UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
VICE-RECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
DIRECCIÓN DE POSTGRADO

DOCTORADO EN EDUCACIÓN

Teoría de plausibilidad: generalización de la lógica de plausibilidad y su vinculación a la decisión racional

TESIS SOMETIDA A LA CONSIDERACIÓN DEL PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN EDUCACIÓN

Manuel Rodríguez Domínguez

Tegucigalpa M. D. C., junio 2009

Esta tesis fue aceptada y aprobada por el tribunal nombrado por la dirección de estudios de postgrado de la upnfm a petición del comité académico del doctorado en educación, como requisito para optar al grado de doctor en educación. En Tegucigalpa, a los doce días del mes de junio del año dos mil nueve.

Dra. Jenny Zelaya
Directora de Postgrado de la UPNFM

Dr. German Vargas Guillén
Director de tesis

Dr. Ramón Romero Cantarero
Lector de tesis

Dr. Renán Rápalo Castellanos
Lector de tesis

Dra. Yanet Ondina Amaya
Representante del Comité Académico del Doctorado en Educación

Manuel Rodríguez Domínguez
Candidato

Agredecimientos

Que haya continuado investigando sobre la teoría de plausibilidad se lo debo al Dr. Germán Vargas Guillén, director de esta Tesis Doctoral, quien tanto me ha motivado para llevar a cabo este estudio; le agradezco su confianza, amistad y apoyo, así como sus sugerencias tan oportunas y puntuales, claves en esta investigación.

A las Autoridades por contar la UPNFM con este Programa de Doctorado en Educación; de un modo especial al Coordinador Académico del Programa, Dr. Oscar Soriano. Así mismo, hago extensivos estos agradecimientos a todas las personas que han colaborado con el Programa.

Mi mayor gratitud y más sincero cariño a mi familia por su incondicional amor, apoyo, sacrificio y comprensión.

A la memoria de mi padre, Ramón,
y a toda mi familia.

La lógica bivalente se enjuicia como de máxima idealización. . . en tanto que se mantiene que la lógica «concreta» eventual sería esencialmente polivalente.

M.L. Dalla (1976:104)

He estado siempre sumamente interesado en el tema del determinismo e indeterminismo; lo he asociado con el problema de las lógicas polivalentes.

J. Lukasiewicz (1975f:120)

Si puede resolverse de dos modos es porque entra en juego la decisión. A ésta se opone la determinación.

Vargas y Cárdenas (2005:91)

Índice general

1. Introducción..... 1
2. Teoría de plausibilidad y decisión racional: fundamentos teóricos y el problema de investigación……..... 4
2.1 Antecedentes teóricos de la teoría de plausibilidad..... 4
2.1.1 Lógica de primer orden..... 4
2.1.2 Lógica polivalente..... 18
2.1.3 Lógica no-monotónica..... 23
2.2 Antecedentes de la decisión racional..... 25
2.3 La decisión racional en la Teoría de la justicia de Rawls..... 31
2.3.1 Los principios de la justicia..... 32
2.3.2 La posición original..... 33
2.3.3 La decisión racional a favor de los dos principios de justicia..... 35
2.3.4 Sobre la estructura lógica de la decisión racional en la Teoría de la justicia de Rawls..... 36
2.4 La argumentación en la decisión racional…… 38
2.4.1 Inclusión del otro..... 41
2.4.2 De la lógica de exclusión a la lógica de inclusión..... 44
2.4.3 Sobre la pedagogía como formación…… 45
2.5 Teoría de plausibilidad: la lógica de plausibilidad..... 47
2.6 La lógica de plausibilidad..... 51
2.7 Tres nuevos teoremas de la lógica de plausibilidad..... 56
2.8 Interés de desarrollar la teoría de plausibilidad…..... 60
2.8.1 Aplicación de la teoría de plausibilidad en la fundamentación de software educativo colaborativo y su impacto en educación……..... 60
2.8.2 Interés de aumentar la polivalencia de la lógica de plausibilidad.....…..…… 62
2.9 Problema de investigación..... 64

2.9.1 Objetivo general..... 66
2.9.2 Objetivos específicos..... 66
2.9.3 Preguntas de investigación..... 66
2.9.4 Metodología..... 67
3. Lógica de plausibilidad generalizada..... 68
3.1 Estados de plausibilidad de la lógica de plausibilidad generalizada..... 69
3.2 Justificación de la representación de la polivalencia mediante P_{2n}..... 69
3.3 Funciones de representación de la evidencia en la lógica de plausibilidad generalizada..... 70
3.3.1 Justificación de la representación de la evidencia a través de las funciones ec, ef, ecs_{2n} y efs_{2n}..... 71
3.3.2 Cotas y condiciones necesarias (o suficientes) tanto entre ec y ecs_{2n} como entre ef y efs_{2n}..... 72
3.4 Función de representación de la plausibilidad en la lógica de plausibilidad generalizada..... 73
3.5 Justificación de la representación de la plausibilidad mediante la función cal_{2n}..... 73
3.6 Regiones de plausibilidad en la lógica de plausibilidad generalizada..... 76
3.6.1 Regiones de plausibilidad simétricas..... 83
3.6.2 Condiciones necesarias y suficientes de la función cal_{2n}..... 85
3.6.3 Justificación de la representación de las regiones de plausibilidad mediante S_0^{2n}, S_1^{2n} y S_2^{2n} 93
3.7 Propiedades de plausibilidad entre afirmaciones en términos de orden..... 94
3.8 Lemas sobre números reales..... 105
3.8.1 Cinco lemas sobre números reales..... 104
3.8.2 Un lema más sobre números reales..... 105
3.9 Propiedades en términos de las funciones ec, ecs_{2n}, efs_{2n} y cal_{2n} a partir de los lemas sobre números reales..... 106

3.9.1 Propiedades en términos de ec..... 106
3.9.2 Propiedades en términos de ecs_{2n}..... 109
3.9.3 Propiedades en términos de efs_{2n}..... 110
3.9.4 Propiedades en términos de cal_{2n}..... 112
3.10 Conectivos lógicos en la lógica de plausibilidad generalizada..... 114
3.11 Evidencia y plausibilidad funcionales en la lógica de plausibilidad generalizada..... 114
3.12 Axiomas de la lógica de plausibilidad generalizada..... 115
3.13 Justificación de los axiomas de la lógica de plausibilidad generalizada..... 117
3.14 Una consecuencia del axioma AE6..... 118
3.15 Propiedades al nivel de evidencia de los conectivos en la lógica de plausibilidad generalizada..... 119
3.15.1 Propiedades al nivel de evidencia de $\neg$ en la lógica de plausibilidad generalizada..... 120
3.15.2 Caracterización mediante la evidencia de $\vee$ en la lógica de plausibilidad generalizada..... 124
3.15.3 Propiedades al nivel de evidencia de $\wedge$ y $\vee$ en la lógica de plausibilidad generalizada..... 125
3.15.4 Caracterización mediante la evidencia de $\rightarrow$ en la lógica de plausibilidad generalizada..... 139
3.15.5 Propiedades al nivel de evidencia de $\rightarrow$ en la lógica de plausibilidad generalizada..... 140
3.15.6 Caracterización mediante la evidencia de $\leftrightarrow$ en la lógica de plausibilidad generalizada..... 141
3.15.7 Propiedades al nivel de evidencia de $\leftrightarrow$ en la lógica de plausibilidad generalizada..... 141
3.15.8 Cuantificación al nivel de evidencia en la lógica de plausibilidad generalizada..... 143

3.15.9 Relaciones entre conectivos mediante la función cal_{2n}..... 144
3.16 Caracterización al nivel de plausibilidad de los conectivos de la lógica de plausibilidad generalizada..... 146
3.16.1 Caracterización mediante la plausibilidad de $\neg$ en la lógica de plausibilidad generalizada..... 146
3.16.2 Caracterización mediante la plausibilidad de $\wedge$ en la lógica de plausibilidad generalizada..... 147
3.16.3 Caracterización mediante la plausibilidad de $\vee$ en la lógica de plausibilidad generalizada..... 150
3.16.4 Caracterización mediante la plausibilidad de $\rightarrow$ en la lógica de plausibilidad generalizada..... 153
3.16.5 Caracterización mediante la plausibilidad de $\leftrightarrow$ en la lógica de plausibilidad generalizada..... 153
3.16.6 Teorema fundamental de plausibilidad de la lógica de plausibilidad generalizada..... 154
3.17 Propiedades al nivel de plausibilidad de los conectivos en la lógica de plausibilidad generalizada..... 154
3.17.1 Propiedades al nivel de plausibilidad de $\neg$ en la lógica de plausibilidad generalizada..... 154
3.17.2 Propiedades al nivel de plausibilidad de $\wedge$ y $\vee$ en la lógica de plausibilidad generalizada..... 158
3.17.3 Propiedades al nivel de plausibilidad de $\rightarrow$ en la lógica de plausibilidad generalizada..... 162
3.17.4 Propiedades al nivel de plausibilidad de $\leftrightarrow$ en la lógica de plausibilidad generalizada..... 163
3.17.5 Cuantificación al nivel de plausibilidad en la lógica de plausibilidad generalizada..... 163
3.18 Equivalencia en la lógica de plausibilidad generalizada..... 164

3.18.1 Leyes de De Morgan..... 166
3.18.2 Propiedades de implicación y coimplicación..... 166
3.18.3 Propiedad de doble negación..... 167
3.18.4 Propiedades de equivalencia de $\wedge$ y $\vee$..... 167
3.18.5 Propiedad de transposición de $\rightarrow$..... 168
3.18.6 Propiedades de equivalencia de $\leftrightarrow$..... 169
3.18.7 Teorema de remplazamiento..... 169
3.18.8 Propiedades de equivalencia de $\forall$ y de $\exists$..... 170
3.19 Alcance de la lógica de plausibilidad generalizada..... 170
3.20 Tablas de plausibilidad de las lógicas LP_4 y LP_6..... 174
3.21 Sobre la lógica de plausibilidad generalizada como formalización de la decisión racional……..... 178
3.21.1 Relación entre la lógica de plausibilidad generalizada y la decisión racional…..... 178
3.21.2 La lógica de plausibilidad generalizada como lógica de inclusión……..... 182
4. Conclusiones..... 184
5. Bibliografía..... 188
Apéndice A..... 202
Apéndice B..... 205
Apéndice C..... 228
Apéndice D..... 231

Resumen de informe de investigación
(Tesis Doctoral)

Título: Teoría de plausibilidad: generalización de la lógica de plausibilidad y su vinculación a la decisión racional

Tesis de Doctorado en Educación, Tegucigalpa, Honduras

Sustentante: M. Rodríguez Domínguez, 2009

Número de páginas:248

Resumen. La teoría de plausibilidad fue creada por Ulises Agüero, en 1987, como una propuesta para la formalización del proceso de diseño de arquitectura de computadoras, aunque está siendo aplicada en la toma de decisiones en grupo. Explica la aceptabilidad de una decisión a través de la plausibilidad de las afirmaciones que la caracterizan.

Para determinar la plausibilidad de una decisión, la teoría de plausibilidad cuenta con la lógica de plausibilidad, que a partir de su formalización en 1999, por Manuel Rodríguez, es una lógica proposicional pentavalente veritativo-funcional que apoya razonamientos no monotónicos; porque, los razonamientos asociados a la teoría de plausibilidad son de naturaleza no monotónica, debido a que sucesivas reconsideraciones de una decisión pueden llevar a cambios en la evidencia de las afirmaciones que la determinan y, por consiguiente, en su estado de plausibilidad.

A partir de la teoría de plausibilidad se generaliza la lógica de plausibilidad a nivel de polivalencia; se redefinen los estados de plausibilidad a través del conjunto $P_{2n}=\{0, 1, ..., 2n\}$, conjunto de estados de plausibilidad. La representación funcional de la evidencia, mediante las funciones numéricas ec y ef; con base en las funciones ec de la evidencia en contra y ef de la

evidencia a favor, se definen las funciones numéricas ecs_{2n} y efs_{2n}, de la evidencia en contra significativa y la evidencia a favor significativa, para representar el grado de evidencia en contra y a favor, respectivamente. Mientras que, la plausibilidad de una afirmación, a partir de la evidencia, viene dada por la función cal_{2n}.

