiantes lograron hacer una correcta visualización, pero siempre existen aquellos que no lograron desarrollar del todo esta habilidad y aquí se evidencia lo que dice De Guzmán sobre los obstáculos y objeciones que en el ejercicio de la visualización se encuentra, unas veces porque la figura que se observa puede sugerir una situación que en realidad no tiene lugar. Sucede a veces que la visión engaña porque la figura concreta que se utiliza en el argumento se aproxima engañosamente a la situación que en realidad tiene lugar.
Seguidamente se les pidió que trazaran una línea recta de modo que el ángulo que se formaba en el techo de la casa se dividiera en dos partes iguales, aquí los estudiantes debían hacer uso del concepto de bisectriz, pero ciertos alumnos la confundieron con la altura de un triángulo al momento de hacer esta construcción.

La segunda actividad consistió en el planteamiento del siguiente problema:

- Construye un cuadrilátero PQRS, construido a partir de los puntos medios de un cuadrilátero ABCD. En donde el área del cuadrilátero PQRS es la mitad del área del cuadrilátero ABCD.

Con este problema se pretendía reforzar el Teorema de Varignon visto en una de las sesiones anteriores, además de recordar cómo utilizar la herramienta para encontrar la medida de los ángulos. Se les pidió que visualizaran la medida de los ángulos internos de cada cuadrilátero y llegaron a la conclusión de que todos los ángulos encontrados en ambos cuadriláteros son de igual medida.

La tercera actividad es la siguiente:

- Encontrar la circunferencia circunscrita de un hexágono

El objetivo propuesto en esta situación era reforzar las características que posee un hexágono regular. A continuación se presenta la respuesta de una de las alumnas:

- Todos sus lados son iguales y tienen la misma medida
- Todos sus ángulos internos y externos son iguales.
- Tiene 4 lados, es un polígono, Paralelogramo Cuadrilátero!!

Con esta actividad se reforzaron los conceptos de: segmentos, vértices, ángulos internos, ángulos externos, cuadriláteros, paralelogramos, polígonos, cuando una circunferencia se encuentra inscrita y cuando se encuentra circunscrita.

Los estudiantes llegaron a cada una de las conclusiones con los conocimientos previos que obtuvieron en el transcurso de la investigación, mostrándose motivados y participando de una manera activa, ya que sentían que habían obtenido conocimientos significativos en todo el tiempo que se había invertido en estas sesiones de trabajo, dándole mucho crédito a la tecnología como una herramienta útil en el aprendizaje de la geometría. Dándole crédito a De Guzmán cuando habla de que se dispone de un instrumento que es extraordinariamente potente, el ordenador, y la presencia de tales instrumentos en el aula habrá de modificar muy sustancialmente nuestra enseñanza, este nos ayudará a desarrollar la visualización y aprendizaje de una geometría dinámica.

El último problema consistió en lo siguiente:

- ¿Qué altura hay del suelo a la ventana si la escalera tiene una longitud de 5 metros y se apoya en el suelo a 2 metros de la pared?

Con este problema se pretendía que los alumnos construyeran un triángulo rectángulo y aplicaran ya sea el Teorema de Pitágoras o con la construcción hecha en GeoGebra para encontrar la solución al problema haciendo uso de las etapas que menciona Polya al momento de resolver una situación problemática.

Algunos alumnos hicieron uso de este Teorema, manipulando de esta forma la ventana algebraica y la zona gráfica del programa, de esta manera llegaron a solución deseada. Otros solamente hicieron la construcción en el programa, haciendo dos rectas perpendiculares y así construir un triángulo rectángulo con las medidas que se les proporcionaba asemejando la construcción con el dibujo que se les planteó. GeoGebra les permitió encontrar la altura del suelo a la ventana solamente haciendo uso de la visualización y el razonamiento para encontrar la solución al problema planteado.