Al contar con esta representación funcional de la evidencia y la plausibilidad, se establecen los axiomas de la lógica de plausibilidad generalizada, que fundamentan, esencialmente, los conectivos lógicos en función de la evidencia, respetando los axiomas de la lógica de plausibilidad, en el sentido que ésta es un caso particular de aquélla. A partir de los axiomas, se caracterizan los conectivos al nivel de plausibilidad, quedando así construida la lógica de plausibilidad generalizada.

En la lógica de plausibilidad generalizada, se demuestra una serie de teoremas que se cumplen también en la lógica clásica; como son, al nivel de equivalencia lógica, las leyes de De Morgan y el teorema de remplazamiento, entre otras. Al determinar su alcance, se prueba que es una lógica de inclusión constituida por una familia infinita de lógicas polivalentes. Finalmente, se determina su vinculación con la decisión racional: se fundamenta en ésta y apoya decisiones racionales.

Como conclusiones cabe destacar las siguientes:

La lógica de plausibilidad generalizada constituye la formalización de la decisión racional; así, el haber construido la lógica de plausibilidad generalizada y establecido su vinculación con la decisión racional, supone alcanzar un objetivo importante al nivel pedagógico, pues, aportar a la decisión racional es aportar a la pedagogía como formación.

La lógica de plausibilidad generalizada es una familia infinita numerable de lógicas polivalentes finitas, $\left\{LP_{2n}\right\}_{n=2}^{\infty}$, donde la lógica de plausibilidad es una entre esa cantidad infinita de lógicas.

La lógica de plausibilidad generalizada es una lógica de inclusión formada por una familia infinita de lógicas polivalentes que apoya razonamientos no monotónicos.

Seis axiomas fundamentan la lógica de plausibilidad generalizada, al nivel de evidencia, formulados en términos de las funciones ec, ef, ecs_{2n}, efs_{2n} y cal_{2n}; y son, esencialmente, una generalización de los axiomas de la lógica de plausibilidad.

Establecida la polivalencia, la lógica de plausibilidad generalizada está determinada por la caracterización de los conectivos al nivel de plausibilidad, mediante el teorema fundamental de plausibilidad. Éste es uno de los resultados más importantes, porque permite calcular mecánicamente la plausibilidad funcional.

El desarrollo de la lógica de plausibilidad generalizada lo constituyen 12 definiciones, 6 axiomas y 241 propiedades; éstas últimas organizadas en 91 teoremas y 6 lemas. Este número considerable de propiedades, descubiertas y demostradas, de la lógica de plausibilidad generalizada, muestra el nivel de desarrollo alcanzado en esta investigación; particularmente, si tenemos en cuenta que las propiedades de la lógica de plausibilidad generalizada, como lógica polivalente, también lo son de la lógica bivalente. Además, por la naturaleza de la investigación, se pone énfasis en la demostración: las demostraciones se ajustan a cierta estructura, con las justificaciones correspondientes, proporcionando rigor, claridad y, como no, elegancia.

Palabras clave. Teoría de plausibilidad, lógica de plausibilidad, lógica de plausibilidad generalizada, lógica polivalente, lógica de inclusión, razonamiento no monotónico, lógica no-monotónica, lógica de primer orden, decisión racional.

Director de Tesis: Dr. Germán Vargas Guillén

Unidad Académica: Dirección de Postgrado, Doctorado en Educación

1. Introducción

La teoría de plausibilidad fue creada por Ulises Agüero, en 1987, como una propuesta para la formalización del proceso de diseño de arquitectura de computadoras, aunque está siendo aplicada en la toma de decisiones en grupo. Explica la aceptabilidad de una decisión a través de la plausibilidad de las afirmaciones que la caracterizan.

Para determinar la plausibilidad de una decisión, la teoría de plausibilidad cuenta con la lógica de plausibilidad, que a partir de su formalización en 1999, por Manuel Rodríguez, es una lógica proposicional pentavalente veritativo-funcional que apoya razonamientos no monotónicos. Esto último se debe a que los razonamientos asociados a la teoría de plausibilidad son de naturaleza no monotónica, porque las sucesivas reconsideraciones de una decisión pueden llevar a cambios en su estado de plausibilidad.

Previo a la formulación del problema de investigación, se proporcionan los fundamentos teóricos, organizados en el capítulo 2. Se inicia con los antecedentes teóricos de la teoría de plausibilidad: lógica de primer orden, lógica polivalente y lógica no-monotónica. Se continúa con los antecedentes de la decisión racional, la decisión racional en la Teoría de la justicia de Rawls y la argumentación en la decisión racional. Después de una breve presentación de la teoría de plausibilidad y de señalar los elementos fundamentales de la lógica de plausibilidad, se demuestran tres nuevos teoremas de la lógica de plausibilidad.

Sobre la aplicación de la teoría de plausibilidad, para mostrar la importancia de esta teoría y su impacto en educación, se destaca la fundamentación de software educativo colaborativo, cuya característica fundamental es la toma de decisiones en grupo, a través de la teoría de plausibilidad, que cumple condiciones impuestas por la decisión racional. Y por ende, la necesidad de desarrollar la teoría de plausibilidad. En este sentido, se señala el interés de generalizar la lógica de plausibilidad con respecto a la polivalencia, y de relacionarla con la decisión racional, llegando así al problema de investigación: ¿Cómo generalizar la lógica de

plausibilidad al nivel de polivalencia y cómo vincularla a la decisión racional? Que, de acuerdo a los objetivos de la investigación, supone redefinir los estados de plausibilidad, para aumentar su polivalencia, y fundamentarla axiomáticamente y desarrollarla, esto es, la construcción de la lógica de plausibilidad generalizada, para después vincularla con la decisión racional, lo que constituye el capítulo 3: Lógica de plausibilidad generalizada.

La estructura de este tercer capítulo está determinada por las propias exigencias del método utilizado en dicha construcción, el método deductivo lógico-matemático; y que, en líneas generales, tal estructura obedece al orden en que están formulados los objetivos de la investigación.

Para facilitar el desarrollo deductivo de las propiedades de la lógica de plausibilidad generalizada así como su seguimiento, varias de ellas se agrupan convenientemente en un solo teorema, reduciendo así el número de éstos; a su vez, varios teoremas se agrupan bajo un mismo título, el que orienta sobre el contenido de los mismos. También la justificación de las representaciones de polivalencia, evidencia, plausibilidad, regiones de plausibilidad, así como la de los axiomas, contribuye a explicar el porqué de la introducción de tales elementos. Las demostraciones se ajustan a cierta estructura, con las justificaciones correspondientes, proporcionando rigor, claridad y también elegancia.

Para simplificar estas últimas, las demostraciones, cada axioma, teorema, lema y definición se representan por AE, T, L y D, respectivamente, acompañadas por el número que indica su orden. Además, las demostraciones se desarrollan rigurosamente, lo que garantiza que las propiedades de la lógica de plausibilidad generalizada, descubiertas en la investigación, efectivamente, sí se cumplen. Aunque la demostración de los teoremas representa una parte fundamental y difícil de la investigación, para seguir tales demostraciones, basta la familiarización con la demostración matemática y con ciertos elementos del lenguaje de teoría de conjuntos; éstos últimos recogidos en el apéndice A. Finalmente, en el capítulo 4 se

presentan las conclusiones, donde se destaca, en particular, la construcción de la lógica de plausibilidad generalizada, y que ésta se fundamenta en la decisión racional.

2. Teoría de plausibilidad y decisión racional: fundamentos teóricos y el problema de investigación

2.1 Antecedentes teóricos de la teoría de plausibilidad

2.1.1 Lógica de primer orden

Sobre la lógica de proposiciones, como parte de la lógica formal[1], Deaño (1978:51-53) considera:

> El aparato más elemental —en un doble sentido: el más simple y, al propio tiempo, el aparato básico— de la lógica formal es la lógica de enunciados o de proposiciones . . . El cálculo base, el cálculo en que se apoya y sobre el cual se construye el edificio de la lógica es *el cálculo de enunciados* . . . La tarea de la lógica es . . . el análisis formal de los razonamientos. Y el lugar de ese análisis es el lenguaje . . . El análisis del lenguaje en que se basa la lógica de proposiciones divide el lenguaje . . . en dos tipos de elementos . . . los enunciados tomados en bloque, por un lado, y, por otro lado, las conexiones entre ellos.

Cabe destacar, la lógica proposicional es la base de la lógica; además, según Deaño (1978:55-56):

> En lógica de enunciados, el contenido de los razonamientos lo constituirán esos enunciados, mientras que la forma vendrá señalada por el segundo tipo de signos, signos como 'y', 'no', 'si …, entonces …', y otros más, que sirven para poner aquellos en relación . . . Y los enunciados descriptivos . . . son siempre, o bien verdaderos o bien falsos.

En tal sentido, al simbolizar por '$\neg$', '$\wedge$', '$\vee$' y '$\rightarrow$' los juntores: la negación, conjunción, disyunción y condicional, y por 1 y 0, verdadero y falso, respectivamente. Si p y q son proposiciones, entonces la verdad de las proposiciones $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$ y $p \rightarrow q$ está determinada a través de las siguientes tablas de verdad,

[1] Según Garrido (1983:20-21): "Cabe definir la *lógica formal* como una ciencia abstracta que tiene por objeto el análisis formal de los argumentos, o también, y más concisamente, como *teoría formal de la deducción*".

p	$\neg p$
1	0
0	1

P	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Además, esto muestra que en lógica proposicional, mediante tablas de verdad, se puede determinar el valor de verdad de cualquier proposición[2] a partir de la verdad de sus partes. Precisamente, Garrido (1983:39) señala que el "objeto de la lógica de enunciados es formalizar y definir los juntores y estudiar las leyes de combinación y deducción de los cambios fundadas en tales nexos". Respecto a la formalización, Deaño (1978:118-121) afirma:

> La forma clásica de la formalización. . . es la forma axiomática. Los lenguajes formalizados toman a menudo. . . la forma de *sistemas axiomáticos*.
> Presentamos a continuación la lógica de enunciados en forma de sistema axiomático . . .
>
> A) Símbolos primitivos:
> 1. Variables proposicionales: $p, q, r, s, t, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, \ldots, p_n, q_n, r_n, s_n, t_n$.
> 2. Conectivas o funtores de enunciado: $\neg$, $\vee$.
> 3. Signos de puntuación: paréntesis diversos, como '(,)', '[,]', '{, }'.
>
> B) Símbolos definidos.
> $(\wedge)\ X \wedge Y =_{Df.} \neg(\neg X \vee \neg Y)$
> $(\rightarrow)\ X \rightarrow Y =_{Df.} \neg X \vee Y$
> $(\leftrightarrow)\ X \leftrightarrow Y =_{Df.} \neg[\neg(\neg X \vee Y) \vee \neg(\neg Y \vee X)]$.
>
> C) Reglas de formación:
> FR1. Una variable proposicional sola es una expresión [fórmula] bien formada del cálculo (como abreviatura de 'expresión bien formada del cálculo' utilizaremos 'ebf').
> RF2. Si X es una ebf., entonces $\neg X$ también lo es.
> RF3. Si X e Y son ebfs., entonces $X \vee Y$ también lo es.
> RF4. Estas son todas las Reglas de Formación del cálculo.

[2] Esto significa, como se señala más adelante en esta sección 2.1.1, la lógica proposicional es decidible.

D) Axiomas:

$A_1(p \vee p) \rightarrow p$

$A_2 q \rightarrow (p \vee q)$

$A_3(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$

$A_4[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$

$A_5(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$

E) Reglas de transformación[3]:

RT1. Dada una tesis del cálculo, en la que aparecen variables de enunciado, el resultado de sustituir una, algunas o todas esas variables por fórmulas bien formadas del cálculo será también una tesis del cálculo. Y por ello con una única restricción, si bien importante: cada variable ha de ser sustituida siempre que aparece, y siempre por el mismo sustituto.

Dicho de otro modo más riguroso: si X es una tesis del sistema en la que aparecen distintas variables $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ son expresiones bien formadas del cálculo, la expresión resultante de sustituir en X p_1 por Y_1, p_2 por Y_2, . . ., p_n por Y_n será asimismo una tesis del sistema.

Se le llama a esta regla 'Regla de Sustitución'.

RT2. Si 'X' es una tesis del sistema, y lo es también la expresión '$X \rightarrow Y$', entonces 'Y' es una tesis del sistema.

Sobre los lenguajes formales, Fernández (2005b:59) considera: "Los lenguajes lógico-formales se establecen, en principio, como pura sintaxis: serán oraciones gramaticalmente correctas las que integran cierto subconjunto propio del conjunto de todas las cadenas posibles de símbolos del alfabeto o vocabulario de que se trate". Además, Dalla (1976:49-50) señala: "Los denominados lenguajes formales *elementales* constituyen una categoría de lenguajes bastante sencillos, y suficientemente ricos desde el punto de vista expresivo al propio tiempo, pudiendo expresar cualquier teoría interesante".

Respecto a la precisión del lenguaje, Lukasiewicz (1975g:130) afirma: "La precisión del pensamiento sólo puede estar garantizada por la precisión del lenguaje". Mientras que, Barceló (2005:16) señala: "Uno de los objetivos de nuestras teorías lógicas técnicas es, precisamente, determinar cuales son los elementos lógicamente relevantes de nuestro lenguaje". Según Garrido (1983:54): "En las ciencias que versan sobre lenguaje es útil distinguir entre el

[3] También conocidas como reglas de inferencia, según Tarski (1977:72): "Estas reglas . . . son instrucciones que estipulan cómo transformar proposiciones reconocidas como verdaderas en nuevas proposiciones verdaderas".

lenguaje por ellas investigado, al que se llama *lenguaje objeto*, y el lenguaje en que se desenvuelve la investigación, al que suele llamarse *metalenguaje*". Al respecto, un hecho significativo son las paradojas que implican cierta forma de autorreferencia, de acuerdo a Dalla (1976:21-22):

> La denominada «paradoja del mentiroso»: la persona que afirma «miento» provoca una contradicción al mentir si y sólo si dice la verdad. Atribuida a Eubúlides de Mileto (perteneciente a la escuela megárica) . . . una solución definitiva sólo se propondría en nuestro siglo [s. XX] a través de la *formalización* de los lenguajes: mediante una rigurosa distinción entre los diversos niveles lingüísticos (el *lenguaje-objeto* y el *metalenguaje*).

Una antinomia análoga a la del mentiroso aparece en Whitehead y Russell (1963:60), hoy conocida como paradoja de Russell:

> Sea *w* la clase de todas aquellas clases que no son miembros de ellas mismas. Entonces, cada clase *x* puede ser, "*x* pertenece a *w"* es equivalente a "*x* no pertenece a *x"*. Sin embargo, dando a *x* el valor *w*, "*w* pertenece a *w"* es equivalente a "*w* no pertenece a *w"*. (Traducción libre)[4]

Frente a la presentación axiomática de la lógica, surge una alternativa. En este sentido, Deaño (1978:152) señala:

> Por lo que se refiere a la lógica contemporánea, puede decirse que desde Frege hasta 1934 y sin duda como consecuencia del influjo de la matemática, se impuso la presentación axiomática de la lógica . . . Es en 1934 cuando Gentzen y Jaskowski presentan, por separado, lo que Gentzen llama «un sistema de inferencia natural» . . . el sistema de Gentzen se basaba, para la lógica de enunciados, en ocho reglas.

Sobres las reglas de deducción natural[5], Braüner (2005:174) afirma: "Los sistemas de deducción natural están caracterizados por tener dos tipos diferentes de reglas . . . existen un

---

[4] Let *w* be the class of all those classes which are not members of themselves. Then, whatever class x may be, "x is a w" is equivalent to "x is not an x." Hence, giving to x the value w, "w is a w" is equivalent to "w is not a w".
[5] Según Marraund (1999:111): "El nombre «deducción natural» responde a la intención de Gentzen de capturar la lógica practicada por los matemáticos, en oposición a la lógica axiomática de la matemática".

tipo de regla que introduce un conectivo y existe un tipo de regla que elimina un conectivo" (traducción libre)[6]. En lógica proposicional, Garrido (1983:84) considera las siguientes reglas:

REGLAS DE INTRODUCCIÓN — REGLAS DE ELIMINACIÓN

IMPLICADOR

II

$$\frac{\begin{array}{l}\mid A \\ \mid \vdots \\ \mid B\end{array}}{A \to B}$$

EI

$$\frac{\begin{array}{l}A \to B \\ A\end{array}}{B}$$

CONJUNTOR

IC

$$\frac{\begin{array}{l}A \\ B\end{array}}{A \wedge B}$$

EC$_1$

$$\frac{A \wedge B}{A}$$

EC$_2$

$$\frac{A \wedge B}{B}$$

DISYUNTOR

ID$_1$

$$\frac{A}{A \vee B}$$

ID$_2$

$$\frac{B}{A \vee B}$$

ED

$$\frac{\begin{array}{l}A \vee B \\ \begin{array}{|l} A \\ \vdots \\ C \end{array} \\ \begin{array}{|l} B \\ \vdots \\ C \end{array}\end{array}}{C}$$

NEGADOR

IN

$$\frac{\begin{array}{|l} A \\ \vdots \\ B \wedge \neg B \end{array}}{\neg A}$$

EN

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

Sobre la deducción natural, Palau (2001:9) afirma:

[6] Natural deduction systems are characterized by having two different kinds of rules . . . there is a kind of rule that introduces a connective and there is a kind of rule that eliminates a connective.

> En la actualidad se coincide en aceptar a la forma de presentación de Gentzen como la que más refleja los aspectos inferenciales de los sistemas lógicos, y por lo tanto considerar al cálculo de deducción natural como la presentación más apropiada para una versión inferencial de la lógica.

No obstante, según Deaño (1978:167): "Se exponga como sistema axiomático o como cálculo de deducción natural, la lógica de enunciados es la misma . . . su poder de análisis formal de la validez de las inferencias entre enunciados sin analizar tendrá siempre el mismo alcance". Aunque, según Deaño (1975b:13):

> La lógica formal, al nivel de lógica de enunciados, sólo puede analizar formalmente de manera acabada aquellos razonamientos en cuya validez no desempeñan ningún papel la estructura interna de las proposiciones que la componen.
> Y, sin embargo, hay razonamientos que, siendo formalmente válidos, no lo son simplemente en virtud de las puras conexiones externas entre los enunciados a partir de los cuales están construidos.[7]

Un ejemplo de este tipo de razonamientos aparece en Copi (1987:87):

> Todos los humanos son mortales.
> Sócrates es humano.
> Por lo tanto, Sócrates es mortal.

En tal sentido, la lógica proposicional no agota la lógica formal. Según Deaño (1975b:13): "Es preciso ir más allá: penetrar en la estructura interna de los enunciados, en busca de los elementos relevantes para la validez de la inferencia en cuestión". Al respecto, Deaño (1975b:16-17) afirma:

> Hay, fundamentalmente dos cosas. De una parte, expresiones que se refieren a *individuos*. De otra parte, expresiones que designan *propiedades* de individuos o *relaciones* entre ellos . . . A las expresiones del primer tipo seguiremos llamándolas

[7] Sobre la validez de los razonamientos, Sánchez y Campos (2003:10) afirman: "Un argumento deductivo es válido o correcto sólo si las reglas utilizadas garantizan que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas, es decir, que la información contenida en la conclusión está contenida en las premisas".

> ‘nombres de individuo’, o ‘nombres’ a secas. Para designar a las del segundo introduciremos el término ‘*predicado*’.

Por tanto, la estructura interna de las proposiciones la constituyen nombres y predicados. Según Deaño (1975b:20):

> Vistos así los enunciados por dentro, la lógica procede a clasificarlos en dos grandes tipos: aquellos en que aparece *un solo* nombre de individuo, y aquellos otros en los que son *dos o más* nombres de individuo los que intervienen. . . A los predicados del primer tipo se les llama *predicados monádicos*, y *predicados poliádicos* a los del segundo.

Ya identificada la estructura interna de las proposiciones, Deaño (1975b:24,27) señala:

> Una variable que puede ser sustituida por cualquier nombre de individuo . . . ‘*todos*’ y ‘*algunos*’, se las conoce con el nombre de «cuantificadores» . . . Al cuantificador ‘todos’ se le denominará «cuantificador universal». «Cuantificador particular» será el nombre del cuantificador ‘algunos’. El símbolo del cuantificador universal será ‘ $\wedge$ ’. El del cuantificador particular, ‘ $\vee$ ’.

Por tanto, en la estructura interna de las proposiciones se apoya la cuantificación; además, ésta se simboliza a través del concepto de variable. Al respecto, Deaño (1975b:41-43) afirma:

> Entramos, *pues, en un nuevo apartado de la lógica. Su nombre: ‘la lógica de predicados’* o *‘lógica cuantificacional’* . . . Una expresión escrita en el lenguaje de la lógica de los predicados monádicos sería . . . $\wedge x\left[\left(Px \wedge \neg Qx\right) \rightarrow Rx\right]$
> que cabría ejemplificar con el siguiente enunciado:
> Todos los cremitas que no tienen televisión se aburren mortalmente.
> En cambio la expresión
> $\wedge x \vee y\left[\left(Px \wedge Qy\right) \rightarrow \left(Rxy \wedge Sxy\right)\right]$
> que podría ser el esquema de un enunciado como
> Todos los sabios encuentran siempre una masoquista que los sabe apreciar como se merecen
> Pertenecería a la lógica de los predicados poliádicos . . . ¿Por qué no cuantificar también las letras de predicado? . . .
> Hay un rasgo que todos los problemas filosóficos tienen en común
> expresión que podríamos esquematizar así:
> $\vee P \wedge x\left(Qx \rightarrow Px\right)$

> . . . Pues bien: aquel nivel de la lógica de predicados en el que sólo se cuantifican variables individuales recibe el nombre de '*lógica de predicados de primer orden*'. En un segundo nivel —*lógica de predicados de segundo orden*— se examinaría la validez de aquellos razonamientos que, para su esquematización, requieren la cuantificación de predicados de individuo.
> Pero podríamos seguir ascendiendo . . . Sin embargo, se suele hablar, sin más, de, por una parte, «lógica de predicados de primer orden», y, por otra parte, «*lógica de predicado de orden superior*», que integraría a todas las de orden superior al primero.[8]

Por tanto, la lógica cuantificacional considera la estructura interna de las proposiciones, la lógica proposicional no. Sin embargo, según Garrido (1983:128): "La lógica de cuantores supone la lógica de juntores, y no puede ser estudiada si antes no se conoce ésta". Sobre los cuantificadores, Deaño (1978: 274) señala: "Al igual que con las conectivas, con ellos pueden llevarse a cabo dos operaciones fundamentales: introducirlos, y eliminarlos. Tendremos, en consecuencia, cuatro reglas". Estas reglas introducidas por Gentzen en 1934, de acuerdo a Garrido (1983:138) son:

Introducción de generalizador
IG

$$\frac{Pa}{\wedge xPx}$$

Condición: «a» no debe ocurrir en ningún supuesto previo no cancelado.

Eliminación de generalizador
EG

$$\frac{\wedge xPx}{Pa}$$

Introducción de particularizador
IP

$$\frac{Pa}{\vee xPx}$$

Eliminación de particularizador
EP

$$\frac{\begin{array}{l}\vee xPx \\ \left|\begin{array}{l} Pa \\ \vdots \\ A \end{array}\right.\end{array}}{A}$$

Condición: «a» no debe ocurrir en $\vee xPx$, ni en A, ni en ningún supuesto previo no cancelado.

[8] Garrido (1983:280 n.11) considera: "La lógica elemental o de primer orden . . . se caracteriza porque en ella las únicas variables susceptibles de ser cuantificadas son las variables de individuo. Sobre la lógica de primer orden cabe edificar lógicas de orden superior que permiten cuantificar también las letras predicativas.
Dentro de la lógica elemental se distinguen dos estratos . . . la lógica de juntores (lógica de enunciados) y la lógica de cuantores (lógica cuantificacional, también llamada lógica de predicados o cálculo funcional). Esta última se subdivide a su vez en lógica cuantificacional monádica o lógica cuantificacional poliádica".

En lógica cuantificacional, un concepto a considerar es el universo del discurso. Según Deaño (1975a:27 n. 8): "Por 'universo del discurso' entendemos el conjunto de objetos que constituye el marco de referencia de nuestro lenguaje en un momento dado". En particular, sobre el universo del discurso, Garrido (1983:49-51) afirma:

> En un cierto sentido, los cuantificadores pueden ser considerados como abreviaturas de fórmulas cuyos únicos símbolos lógicos sean juntores . . . el cuantificador universal resume o representa la aplicación reiterada del conjuntor . . . el particularizador resume o representa la aplicación reiterada del disyuntor . . . Puédese, pues, afirmar que cuando el universo de discurso es finito se borran las fronteras entre lógica de cuantores y lógica de juntores: aquélla es reducible a ésta. Pero cuando el universo del discurso es infinito . . . la lógica de cuantores se torna radicalmente distinta de la de juntores.