En base a los resultados alcanzados y expuestos anteriormente, se concluye que todos los objetivos planteados en las guías de laboratorio y las actividades de representación con regla y compás se lograron satisfactoriamente, puesto que los estudiantes trabajaron con libertad y dinamismo, construyendo así su propio conocimiento con ayuda de herramientas didácticas útiles para obtener el nivel apropiado de conocimientos y la resolución de problemas matemáticos y geométricos.

C A P I T U L O 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 CONCLUSIONES

1. Los resultados muestran que los estudiantes presentan cierta dificultad para utilizar un razonamiento adecuado, y esto se evidencia en lo siguiente:

- En algunos momentos no podían comunicar o explicar lo que descubrían en cada uno de los problemas planteados o en las construcciones que realizaban.
- En algunas ocasiones no llevaban un seguimiento adecuado de los argumentos y conjeturas que se les sugería en las construcciones.
- No estaban acostumbrados a confrontarse con situaciones o problemas en un contexto geométrico, y esto los conducía a equivocarse en el razonamiento que creían hacer.

2. A la vez, los resultados también evidencian que los alumnos al finalizar la investigación lograron adquirir las principales funciones del razonamiento:

- **Entender** que es lo que se planteaba en cada situación problemática.
- **Explicar** con orden y método esa situación planteada.
- **Convencerse** de lo que se le ha planteado y como ha llegado a obtener dicha solución.

3. El desempeño de los estudiantes de educación magisterial en cada una de las sesiones de trabajo utilizando el software GeoGebra, constituyen evidencia suficiente para afirmar que ellos lograron desarrollar las siguientes habilidades visuales:

- La captación de representaciones visuales externas, en donde aprendieron a leer, comprender e interpretar estas representaciones visuales y el vocabulario adecuado en trabajos geométricos.
- La coordinación visomotora que es la habilidad para coordinar la visión con el movimiento del cuerpo, en este caso lograron reproducir una figura o un objeto presente con la mano o con el mouse de la computadora.

- La constancia perceptual o constancia de forma tamaño y posición que es la habilidad para reconocer que un objeto posee propiedades invariantes tales como el tamaño, textura, forma o posición.
- La discriminación visual en donde distinguieron similitudes y diferencias entre objetos, dibujos o imágenes mentales entre sí.
- La memoria visual que les sirve para recordar con exactitud un objeto que no permanece a la vista y relacionar sus características con otros objetos presentes o no.

4. Los estudiantes de educación magisterial lograron desarrollar habilidades para la creación y procesamiento de imágenes visuales debido a la comprensión que adquirieron para manipular y analizar imágenes mentales y transformar conceptos, relaciones e imágenes mentales en otra clase de información, a través de representaciones visuales externas.

5. La resolución de problemas fue una estrategia efectiva y adecuada para desarrollar cada una de las habilidades que se pretendía con cada una las guías de trabajo y de laboratorio; y será de igual forma siempre y cuando la selección de ellos sea adecuada y oportuna para generar aprendizajes significativos.

6. El uso de la tecnología resultó ser una herramienta fructífera para el desarrollo de la visualización y el razonamiento, la cual permitió generar en cada una de las sesiones de trabajo un ambiente agradable, conduciendo de esta forma un aprendizaje más dinámico en la geometría y en la resolución de problemas y así lograr los objetivos planteados.

7. La utilización del GeoGebra presenta distintas potencialidades que favorecen el proceso enseñanza aprendizaje, debido a que los estudiantes pueden realizar fácilmente las construcciones geométricas utilizando un lenguaje apropiado y muy próximo a las construcciones que se hacen con lápiz y papel, de igual forma minimiza el tiempo de trabajo que se le puede dar a una construcción geométrica.

8. La tecnología también presentó ciertas desventajas, las cuales conducían al estudiante a mecanizarse y no querer hacer uso de otras representaciones para la solución de los problemas que se les planteaba; debido a esto, se trabajó con otras guías utilizando regla y compás en donde el estudiante desde allí también podía desarrollar la visualización y el razonamiento, observando que existen diversas formas de obtener aprendizajes significativos.