Esta última afirmación permite concluir que, la cardinalidad del universo del discurso determina si una lógica es proposicional o cuantificacional. Mientras que acerca de ambas lógicas, Lukasiewicz (1977:111) considera: "Hoy tenemos plena conciencia de que la teoría de la deducción [lógica proposicional] y la teoría de la cuantificación [lógica cuantificacional] son las ramas más fundamentales de la lógica". En cuanto a ésta, Deaño (1978:43) afirma: "La lógica es la teoría formal del razonamiento, el estudio de la argumentación formalmente válida, la ciencia de la inferencia deductiva". Con relación a la deducción, Garrido (1983:217-218) señala:

> El concepto de «deducción», que es el concepto central de la lógica, está íntimamente conectado con el de «corrección formal», ya que de ésta depende el interés real de una inferencia. Pero también lo está con la idea de «verdad» . . . La investigación moderna suele hablar, a este respecto, de sintaxis y semántica. La *sintaxis* estudia, en un lenguaje o en un sistema formal, las relaciones de unos signos y unas fórmulas con otros signos y otras fórmulas. La *semántica* estudia, en cambio, la relación de los signos y fórmulas con sus contenidos y objetos extralinguísticos . . . Carnap propone la división de la semántica en *teoría de la extensión y teoría de la intensión*. La primera estudiaría la relación de las palabras y frases a las cosas (denotación, extensión); la segunda se ocuparía del significativo o sentido de las palabras y de las frases (connotación, comprensión).
> La diferencia entre extensión e intensión se aprecia fácilmente analizando el uso de los *predicados* . . . Al considerar a los predicados desde el punto de vista «extensional» se

> dice que aluden, o mejor, que denotan *clases o conjuntos*. Pero cuando se les contemplan desde el ángulo «intensional» se dice que designan *propiedades o notas* de los objetos.

Al comparar entre semántica extensional y semántica intensional, Garrido (1983:220) considera: "La opinión más general es, en todo caso, que la lógica extensional y la de referencia constituyen el camino más seguramente practicable de la ciencia lógica". Sobre el desarrollo de la semántica extensional, Manzano (2003:39-40) afirma:

> La teoría de modelos es la rama de la lógica matemática que se ocupa de las relaciones entre los lenguajes formales y sus interpretaciones en sistemas –o modelos– adecuados . . . El gran impulsor de las investigaciones en este área fue Tarski, que habiendo precisado y definido los conceptos semánticos de verdad y consecuencia, posibilitó esta modernización y generalización de la semántica que es la teoría de modelos.[9]

En semántica extensional se define interpretación o realización de un lenguaje formal, al respecto Dalla (1976:84) considera:

> Supongamos que nos enfrentamos con un lenguaje [formal] elemental L. En tal caso, la operación de interpretación de L puede describirse abstractamente a través de un par ordenado ‹U, *v*› donde U es un conjunto no vacío que representa al universo, en tanto que *v* es la operación que asigna los significados en el universo U.

Y a partir de realización de un lenguaje, se define modelo de un sistema formal, verdad lógica y consecuencia lógica. Según Dalla (1976:88):

> Un modelo de un sistema formal es una realización del lenguaje del sistema que hace verdadero a todos los axiomas del sistema . . . Una proposición es una verdad lógica cuando sea verdadera en toda realización posible del lenguaje a que pertenece . . . Una proposición α es una consecuencia lógica de un conjunto de proposiciones *K* cuando

[9] Según Garrido (1983:24): "A la lógica formal tal y como ha venido siendo clásicamente cultivada, desde Aristóteles a Kant, se le suele dar el nombre de *lógica tradicional*. *A* la lógica formal en su actual estado de matematización o plena formalización, se le han dado los nombres de *lógica simbólica, lógica matemática y logística* . . . y también el de *álgebra lógica*".

> toda realización (del lenguaje de *K* y de α) que haga verdaderos todos los elementos de *K* hace verdadera también a la proposición α.

Sobre la conexión entre consecuencia lógica y deductibilidad formal Garrido (1983:231) señala:

> La relación de consecuencia lógica es el correlato semántico, y también el fundamento, de la relación sintáctica de la deducibilidad formal. Como símbolo de esta última relación empleábamos el deductor: «$\vdash$», escribiendo $\Gamma \vdash A$ para indicar que la fórmula A es formalmente deducible (derivable) del conjunto de fórmulas Γ . . . Y para indicar que una fórmula A es consecuencia lógica, o se deduce semánticamente, de un conjunto de fórmulas Γ, escribiremos $\Gamma \models A$.
> En la notación sintáctica, el hecho de que una fórmula representase una ley lógica . . . se expresaba: $\vdash A$, indicando de ese modo que la fórmula A es susceptible de ser deducida a partir de cero premisas o suposiciones iniciales. Análogamente escribimos en notación semántica $\models A$ si A es verdad lógica (enunciado analítico).
> La distinción entre las dos clases de relación deductiva, la deducibilidad formal y la consecuencia semántica, no es trivial. En principio no está garantizado que ambas hayan de coincidir.

Esto último se trata al nivel metateórico. Ahora bien, sobre la metateoría Deaño (1978:296) señala: "Hacer Metateoría consiste principalmente en estudiar si los cálculos lógicos reúnen cierto tipo de propiedades o requisitos". Según Garrido (1983:308-311):

> Una de las tareas de la metateoría consiste en considerar el sistema desde un punto de vista global . . . Consistencia, completud y decidibilidad son propiedades que afectan al sistema formal globalmente considerado. La demostración de que éste posee alguna de ellas, no es una tesis *del* sistema, susceptible sin más de ser reducida en términos de lenguaje formal, sino una tesis *acerca del* sistema, que deberá ser abordada con los criterios y los métodos de la metateoría . . . Un sistema formal es consistente cuando todas las fórmulas que de él se derivan o pueden derivarse están exentas de contradicción . . . La *tesis de consistencia* . . . podría enunciarse diciendo que: *si una fórmula A es formalmente deducible en el sistema, entonces es lógicamente verdadera*. Más brevemente:
> *Si* $\vdash A$, *entonces* $\models A$.
> La *tesis de completud* está relacionada con la anterior, cuya inversa es. Un sistema es completo cuando tiene potencia o capacidad suficiente para que de él se deriven todas aquellas fórmulas que correspondan a verdades de la parcela científica que el sistema

> en cuestión pretenda formalizar . . . La tesis de completud para un sistema lógico puede enunciarse así: si una fórmula A es lógicamente verdadera, entonces es formalmente deducible en el sistema. Más brevemente:
>
> *Si* $\models$ A, *entonces* $\vdash$ A.
>
> . . . La conjunción de ambas tesis constituye una aserción del máximo interés: la aserción de la coincidencia o equivalencia entre sintaxis y semántica. En símbolos
>
> $\vdash$ A sii $\models$ A.
>
> La demostración de este resultado para la lógica elemental fue obtenida en 1930 por Gödel se trata, tal vez, del más importante de los alcanzados en la investigación de los sistemas de lógica elemental. El mismo resultado para la lógica de enunciados había sido obtenido por Post en 1920.

Sin embargo, Garrido (1983:232) afirma: "Pero en teorías de orden superior no es ese el caso. En tales teorías el control lógico inherente a la relación de deducibilidad deja de ser operante, y es preciso atenerse tan sólo al criterio de consecuencia lógica".

Sobre decibilidad, Tarski (1971a:3) afirma: "Una teoría T es llamada *decidible* o *indecidible* si la solución del problema de decisión es positiva o negativa" (traducción libre)[10]. Al respecto, Garrido (1983:310) explica:

> A un procedimiento que permite resolver mecánicamente un problema o un grupo de problemas se le da el nombre *de procedimiento decisorio* o *algoritmo* . . . En el caso de los sistemas formales se habla de *decibilidad* cuando existe un algoritmo o procedimiento decisorio que permita determinar mecánicamente si una fórmula cualquiera es o no deducible. Un sistema formal será *decidible* o *indecidible* según que exista o no exista un tal procedimiento decisorio de la deducibilidad de sus fórmulas.

Aunque se da la equivalencia entre sintaxis y semántica en lógica elemental, sin embargo, según Garrido (1983:324): "La lógica cuantificacional de primer orden es consistente y completa, pero no decidible, o al menos sólo parcialmente"[11]. Y, como ya se indicaba al inicio

---

[10] A theory T is called decidable or undecidable according as the solution of the decision problem is positive or negative.

[11] Otros casos destacados de indecibilidad: según Mostowski, Robinson y Tarski (1971:39): "*Cada subteoría de la aritmética de números naturales es indecidible*" (*Every subtheory of the arithmetic of natural numbers is undecidable*). Mientras que Tarski (1971b:77) afirma: "*La teoría elemental de grupos es indecidible*" (The *elementary theory of groups is undecidable*).

del epígrafe, la lógica proposicional es decidible. Al respecto, Fernández (2005a:1) señala: "Un cálculo de tablas para la lógica proposicional clásica goza de todas las ventajas: corrección, completud, decidibilidad". Entonces, se puede concluir que la lógica proposicional es una parte fundamental de la lógica y la menos compleja. Además, en lógica proposicional, la equivalencia entre consistencia y completitud garantiza la equivalencia entre sintaxis y semántica.

Mientras que sobre la noción de algoritmo, vinculada a la decibilidad, Alonso (2002:5) comenta: "La conexión entre la Teoría de la Computación y la Lógica tiene lugar, precisamente, en lo que atañe a la manipulación y tratamiento de algoritmos". Por tanto, si se tiene en cuenta que en los fundamentos de la matemática el concepto de algoritmo es clave, entonces éste liga la lógica, la teoría de la computación y la matemática.

Además de las tres propiedades, consistencia, completud y decibilidad, hay una cuarta cuestión, la independencia. Sobre ésta, Garrido (1983:310-311) afirma:

> Un sistema formal o deductivo es llamado *independiente* cuando no se da el caso de que alguno de sus axiomas o alguna de sus reglas primitivas pueda ser derivada de los otros axiomas o de las otras reglas primitivas . . . La cuestión de la independencia en un sistema no es un problema de necesidad, sino sólo de elegancia o de economía de supuestos.

Sin embargo, por más de dos milenios por una cuestión sólo de elegancia, por utilizar la expresión anterior, se ha intentado probar la dependencia del quinto postulado de las paralelas, hasta que finalmente, según Boyer (1986:674-676), en el primer tercio del siglo XIX, Lobachewsky, Gauss y Bolyai, de modo independiente, demuestran lo contrario, su independencia, y se llega así a crear las geometrías no-euclídeas. Como consecuencia de ello, se logra precisar más la idea de teoría axiomática, que según Dalla (1976:39) se da "el abandono del criterio de la evidencia, tomado como garantía de verdad, por los postulados de una teoría matemática . . . en particular, la existencia de geometrías diferentes".

Como se sabe, la lógica está organizada axiomáticamente, entonces es de esperar que esta evolución de la concepción axiomática haya contribuido, en particular, a la aparición de lógicas diferentes. Dalla (1976:43-44) afirma: "La lógica matemática fue única o casi única por largo período . . . en nuestros días la situación se ha complicado mucho más. Se ha producido una suerte de explosión demográfica de lógicas distintas". Al respecto, Manzano (2005:19-20) señala:

> Hay lógicas abductivas, condicionales, combinatorias, categoriales, constructivas, cuánticas, cumulativas, deónticas, descriptivas, difusas, epistémicas, estoicas, libres, híbridas, infinitarias, intensionales, intuicionistas, lineales, multimodales, no monotónicas, paraconsistentes, polivalentes, de la relevancia, subestructurales y en general, una larga lista de lógicas no-estándar.

Pero, la autora afirma en Manzano (2005:21-22): "Aceptamos la gran diversidad de sistemas lógicos. . . las diversas lógicas pueden ser traducidas a un marco unificador de corte clásico; esto es, aceptamos que *la lógica clásica* es en cierto sentido un *sistema universal*"[12].

Al nivel de síntesis, de acuerdo a lo desarrollado en la parte anterior, sobre lógica de predicados existen dos formas de presentación de esta lógica: como sistema axiomático y como cálculo de deducción natural. Mientras que este último expresa mejor los aspectos inferenciales de la lógica, la presentación axiomática tiene ventajas al nivel metateórico. Sin embargo ambas formas tienen el mismo alcance, es decir, se da la igualdad entre sintaxis y semántica; en términos más precisos, la consistencia y la completitud son equivalentes en la lógica de primer orden. Pero no se cumple en la lógica de orden superior. Además, la lógica de primer orden es consistente y completa, mientras que la decibilidad sólo se da en la lógica proposicional. Así, ésta se convierte en una de las dos partes fundamentales de la lógica y la menos compleja.

[12] Garrido (1983:35) precisa: "A la lógica, sea o no tradicional, que se conforme al principio aristotélico de bivalencia, se llama *clásica*".

La lógica cuantificacional estudia la estructura interna de las proposiciones, mientras que la proposicional no. Pero, la primera se apoya en la segunda, es decir, en la lógica proposicional; aunque ambas, constituyen la parte fundamental de la lógica. Ahora bien, si el dominio del discurso es finito, la lógica cuantificacional se reduce a la lógica proposicional. Por último, la evolución del método axiomático ha llevado a la aparición de lógicas diferentes, en particular las polivalentes.

2.1.2 Lógica polivalente

Según Dalla (1976:104):

> En años recientes los enfoques lógicos de tipo polivalente han tenido, en sus distintas formas, una gran difusión . . . la lógica bivalente se enjuicia como de máxima idealización. . . en tanto que se mantiene que la lógica «concreta» eventual sería esencialmente polivalente.

En cuanto a los fundadores de las lógicas polivalentes, Deaño (1975b:14) considera:

> Han sido Jan Lukasiewicz y Emil Post los verdaderos creadores de las lógicas polivalentes . . . Post no volvió a ocuparse nunca más del tema desde entonces; para Lukasiewicz, en cambio, constituyó, a partir de ese momento, una de sus preocupaciones intelectuales básicas.

Esta es una importante razón para conocer las ideas de Jan Lukasiewicz sobre la lógica polivalente. Según Lukasiewicz (1975c:59):

> Si se introduce en lógica este tercer valor de verdad, estamos cambiando sus fundamentos. Un sistema trivalente de lógica, cuyo primer bosquejo pude dar en 1920 difiere de la lógica bivalente ordinaria, la única conocida hasta ahora, tanto como los sistemas no euclídeos de geometría difieren de la geometría euclídea. A pesar de ello, la lógica trivalente es tan consistente y libre de contradicciones como la lógica bivalente.

Esto último es similar a lo que un siglo antes Lobachewsky sostenía, para justificar su geometría no-euclídea. Además, Lukasiewicz (1975g:136) considera: "La existencia del sistema de lógica polivalente se ha de tomar hoy en cuenta del mismo modo que se ha de tomar en cuenta, por ejemplo, la existencia de sistemas de geometría no-euclídea". Estas afirmaciones ponen en evidencia que la aparición de la lógica polivalente está relacionada, en particular, con la existencia de la geometría no-euclídea.

También, según Fernández (2005a:40): "Algunos problemas filosóficos, especialmente el de los futuros contingentes, están a la base de la elaboración de las denominadas *lógicas polivalentes*". Al respecto, Lukasiewicz (1975f:120) señala: "He estado siempre sumamente interesado en el tema del determinismo e indeterminismo; lo he asociado con el problema de las lógicas polivalentes". Además, según Lukasiewicz (1975g:136): "Como fundador de los sistemas polivalentes de la lógica proposicional, afirmo que históricamente estos sistemas. . . han surgido a partir de investigaciones lógicas relativas a las proposiciones modales y a los conceptos relacionados de posibilidad y necesidad". En este sentido, Lukasiewicz (1975a:39) afirma: "He demostrado que, además de proposiciones verdaderas y falsa, hay proposiciones *posibles*, a las que corresponden la posibilidad objetiva con un tercer valor además del ser y no-ser.
Esto dio origen a un sistema de *lógica trivalente*". Sobre ésta, Lukasiewicz (1975b:41-42) explica:

> Es un sistema de lógica no aristotélica, puesto que opera sobre la base de que, además de proposiciones verdaderas y falsas, hay también proposiciones que no son ni verdaderas ni falsas, y, por tanto de que existe un tercer valor lógico. Este tercer valor lógico se puede interpretar como la «posibilidad» . . . la lógica trivalente tiene sobre todo importancia teórica como medio para construir un sistema de lógica no-aristotélica. Si este nuevo sistema de lógica tiene o no importancia práctica es algo que sólo podrá determinarse cuando se examinen en detalle fenómenos lógicos. Y en especial los fenómenos lógicos que se dan en las ciencias deductivas.

Sin embargo, sobre el calificativo de lógica no-aristotélica, Lukasiewicz (1975d:83) considera:

> Quizá no sería correcto denominar a los sistemas polivalentes de lógica proposicional por mí establecidos lógica «no-aristotélica», dado que Aristóteles fue el primero que pensó que la ley de bivalencia podía no ser verdadera para ciertas proposiciones. Nuestra lógica, provista de un nuevo fundamento, podría denominarse más bien «no-crisípea», puesto que parece haber sido Crisipo el primer lógico que conscientemente estableció y defendió obstinadamente el teorema según el cual toda proposición es o bien verdadera o bien falsa.

Además, Lukasiewicz (1975d:85-86) añade: "Los estoicos . . . y Crisipo en especial, erigieron la ley de bivalencia en principio fundamental de su dialéctica . . . *la dialéctica estoica es la forma antigua de la moderna lógica proposicional*". También, según Lukasiewicz (1975e:92): "En la lógica proposicional estoica aparecen las siguientes funciones: negación, implicación, conjunción y disyunción".

Entre la lógica bivalente y las polivalentes, según Lukasiewicz (1975d:81), se cumple:

> El sistema trivalente es una parte propia del bivalente, del mismo modo que el sistema infinitamente polivalente es una parte propia del sistema trivalente. Esto quiere decir que todas las tesis de los sistemas trivalente e infinitamente polivalente son verdaderas para el sistema bivalente.

Esta propiedad entre lógica bivalente y las lógicas polivalentes es de gran utilidad, a la hora de desarrollar una de éstas, porque las propiedades de la primera constituyen el límite de las propiedades que verifican las segundas. Ahora bien, una buena parte, y que es esencial, de lo aquí señalado sobre las lógicas polivalentes, se resume en Dalla (1976:103):

> Desde un punto de vista teórico, una vez aceptado el principio de la polivalencia, es posible construir una gran variedad de lógicas polivalentes distintas, haciendo variar tanto el número de valores de verdad como las condiciones semánticas impuestas a los operadores lógicos fundamentales . . . Estas lógicas resultan todas subteorías respecto a las lógicas clásicas, en el sentido de que todas las leyes polivalentes son también leyes clásicas, pero no ocurre generalmente el caso inverso . . . las lógicas polivalentes suelen ser, como la lógica bivalente clásica, *veritativo-funcionales*. Con otras palabras, el valor de verdad de una proposición depende exclusivamente del valor de verdad de sus partes atómicas.

En este señalamiento, cabe destacar las dos características fundamentales de una lógica polivalente: la definición de sus conectivos y su polivalencia. Sobre el impacto de las lógicas polivalentes, Lukasiewicz (1975e:107) concluye: "Con los sistemas «polivalentes» de lógica proposicional ha surgido . . . un nuevo campo de investigación". Al respecto, Deaño (1975b:14-15) afirma: "Desde que Lukasiewicz y Post sentaron las bases, las lógicas polivalentes han pasado a convertirse en la sombra de la lógica formal dominante", entre ellas, en particular la lógica difusa. Al respecto, Astorga (1997:41) comenta: "En 1965, el investigador Lofti A. Zadeh comenzó a formalizar las ideas de Lukasiewicz, dándoles las características que actualmente se conocen bajo el nombre de lógica difusa, la cual, se sustenta a su vez en los *conjuntos difusos*". Como fundador de la lógica difusa, en la primera referencia sobre conjuntos difusos, Zadeh (1965:1) señala: "Un conjunto difuso es una clase de objetos con un continuo de grados de membresía" (traducción libre)[13]. Esta cantidad de grados de pertenencia a un conjunto, tantos como números reales, garantiza que la lógica difusa sea infinitamente polivalente, de ahí el ser elegida en este estudio para ejemplificar una lógica con polivalencia infinita.

Sobre conjuntos difusos, Astorga (1997:97) afirma: "Constituyen el modelo abstracto por el cual Zadeh, intenta reproducir la terminología vaga o poco precisa que utilizamos los seres humanos en nuestras conversaciones diarias".

Con respecto al lenguaje natural, Zadeh (2005:16) explica:

> El problema es que el lenguaje natural es intrínsicamente impreciso. La imprecisión de los lenguajes naturales es una consecuencia del hecho que (a) un lenguaje natural es, básicamente, un sistema para describir percepciones; y (b) las percepciones son intrínsicamente imprecisas como consecuencia de (c) la capacidad limitada de los órganos sensoriales, y fundamentalmente el cerebro, para resolver detalles y guardar información; y (d) incompletitud de información. (Traducción libre)[14]

[13] A fuzzy set is a class of objects with a continuum of grades of membershy.

[14] The problem is that natural languages are intrinsically imprecise. Imprecision of natural languages is a consequence of the fact that (a) a natural language is, basically, a system for describing perceptions; and (b)

Zadeh (1994:78) afirma: "Lógica difusa es un sistema que aspira a una formalización del razonamiento aproximado. Como tal está basada en lógica multivaluada [polivalente]" (traducción libre)[15]. Y, según Astorga (1997:87): "Con el término razonamiento aproximado, dentro de la literatura se busca cubrir aquellos casos donde se tienen que realizar deducciones con información incompleta, imprecisa o vaga".

Sobre la ventaja de los métodos difusos Zadeh (1975:78) concluye: "Es probable obtener mayores progresos reales en la comprensión del comportamiento de sistemas inteligentes que dentro de los confines de los métodos tradicionales" (traducción libre)[16]. Según Velarde (1994:311):

> En el área de la Ingeniería del Conocimiento ha comenzado la construcción de computadores difusos . . . el énfasis se pone, no en los datos, sino en el conocimiento y en el manejo de conocimiento impreciso. Se necesitan, por tanto, sistemas *hardware* que traten con señales difusas, y no ya con señales binarias.

Por tanto, la lógica difusa en ingeniería del conocimiento, está presente no sólo en el software sino también en el hardware. En general, la ventaja de los métodos difusos radica en su polivalencia infinita.

De lo señalado cabe destacar, una lógica polivalente se fundamenta en dos características esenciales: la definición de sus conectivos, se refiere a sus condiciones semánticas; y la polivalencia, es decir, el número de valores de verdad. Precisamente, en estas dos condiciones se articula la construcción, a realizar, de la lógica de plausibilidad generalizada. Además, para las lógicas polivalentes, la lógica bivalente constituye un marco de referencia general.

---

perceptions are intrinsically imprecise as a consequence of (c) the bounded ability of sensory organs, and ultimately the brain, to resolve detail and store information; and (d) incompleteness of information.

[15] Fuzzy logic is a logical system that aims at a formalization of approximate reasoning. As such, it is rooted in multivalued logic.

[16] We are likely to make more real progress in the understanding of the behavior of humanistic systems than is possible within the confines of traditional methods.

En particular, existe un resultado: Las propiedades de una lógica polivalente, también lo son de la lógica bivalente, pero en el caso inverso, no se da en general. Este resultado es de suma importancia, en particular para nuestro problema de investigación, porque orienta en el desarrollo de una lógica polivalente, que es nuestro caso, al tener que desarrollar la lógica de plausibilidad una vez incrementada su polivalencia. Por tal razón, la lógica de primer orden ocupa un lugar destacado en los antecedentes teóricos de la teoría de plausibilidad.

2.1.3 Lógica no-monotónica

Con respecto a la idealización de la lógica clásica, Morado (2004:3) afirma: "Esta exigente visión de la lógica es un hermoso ideal para alcanzar, pero un peligroso criterio para juzgar sobre la racionalidad de un agente". Sobre la infalibilidad Morado y Savion (2002) señalan:

> Un sistema inferencial infalible comienza con un conjunto de verdades lógicas, y las procesa a través de reglas de inferencia que conservan la verdad. Desafortunadamente, nosotros no siempre comenzamos de suposiciones necesarias, nuestra información es a menudo falsa y normalmente incompleta. (Traducción libre)[17]

Sin embargo, según Morado (2004:4):

> Esta pérdida de la infalibilidad, reemplazándola con una modesta sensatez, no significa renunciar al rigor. Podemos incluso desarrollar sistemas que permiten y facilitan hacer revisiones a nuestros cuerpos de creencias, como las lógicas no-monotónicas en que es fácil modelar procesos de retracción de opiniones.