9. Los estudiantes de educación magisterial podrán hacer uso efectivo del aprendizaje obtenido en esta investigación, ya que ellos son los futuros docentes del país, y por tanto aplicarán una nueva tendencia didáctica en su práctica profesional.

5.2 RECOMENDACIONES

1. La visualización y el razonamiento es un proceso que debe de ser desarrollado y practicado desde la educación pre escolar, se debe dar a conocer, en especial a los estudiantes de educación magisterial, ya que ellos serán los encargados en un futuro próximo de llevar a cabo este proceso de visualización que está siendo tanta falta para mejorar la educación matemática.

2. Se debe promover la visualización entre los estudiantes a través de guías atractivas en donde se vea una matemática dinámica, como una herramienta bastante útil en la resolución de problemas, ya que genera habilidades que conducen a hacer diferentes representaciones geométricas.

3. Se debe hacer conciencia en los docentes que la tecnología es una herramienta para el aprendizaje de la geometría y que también se puede hacer uso de ella para apoyar las investigaciones de los estudiantes en todas las áreas de las matemáticas y permitirles focalizar su atención en tomar decisiones, reflexionar, razonar y resolver problemas.

4. La geometría será más útil y mejor aprendida si utilizamos una metodología participativa y dinámica, de esta forma se obtendrán mejores resultados en su enseñanza.

5. A la par de la tecnología se debe también trabajar con lápiz y papel, haciendo uso de los instrumentos de dibujo y medida habituales (regla y compás) para el trazado y medida de elementos geométricos y así poder evitar una dependencia del computador.

6. Los diagramas deben ser elaborados de tal forma que tengan los elementos necesarios para que los alumnos puedan llegar a las conclusiones o construir el conocimiento deseado y que no sean un obstáculo.

7. Se debe aprovechar el software para:

- Construir conocimiento
- Generar conocimientos más profundos como lo recomienda Hitt y otros autores.

B I B L I O G R A F Í A

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Acosta, J. (2007). Retos y Desafíos ante las puertas de la Tecnología & Milevicich, L. / Lois, A. (2007). El ordenador como Recurso Didáctico en la Resolución de Problemas. Acta latinoamericana de matemática educativa. Clame, Volumen 20, año 2007, páginas 611-616 & 641-646. www.clame.org.mx

- Barrera, C. (2006). Evaluación de los Niveles de Razonamiento geométrico en Estudiantes de la Licenciatura en Educación Integral. Divulgaciones Matemáticas. Vol. 14 Nº 2. Pp. 141-151.

- Boyer, (1968). Carl B. Libro de Historia de la Matemática. Brooklyn, New York,

- Bressan, A., Bogisic, B. & Crego, K. (2000) *Razones para enseñar Geometría en la Educación Básica. Mirar, construir, decir y pensar.* Novedades Educativas. 3ra Edición.

- Cantoral, R. & Montiel, G. (2001 - 2002). Propuesta Didáctica, *Visualización y Pensamiento Matemático.* Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de estudios Avanzados del IPN, México.

- Castañeda, F. (2004). *Conferencia sobre Visualización y Matemáticas.* Universidad del País Vasco.

- De Guzmán, M. (1997). *El rincón de la pizarra: Ensayos de visualización en el análisis matemático. Elementos básicos del análisis.* Colección "Ciencia Hoy". Ediciones Pirámide, S.A. Madrid, España.

- Duval, R. (1993). Representación y comprensión en la investigación en Didáctica de la matemática. Semiosis y Noesis; extraido el 15 de agosto del 2009, de www.pna.es/Numeros2/pdf//Rico2009Sobre.pdf

- Duval, R. (1998). *Semiosis y pensamiento humano. Traducción.* Santiago de Cali, Colombia: Grupo de Educación Matemática de la Universidad del Valle.