Mientras que Fernández (2005a:1-2), sobre la lógica no-monotónica, señala:

> En Inteligencia Artificial interesan también las lógicas que tratan de sistematizar el razonamiento propio de la vida cotidiana, el razonamiento de sentido común, donde se opera con información incompleta, lo que implica el abandono de los planteamientos clásicos para el abordaje de esta tarea y la adopción de lógicas en las que la relación de

[17] An infallible inferential system starts with a set of logical truths, and processes them through valid rules of inference that preserve truth. Unfortunately, we do not always start from necessary assumptions; our information is often false and almost always incomplete.

> consecuencia entre premisas y conclusión no siempre se mantiene ante un aumento de las primeras; se trata de familia de lógicas denominadas *no monótonas*.

Acerca de los razonamientos no monotónicos, Soler (2005:85) afirma: "Una de las características propias de los sistemas formales (deductivos) clásicos es su *monotonía* . . . Sin embargo, muchos razonamientos que realizamos en la vida ordinaria no son monótonos". Morado (2005a:239-240) explica:

> El **razonamiento monotónico** ocurre cuando las inferencias se preservan bajo aumento de premisas . . . En contraste, el **razonamiento no-monotónico** ocurre cuando las inferencias no se preservan bajo aumento de premisas . . . la noción de no-monotonicidad que buscamos es no-monotonicidad bajo incremento total de información, tanto positiva como negativa.

Según Morado (2005b:37):

> El tratamiento lógico de las inferencias no-monotónicas tiene una larga historia que se remonta hasta el silogismo retórico en Aristóteles. En siglos recientes han sido desarrollados sistemas de lógica no monotónica como la inducción, la abducción, las probabilidades, el razonamiento estadístico, etc. Y en las últimas tres décadas han aparecido sistemas de circunscripción, autoepistémicos, por falla, preferenciales, etc., que prestan especial atención a aspectos no-monotónicos de las inferencias.

En torno a la investigación en lógica no-monotónica, Morado (2005b:42) considera:

> El principal impulso para la investigación sobre sistemas lógicos no-monotónicos proviene de los estudios en ciencias de la computación en los que juega un papel importante el manejo de bases de datos "deductivas", los sistemas expertos, los programas para toma de decisiones, etc.

Sobre la necesidad de contar con un tipo de inferencia en lógica no-monotónica, Aliseda (2005:3-4) señala:

> La proliferación de sistemas no-monótonos resultó ser un reto para los lógicos. Por un lado, surge la necesidad de contar con un marco general donde pudieran analizarse y compararse los múltiples y diversos sistemas lógicos recién propuestos . . . La idea es

> la de describir un estilo de inferencia en un nivel puramente abstracto, haciendo alusión exclusivamente a su estructura y propiedades combinatorias.

De lo señalado sobre lógica no-monotónica, se puede concluir que modela razonamientos sujetos a retracción de opiniones; a pesar de contar con una larga historia, el desarrollo de una gran variedad de sistemas no-monotónicos es reciente, y se debe a la ciencia de la computación; y, su estructura de inferencia está poco desarrollada. No obstante, aunque los razonamientos asociados con la teoría de plausibilidad son no monotónicos, esta situación no afecta a la no monotonicidad de la lógica de plausibilidad; porque, la teoría de plausibilidad resuelve este problema dividiendo el proceso de decisión por etapas, donde en cada una de ellas se da la monotonicidad.

2.2 Antecedentes de la decisión racional

Lo que constituye el fundamento de toda la ciencia es, según Bacon (1984:89-90):

> Descubrir lo que hace y admite la naturaleza. . . Es preciso, pues, formar *tablas y encadenamientos de hechos*, distribuidos de manera tal y con tal orden, que la inteligencia pueda operar sobre ellos . . . sobre la propiedad dada, es preciso ante todo *hacer comparecer ante la inteligencia* todos *los hechos* conocidos que ofrecen aquella misma propiedad, aunque en materias muy diferentes.

Es lo que el autor llama tabla de hechos positivos o tabla de ser y de presencia. Sobre la tabla de hechos negativos o tabla de desaparición o de ausencia en los análogos, en Bacon (1984:91) señala:

> Es segundo lugar es preciso *hacer comparecer ante la inteligencia* todos *los hechos* en los que no se encuentra la propiedad dada . . . Pero citar todos estos hechos, sería empresa interminable.
> Por esto es preciso poner los hechos negativos, al lado de los afirmativos, e investigar la privación de la propiedad, sólo en los sujetos que más relación tienen con aquellos en los que la propiedad existe o aparece.

Sin embargo, de esta necesidad de mostrar hechos positivos y hechos negativos, o presencias y ausencias se llega a los procesos de formalización, defendidos por Galileo, que como señala Koyre (1978a:181), la física moderna: "ha nacido con y en las obras de Galileo Galilei y ha acabado en las de Albert Einstein". Refiriéndose a Galileo, sobre la enorme dificultad de su empresa, Koyre (1978a:193-194) señala:

> Sabe muy bien que se encuentra frente a enemigos poderosos: la autoridad, la tradición y ─el peor de todos─ el sentido común. . . No debemos, pues, elegir entre pensar e imaginar. Pensar con Galileo o imaginar con el sentido común. Pues es el pensamiento, el pensamiento puro y sin mezcla, y no la experiencia y la percepción de los sentidos, lo que está en la base de la «nueva ciencia» de Galileo Galilei . . . Las leyes fundamentales del movimiento . . . son leyes de naturaleza matemática.[18]

En tal sentido, Koyre (1978b:71) explica:

> Está claro: la manera en que Galileo concibe un método científico correcto implica un predominio de la razón sobre la simple experiencia, la sustitución por modelos ideales (matemáticos) de una realidad empíricamente conocida, la primacía de la teoría sobre los hechos.

Sobre el papel de las matemáticas en las ciencias naturales, Koyre (1978a:194n) concluye que la revolución galileana puede ser resumida en el hecho: "del descubrimiento de que las matemáticas son la gramática de la ciencia física". El propio responsable de tal revolución, en Galilei (1984:61), considera que el universo: "está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra".

---

[18] La superación del sentido común en el contexto de las matemáticas ya se da tan pronto como en el siglo V a. C., cuando un pitagórico, Hipaso de Metaponto, descubre los inconmensurables, que junto con las aporías de Zenón de Elea lleva a los pitagóricos a crear el método axiomático deductivo. Pues, según Boyer (1986:111) los historiadores: "suelen referirse a los argumentos de Zenón y de Hipaso como una de las posibles causas motivadoras del enfoque deductivo". Método que aparece en los Elementos de Euclides y que constituye el fundamento de la ciencia actual. En particular, la evolución del método axiomático deductivo, a través de las geometrías no euclídeas, debido especialmente a los trabajos de Lobachevski, crea la base matemática para que Einstein pudiera desarrollar la física moderna. Al respecto, Aleksandrov (1985:216) señala: "En 1915 Einstein, en su teoría general de la relatividad, corroboró las ideas de Lobachevski y Riemann".

Este énfasis en la formalización matemática es recogido por el positivismo y llevado a las ciencias sociales, que según Pereyra, Toscano y Jones (2002:95):

> El positivismo sólo reconoce como modelos de conocimiento legítimo a las ciencias empíricas o naturales y las disciplinas formales como la lógica y la matemática. Es así como las ciencias sociales norteamericanas comenzaron a mostrar una tendencia creciente hacia el refinamiento lógico y epistemológico en pos de revestir un carácter verdaderamente científico. Una de las vertientes de dicha tendencia fue la teoría de la elección racional.

En particular, Rawls aplica la decisión racional en su teoría de la justicia para elegir los principios de justicia; y sobre éstos señala en Rawls (1997:18): "Proporcionan un modo para asignar derechos y deberes en las instituciones básicas de la sociedad y definen la distribución apropiada de los beneficios y las cargas de la cooperación social". Esto muestra cómo desde el mundo de las matemáticas a través de la decisión racional se llega al mundo le la vida de los sujetos, donde consideraciones racionales permiten tomar decisiones morales.

Al referirse a los antecedentes más antiguos de la decisión racional, Pereyra et al (2002:93,123n), señalan entre los autores clásicos del utilitarismo, a Jeremy Bentham. Según Larios (1973:XV):

> El fin del obrar humano, tanto de la conducta pública como de la privada, es la felicidad, y la calificación moral de una acción se determina por sus consecuencias placenteras o penosas. Este principio hedonístico es la base de la filosofía moral de Bentham, quien pretende apoyar en ella toda la moral y todo el Derecho.[19]

El propio autor sobre el principio de utilidad, en Bentham (1973:70), afirma: "Es únicamente este principio el que nos proporciona un *fundamento* que no necesita de otro anterior para

[19] Para Bentham (1973:33): "Las únicas consecuencias que a los hombres, en realidad, les interesan, ¿no son, acaso, el *dolor* y el *placer*? En efecto, puede expresarse con palabras tales como *dolor* y *places* [*sic*]; dolor y *placer* son términos, creo yo, cuyo significado ningún hombre necesita preguntar a un jurista".

sustentarse y que es, por sí solo y en sí mismo, fundamento suficiente para cualquier cuestión práctica". Para Bentham (1973:63): "La utilidad es la piedra de toque y la medida de toda virtud, tanto de la lealtad como de cualquier otra, y que la obligación de contribuir a la felicidad general constituía la suprema obligación de todos". Además de defender el principio de utilidad, Bentham (1973:116) destaca el interés del rigor lógico de los argumentos:

> Admitamos que hay leyes que exceden del *poder* de la legislatura. ¿Mediante qué criterios determinamos si estamos en presencia o no de una de ellas? Por mi parte, no puedo encontrar ninguno. Si continuáramos examinando la defensa de la tesis, solo encontraríamos la misma confusión inicial o, en el mejor de los casos, vagas aserciones y argumentos no inteligibles; cuando lo son, tales argumentos se derivan del principio de *utilidad* y, cualesquiera que fueren los términos empleados, no nos conducen más que a esto: la tendencia de la ley es, en mayor o menor grado, perniciosa. Si este es el resultado del razonamiento, ¿por qué no reconocerlo de una vez? ¿A qué viene derivarse por un páramo de sofismas, cuando la senda de la recta razón se abre ante nosotros?

Sobre el principio de utilidad, Larios (1973: XXI) comenta:

> Más que un principio, su idea fundamental es un método, un método de reconocida eficacia para dirigir al ser humano en sociedad mediante el hábil manejo de sus propios resortes psicofísicos, una piedra de toque para determinar, en vista de los resultados dolorosos o placenteros, si la conducta pública o privada ha sido adecuada.

Aunque como señala Larios (1973:XX): "No se puede pretender hallar el fundamento de la sociedad y de las instituciones sociales en el instinto de placer". Sin embargo, Larios (1973: XV) explica:

> Lo que supone un avance sobre la vieja moral hedonística es la insistencia sobre la necesidad de un exacto cálculo de las consecuencias de nuestras acciones. Este cálculo ["aritmética moral"] nos proporcionará la información necesaria para decidir acerca de nuestra conducta.

Por tanto, en el principio de utilidad en Bentham hay cierto análisis, porque para asegurar la felicidad a través de resultados placenteros y dolorosos, exige un máximo de placer y un mínimo de dolor para decidir sobre nuestra conducta. Tal como se muestra en la sección 2.3.3, esto responde a la estructura matemática de la decisión racional, un algoritmo maximin: mayor riqueza y menor pobreza, mayor democracia y menor tiranía, mayor evidencia en contra y menor evidencia a favor, etc.

Sobre la decisión racional Pereyra et al. (2002:93) señalan: "Los años posteriores a la segunda guerra mundial mostraron la consolidación de la elección racional como perspectiva teórica en las ciencias sociales". Los mismos autores, en Pereyra et al. (2002:95), comentan que gran parte de los científicos sociales norteamericanos de la década de los cincuenta, reciben una fuerte influencia de las escuelas positivistas. En cuanto a la teoría positivista predominante hasta el momento en Inglaterra, según Rodríguez (1997:22), sus "raíces se remontan a los trabajos de Jeremy Bentham a finales del siglo XVIII". Sin embargo, Rodríguez (1997:38) señala: "Dworkin propone el abandono de la separación conceptual tajante entre derecho y moral defendida por los positivistas"[20]; y explica:

> Dworkin construye un método de decisión . . . destinado a encontrar en cada caso difícil los principios que expliquen de la mejor manera posible las reglas vigentes y que provean la mejor justificación moral para la decisión del caso.[21]

Como positivista, a través de la regla de reconocimiento[22], Hart intenta justificar su posición frente a la propuesta de Dworkin, y señala, en Hart (1997:106):

---

[20] Rodríguez (1997:22-23) afirma: "El ataque de Dworkin a la separación entre descripción y justificación fue desarrollado sistemáticamente en *Law's Empire*".

[21] Según Rodríguez (1997:68): "En términos generales, un caso es difícil cuando los hechos y las normas relevantes permiten, por lo menos a primera vista, más de una solución. El tipo de caso difícil más frecuente es aquél en el que la norma aplicable es de textura abierta, es decir, contiene una o más expresiones lingüísticas vagas".

[22] Hart (1997:103) afirma: "Mi teoría no es un positivismo del hecho evidente puesto que dentro de los criterios de validez admite valores y no sólo hechos".

> Dworkin desconoce el hecho de que acepto explícitamente que la regla de reconocimiento puede incorporar, como criterios de validez jurídica, la conformidad con principios morales o valores sustantivos; es por ello que mi teoría ha sido calificada de "positivismo suave" y no, como sucede en la versión que Dworkin ofrece de ella, de "positivismo del hecho evidente".[23]

Precisamente, en torno al concepto de regla, surge una discusión interesante dentro del debate Hart–Dworkin. Al respecto, Hart (1997:117-118,123) afirma, en alusión a una de sus obras[24]:

> Durante largo tiempo, la crítica más conocida de Dworkin con referencia a este libro era que erradamente representaba el Derecho como si consistiera únicamente en reglas "todo o nada" y desconocía otro tipo de parámetro jurídico, esto es, los principios jurídicos que desempeñan un papel importante y distintivo en el razonamiento jurídico y en el proceso de adjudicación . . . Ciertamente, confieso que en mi libro me ocupé muy poco del tópico de la adjudicación y del razonamiento jurídico y, en especial, de los argumentos relativos a lo que mis críticos denominan principios jurídicos. Coincido en que es un defecto de mi exposición el no haberme detenido en los principios . . . Considero que los argumentos establecidos a partir de los principios de esta índole constituyen un rasgo importante de la adjudicación y del razonamiento jurídico.[25]

De lo anterior, cabe destacar la importancia que Dworkin concede a los razonamientos, en este caso vinculados al derecho consuetudinario[26], valoración sobre los razonamientos que también Hart llega a compartir, aunque éste, desafortunadamente, se olvida de ellos, como explícitamente lo manifiesta. Este énfasis en los razonamientos pone en evidencia el papel fundamental que éstos juegan en la decisión racional. Para destacar el rigor de los mismos, Rawls (1997:121) señala: "El argumento intenta a la postre ser estrictamente deductivo". También Nozick (1988:155) considera:

---

[23] De acuerdo a Rodríguez (1997:54), la regla de reconocimiento es "un parámetro de identificación de las normas de un sistema jurídico".

[24] H.L.A. Hart, "The concept of law", Oxford, Claredon Press, 1961. Trad. cast. de Genaro Carrió, "El concepto de derecho, Buenos Aires, Abeledo-Perrot, 1963".

[25] Según Agudelo (1999): "El Derecho no puede seguir siendo concebido como un mero sistema de normas identificables por un procedimiento formal y ajeno a consideraciones morales sustantivas; aquí yace una de las falencias del positivismo de considerar el Derecho como mero conjunto de reglas, sin identificar la presencia de principios que confluyen por su fuerza argumentativa".

[26] Para Dworkin (1997:166) derecho consuetudinario se da "cuando ninguna norma escrita juega un papel importante en el asunto jurídico y la discusión gira en torno a qué principios o normas jurídicas 'subyacen' o 'están detrás' de las decisiones tomadas por otros jueces en el pasado".

> Las reglas de inferencia tienen la característica de mantener la verdad, y como cualquier conclusión deducida a través de aplicaciones repetidas de tales reglas a partir sólo de premisas verdaderas es, también, verdadera . . . El paralelo entre las transformaciones que conservan la justicia y las transformaciones que conservan la verdad, permite ver dónde falla, así como dónde vale.

Con base en lo señalado, Bentham, Hart, Dworkin, Nozick y Rawls coinciden en destacar el rigor lógico en el proceso de la decisión racional. En cuanto a esta última, una aplicación de la decisión racional de suma importancia se da en la "Teoría de la justicia" de Rawls, pues de acuerdo con Mouffe (1988): "A Theoly [*sic*] of Justice daba a entender que Rawls buscaba un algoritmo de la elección Racional", de ahí el interés de analizar la decisión racional en la referida obra de Rawls.

2.3 La decisión racional en la Teoría de la justicia de Rawls

Para Rawls (1997:24), el objetivo de su teoría es generalizar la teoría del contrato como figura en Lucke, Rousseau y Kant. Considera que los principios de la justicia en la estructura básica de la sociedad son el resultado del acuerdo original que las partes, como seres libres y racionales, aceptarían en una posición inicial de igualdad (*posición original*). Dichos principios regularían los diferentes acuerdos posteriores, conformando así lo que el autor llama justicia como imparcialidad.

Según Rawls (1997:27), en el caso de la justicia como imparcialidad, se sostiene que las partes en la posición original elegirían dos principios: el primero sobre las libertades fundamentales; mientras que, el segundo se encarga de la distribución de las cargas y ventajas relativas a la cooperación, de tal modo que esta división favorezca la cooperación voluntaria, incluso la de los más desfavorecidos. La justicia como imparcialidad es una teoría contractual, donde el contenido del acuerdo es aceptar ciertos principios morales. Para obtener dichos principios, Rawls (1997:69) señala:

Habrá de observarse que estos principios son un caso especial de una concepción más general de la justicia que puede ser expresada como sigue:

> Todos los valores sociales –libertad y oportunidad, ingresos y riqueza, así como las bases del respeto a sí mismo– habrán de ser distribuidos igualitariamente a menos que una distribución desigual de alguno o de todos estos valores redunde en una ventaja para todos.

2.3.1 Los principios de la justicia

Según Rawls (1997:20), la estructura básica de la sociedad, al ser el modo en que las instituciones sociales importantes distribuyen los derechos y deberes fundamentales, así como las ventajas que resultan de la cooperación social, se convierte entonces en el objeto primario de los principios de justicia. Rawls (1997:62-67) considera, éstos asignan derechos y deberes fundamentales y establecen la división de las ventajas proporcionadas por la cooperación social.

A través de sucesivas formulaciones provisionales de los principios de justicia, sobre los que se cree que habría acuerdo en la posición original, se llega a obtener la formulación final de dichos principios (para las instituciones), presentada por Rawls (1997:280):

> *Primer Principio*
> Cada persona ha de tener un derecho igual al más extenso sistema total de libertades básicas compatible con un sistema similar de libertad para todos.
> *Segundo Principio*
> Las desigualdades económicas y sociales han de ser estructuradas de manera que sean para:
> a) mayor beneficio de los menos aventajados, de acuerdo con el principio de ahorro justo [principio de diferencia], y
> b) unidos a los cargos y las funciones asequibles a todos, en condiciones de justa igualdad de oportunidades [principio de justa igualdad de oportunidades].

Además, el autor supone que los dos principios están ordenados serial o lexicográficamente, igualmente las dos partes del segundo. Significa que la prioridad en su aplicación, viene dada en el orden que aparecen escritos.

2.3.2 La posición original

Rawls (2002:38-39) explica, al considerar la sociedad como un sistema equitativo de cooperación entre ciudadanos como personas libres e iguales, es necesario determinar los términos equitativos de cooperación a través de un acuerdo alcanzado bajo ciertas condiciones, para ser aceptado desde la justicia política. Rawls (2002:40) concluye: "La posición original determina los términos equitativos de la cooperación social entre ciudadanos concebidos como tales personas".

Según Rawls (1997:27), para determinar qué principios de justicia serían escogidos en la posición original, se debe describir esta situación al igual que la formulación del problema de elección que plantea. Rawls (1997:30) explica, una concepción de justicia es más razonable o justificable que otra, si sus principios son elegidos por las partes, frente a los de la otra, para regular la justicia. Según este criterio de aceptabilidad, deberá obtenerse una jerarquización de las concepciones de justicia, a través de un problema de deliberación por las partes, es decir, se determina qué principios sería racional adoptar a partir de la posición original. Esto relaciona la teoría de la justicia con la teoría de la decisión racional. Más aún, para Rawls (1997:29): "La teoría de la justicia es una parte, quizá la más significativa, de la teoría de la elección racional", precisamente, así el autor destaca la aplicación de dicha teoría de la decisión en la elección de los principios de la justicia.

Rawls (1997:121) afirma: "La posición original es una situación puramente hipotética". Y esto implica, según Rawls (2002:41): "Los principios que acordarían las partes tienen que decidirse mediante análisis". Para ello, Rawls (2002:41) señala, la caracterización de la posición original debe considerar sobre las partes cómo están situadas y han sido descritas, la información que poseen, las razones que consideran y las alternativas que tienen; y a partir de dicha caracterización, calcular deductivamente los principios.

Según Rawls (1997:30), se supone que hay un acuerdo en que los principios de justicia sean elegidos bajo ciertas condiciones. Por tanto, hay que demostrar que dichas condiciones se incorporan para justificar cierta caracterización de la posición original. Partiendo de premisas débiles, que deberán ser naturales y plausibles, obtener conclusiones más específicas, los principios de la justicia. Esto es posible debido a que las premisas, al considerarlas conjuntamente, imponen restricciones significativas a dichos principios. Es más, lo ideal sería llegar a ciertos principios únicos.

También Rawls (1977:31), considera que en la posición original todos los grupos tienen los mismos derechos para elegir principios. El propósito de estas restricciones es asegurar la igualdad de las partes como personas morales, es decir, como individuos que poseen una concepción del bien y capacidad para tener un sentido de la justicia.

Rawls (1997:135-136) afirma que, el propósito de la posición original es establecer un procedimiento equitativo, mediante la idea de justicia puramente procesal, para que los principios elegidos sean justos. Para ello se supone que las personas están bajo un velo de la ignorancia, obligadas así a evaluar los principios con base en consideraciones generales. Se supone que las partes desconocen ciertos tipos de hechos: nadie conoce su lugar en la sociedad, su suerte en la distribución de talentos y capacidades naturales, su propia concepción del bien, los rasgos de su propia psicología ni las circunstancias de su propia sociedad. Las partes sólo conocen que su sociedad está sujeta a las circunstancias de la justicia y todos los hechos generales que afectan a la elección de los principios de la justicia: cuestiones políticas y económicas, las bases de la organización social y los principios de la psicología humana. Esta información general es necesaria porque las concepciones de la justicia tienen que ajustarse a los sistemas de cooperación social que han de regular.

Además, según Rawls (1997:137), las restricciones que determinan la posición original deberán asegurar que siempre se escojan los mismos principios. El velo de la ignorancia

contribuye a que esto suceda, porque brinda información pertinente y la misma en todo momento.

Para Rawls (1997:140), las personas, teóricamente definidas en la posición original, son racionales al elegir entre principios. Cada una hace todo lo que puede por promover sus intereses, prefieren tener más bienes primarios que menos para realizar sus planes de vida. En este sentido, Rawls (1997:360) explica, en igualdad de circunstancias las partes optan por mayor libertad, oportunidades, riquezas e ingresos y respeto propio, éste quizás el más importante de los bienes primarios.

Rawls (1997:141) señala, el concepto de racionalidad empleado aquí es el usual de la teoría social: una persona racional frente a un conjunto de opciones que se le ofrecen, las jerarquiza para seguir el plan que satisfaga el mayor número de sus deseos y las mayores posibilidades de realizarlo con éxito.

Por último, para decidir sobre los principios de justicia, Rawls (1977:123) considera: "Se les presenta esta lista [de las concepciones tradicionales de la justicia] a las partes y se les pide que convengan unánimemente acerca de qué concepción es la mejor entre las enumeradas".