- Duval, R. (1999a). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de la matemáticas y las formas superiores de desarrollo cognitivo.* Curso del Doctorado en Educación con énfasis en Educación Matemática, Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.

- Duval, R. (1999b). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática.

- Espinosa, M. E. (S/F). *Los sistemas de representaciones en la solución de problemas de álgebra elemental.* Instituto Tecnológico de Minatitlan: Recuperado el 08 de Agosto de 2009, http://www.alammi.info/revista/número2/pon-0009.Pdf

- Gamboa, R. (2007). Uso de la Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas. Cuadernos de Investigación y Formación en educación Matemática, Año 2, Nº 3. pp. 11-44.

- Germán Torregrosa / Humberto Quesada (2007). *Coordinación de Procesos Cognitivos en Geometría.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática educativa, vol. 10, numero 002

- Gutiérrez, A. & Jaime, A. (S/A) Uso de definiciones e Imágenes de Conceptos Geométricos por los Estudiantes de Magisterio. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia.

- Gutiérrez, A. (1991). *Procesos y Habilidades en Visualización Espacial.* Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia (España). Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación en Educación Matemática.

- Gutiérrez, A. (2005): Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica, en Maz, A.; Gómez, B.; Torralbo, M. (eds.), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, pp. 27-44

- Hernández, S. (2006). Metodología de la Investigación. Cuarta Edición.

- Hershkowitz, R. (2001). *Acerca del Razonamiento en Geometría*. Traducción: Hernández, Víctor y Villalba, Martha. PMME-UNISON. [En linea]. Disponible en http://www.euclides.org/menu/articles/article104.htm

- Hitt, F. (2003). *Una Reflexión sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnologías.* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, Nº 2.

- Hitt, F. (2000). Construction of Mathematical Concepts and Use of Symbolic Calculators. The 4th International DERIVE-TI89/92 Conference: Computer Algebra in Mathematics Education. Liverpool, United Kingdom, July, 2000. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-Ipn, México.

- Instituto Nacional de Investigación y Capacitación educativa (2008). Plan de Estudios de la Carrera de Educación Magisterial, 2008. Honduras.

- Moise, E. & Dows, F. (1966). Geometría Moderna. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana. 1ra Edición en Español.

- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000). Principios y Estándares para la Educación Matemática.

- Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales, (2004). Proyecto: Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. Primera Edición.

- Polya, G. (1987). Cómo Plantear y Resolver Problemas. Decimocuarta reimpresión, Editorial Trillas. México.

- Rechimont, E. et.al. (2007). *GeoGebra en la resolución de un problema.* V Congreso sobre Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora. ITCR. Costa Rica.

- Rico, L., Castro, E., & Romero, I. (S/F). *Sistemas de Representación y Aprendizaje de Estructuras Numéricas.* Recuperado el 18 de Octubre de 2009, de Departamento Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada España: http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/Ricool00-39. PDF

- Sacristán, R. (1998-2002). *Representaciones y Visualización Matemática.* América del Norte Capitulo del Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática/Cinvestav-IPN, México.

- Salinas, J. & Sánchez, E. (2007). Identificación de Propiedades y Relaciones en un Ambiente de Geometría Dinámica. pp. 343-353. Investigación en Educación Matemática XI.

- Síntesis realizadas por las Prof. Angélica E. Astorga y Estela S. Aliendro. (Septiembre 2005) *La enseñanza de la geometría en la escuela primaria de René Berthelot y Marie Hélene Salim*. Laboratorio de Didáctica de las Ciencia y Técnica de la Universidad de Bordeaux I de Aquitania.

- Vara Orozco, Manuel. (1996-2003). Licenciado en Matemáticas y Maestro en Planeación Educativa en su *artículo sobre el Geoespacio, un recurso para la enseñanza de la geometría*.