2.3.3 La decisión racional a favor de los dos principios de justicia

Obtenida la caracterización de la posición original, mediante supuestos sobre las partes, se procede ahora a la elección de los principios de justicia. Según Rawls (1997:150-153), se trata de concluir a favor de ambos principios de justicia, al ser considerados como solución maximin al problema de la justicia social. Esto es posible, debido a que la regla maximin se puede aplicar a situaciones caracterizadas por tres rasgos principales y que la posición original posee en un grado muy elevado dichos rasgos: primero, no se toman en cuenta las probabilidades de las posibles circunstancias; segundo rasgo, la persona que escoge no le importa lo que pueda todavía ganar por encima del mínimo que indica la regla maximin; esto

último lleva al tercer rasgo, las alternativas rechazadas tienen resultados que difícilmente pueden ser aceptadas, la situación implica graves riesgos.

En cuanto a la posición original: para comenzar, el velo de la ignorancia impide todo conocimiento sobre las probabilidades; las partes no desean poner en peligro el mínimo asegurado por los principios, lo que ilustra el segundo rasgo; por último, el tercer rasgo se cumple al suponer que otras concepciones de la justicia puede llevar a instituciones intolerables para las partes.

Por lo tanto, a la posición original se puede aplicar la regla maximin. Ésta, según Rawls (1997:150; 2002:138), afirma que se debe adoptar la alternativa cuyo peor resultado sea superior al peor de los resultados de las otras alternativas. Así Rawls (1997:153) concluye, como los dos principios de la justicia aseguran un mínimo satisfactorio, entonces, en la posición original, las partes elegirían ambos principios, es decir, éstos serían la solución maximin al problema de la justicia social.

Con base en lo señalado en esta sección 2.3.3, se puede concluir en términos generales que la decisión racional, al nivel matemático, está caracterizada por un algoritmo maximin, y que puede ser aplicado a una situación inicial que cumpla ciertas condiciones.

2.3.4 Sobre la estructura lógica de la decisión racional en la Teoría de la justicia de Rawls

Como se afirma en la sección 2.2, tanto Bentham, Hart, Dworkin, Nozick como Rawls destacan la importancia del rigor lógico en el proceso de la decisión racional. Aunque el último de ellos lo hace más explícitamente, al afirmar en Rawls (1997:121): “Deberíamos aspirar a una especie de geometría moral [axiomatización de la moral] con todo el rigor que su nombre indica”. Rawls elige como referencia ideal de rigor, para la construcción de su teoría, la geometría euclídea. En su libro “Fundamentos de la geometría”, publicada en 1899, según Efímov (1984:32): “Hilbert enuncia un sistema completo de axiomas de la geometría

euclidiana, es decir, una lista de premisas básicas de las cuales se pueden obtener todos los demás resultados de esta geometría, por medio de deducciones lógicas". Sobre la consistencia del sistema el propio Hilbert (1944:16) señala: "No es posible, mediante razonamientos lógicos, deducir algo que esté en contradicción con los axiomas establecidos"; y, la axiomatización de una teoría matemática, supone el mayor nivel de rigor que puede alcanzar dicha teoría y, por tanto, una teoría científica.

No obstante, existen ciertas diferencias entre la estructura lógica de la teoría de la decisión racional, utilizada en la teoría de la justicia de Rawls, y los fundamentos lógicos de la propia geometría euclídea. Esta última es una teoría axiomática deductiva. Pues, según Efímov (1984:38): "Cada afirmación se fundamenta refiriéndonos bien a los axiomas, bien a los teoremas demostrados con anterioridad".

Para Efímov (1984:32-33): "En los razonamientos rigurosamente lógicos efectuados al demostrar los teoremas, hay que tratar únicamente con estas propiedades de los objetos las cuales son precisamente aquellas que deben ser destacadas en los axiomas y definiciones". Así, las demostraciones de los teoremas en geometría euclídea, se fundamentan en razonamientos válidos, entonces dichas demostraciones son estrictamente pruebas. Sin embargo, Rawls (1997:125) considera:

> La decisión de las personas en la posición original depende . . . de una ponderación de diversos puntos de vista. En este sentido, en la base de la teoría de la justicia hay una llamada a la intuición . . . El argumento en su favor no es, estrictamente hablando, una prueba.

Por lo tanto, el argumento a favor de una determinada concepción de la justicia no es, estrictamente, una prueba. Concretamente, el argumento a favor de los principios de justicia no es, estrictamente, una prueba, porque se recurre a la intuición.

Como segunda diferencia, la geometría euclídea se fundamenta en una lógica monotónica: las conclusiones alcanzadas nunca son retractadas. Mientras que, según Rawls (1997:120-121), el

resultado del acuerdo original sólo permanece mientras no cambien las circunstancias; al cambiar éstas, las conclusiones alcanzadas pueden ser retractadas. Es decir, las conclusiones alcanzadas en el acuerdo original, pueden ser retractadas al cambiar las circunstancias. En este sentido, los fundamentos lógicos que subyacen en la teoría de la decisión racional, superan los límites de una lógica monotónica, al involucrar razonamientos no monotónicos; pues, el acuerdo original sólo permanece mientras no cambien las circunstancias[27]. Esto obliga a distinguir entre lo sincrónico y lo diacrónico. Para Saussure (s.f.:131): "El uno es una relación entre elementos simultáneos, el otro la substitución de un elemento por otro en el tiempo". Al respecto, Saussure (s.f.:135) explica: "Los hechos sincrónicos, sean los que fueren, presentan cierta regularidad, pero no tiene [*sic*] ningún carácter imperativo; los hechos diacrónicos, por el contrario, se imponen. . . pero no tienen nada de general". En los primeros, la regularidad se corresponde con las condiciones generales que caracterizan la posición original; con respecto a los hechos diacrónicos, se da lo imperativo y lo específico de las circunstancias.

2.4 La argumentación en la decisión racional

Según Vargas y Cárdenas (2005:77-78) la decisión racional:

> construye de manera compartida formas de interpretar el mundo social que a su vez permiten el despliegue colectivo del comprender, a partir del conocimiento mutuo de intereses, y de su posible validez, para el desarrollo de la acción estratégica; es decir, impone una pragmática del discurso donde las posibilidades de interactuar dependen, no de una visión de la verdad, sino de la pluralidad de perspectivas desde las que puede ser interpretado el sentido de lo público, el despliegue de la construcción política y el horizonte de convivencia, desde los distintos sujetos que intervienen en la acción compartida.

Para Vargas y Cárdenas (2005:80): "La decisión racional tiene que ver, entonces, con elevar al ámbito del concepto las formas en que se comprende, se interpreta y se propone el horizonte de los sujetos en el mundo de la vida social y política". Sin embargo para Rawls, en la decisión racional recurrir a distintos puntos de vista supone una limitación, pues tal como lo

[27] En este sentido Velilla (1974:42) afirma: "La historia no hace a los sistemas absolutos, sino provisionales".

confirman sus propias palabras, en Rawls (1997:125), “hay una llamada a la intuición”. Pero Vargas y Cárdenas (2005:77) señalan, la decisión racional “consiste en un cambio de actitud que gira del punto de vista de la verdad como postulado a la persuasión como camino para hallar posibles acuerdos”. Esta apreciación representa un avance frente a lo aquí señalado por Rawls. Además, Vargas y Cárdenas (2005:77) consideran:

> La doctrina de la persuasión parte del supuesto de que ninguno de los interlocutores se halla en el punto final al que tiene que arribar todo razonamiento. Esta doctrina también supone que el proceso argumentativo encamina a los interlocutores a *comprender*, en diversas direcciones:
> • Comprender los fenómenos sobre los cuales el orador está argumentando.
> • Comprender el punto de vista del interlocutor.
> • Comprender la adecuación o preferibilidad de una manera de interpretar el sentido de la acción para que haya consenso o para que se pueda construir la estructura social de la acción.
> • Hacerse comprender, como orador, por los otros –por la audiencia.

Vargas y Cárdenas (2005:78) afirman:

> Al argumentar se asume que, en efecto, hay intereses y que los sujetos pueden hacer visible el horizonte desde el cual los están sorteando; que, si bien valen para sí, *pueden* o *no* valer para el conjunto de los interlocutores y, en ese sentido, para ese ámbito de la sociedad en el cual se están jugando.

Vargas y Cárdenas (2005:91) concluyen: “si puede resolverse de dos modos es porque entra en juego la decisión. A ésta se opone la determinación. En la decisión las cosas pueden ser así o de otra manera”. Al respecto, Lukasiewicz (1975f:120) señala: “He estado siempre sumamente interesado en el tema del determinismo e indeterminismo; lo he asociado con el problema de las lógicas polivalentes”. En este sentido, la decisión racional está vinculada a las lógicas polivalentes.

Ahora bien, Vargas y Cárdenas (2005:91) señalan, la retórica recae:

> *sobre lo que puede ser así o puede ser de otra manera*. El campo de lo probable o de lo verosímil o de lo razonable está creado por el hecho de que sobre un conjunto de asuntos *no* es posible determinar la *verdad*. Entonces . . . aparece la *retórica*.

Vargas y Cárdenas (2005:88-89) explican:

> La retórica es considerada, desde la Antigüedad Clásica, en su doble problemática: de una parte, como *mero arte* que se orienta –con el ornato- al engaño, al "infundio" e incluso a la mentira proferida deliberadamente. A esta vertiente se suele identificar con la *sofística*. De otra parte, en cambio, es el estudio de lo *verosímil*, lo *razonable* y lo *plausible*.

Para Vargas y Cárdenas (2005:79):

> El valor de la retórica es reconocer que hay un poder que radica en la posibilidad deliberatoria; que ésta es capaz de llevar a que los distintos interlocutores se adhieran desde la racionalidad, apelando a lo razonable, a puntos de vista; que esta adhesión no sea indefinida en el tiempo –eterna-, sino que implique un acuerdo, sujeto a tiempo y espacio.

Vargas y Cárdenas (2005:80) afirman, "siempre el problema deliberativo, que conduce la decisión racional, es el de encontrar motivos y razones que, en efecto, son circunstanciales, dependen de la comunidad donde se elaboran, pero que valen a lo menos para esa comunidad". Vargas y Cárdenas (2005:92) señalan, "de lo que se trata es de ver la *argumentación*, las *condiciones argumentativas* y las *consecuencias argumentativas*". En tal sentido, Vargas y Cárdenas (2005:95) consideran:

> Se procura hallar un *invariante* de la *argumentación* que desde sí misma ofrezca una *estructura* encaminada a la persuasión . . . Así, la retórica tiene que detener su análisis en la capacidad de razonar mediante silogismos, o de argumentar, porque si se comprenden cómo ocurre este proceso –*para uno y para todos*- cualquiera que use *justamente* la razón: tendrá que llegar a conclusiones semejantes.

Así Vargas y Cárdenas (2005:95-96) destacan: "De ahí que sea tan relevante diferenciar . . . la *prueba* de todos los posibles *mecanismos para influir en la toma de decisiones*". Sobre la

prueba Vargas y Cárdenas (2005:44) señalan: "La teoría de la argumentación se desarrolla desde dos formas de pruebas: entimemas y ejemplos", y consideran con Aristóteles en que el ejemplo corresponde a la inducción y a la deducción el entimema. Con respecto a este último Vargas y Cárdenas (2005:97) explican: "Si sobre lo sentado como base para el razonamiento, en las premisas, *pudiera ser de otro modo*, entonces la conclusión ha de ser *verosímil*".

Según Vargas y Cárdenas (2005:120):

> Se argumenta cuando se cae en la cuenta de lo que teníamos dado implícitamente entra en crisis, cuando no se puede seguir actuando bajo el presupuesto del acuerdo, de la validez de lo establecido. Por así decir –con base en el transformador- el Mundo-de-la-Vida$_1$ es el de la presunción del acuerdo; ahí es donde opera lo tácito y lo sobreentendido, pero deviene la *crisis* o el no-estar-en-acuerdo o el *desacuerdo*. Aquí se requiere volver fenomenológica o, al menos, intuitivamente sobre ese Mundo-de-la-Vida$_1$ para volver a hallar lo que queda como *tópico*. De ahí se toman los insumos para proceder *entimemáticamente* de modo que opere el *transformador*. Éste, en efecto, es válido cuando permite derivar a un Mundo-de-la-Vida$_2$ en el cual vuelve a haber acuerdo, consentimiento o, por lo menos, acuerdo fruto de la negociación. Este Mundo-de-la-Vida$_2$ paulatinamente va adquiriendo *sedimentación* hasta comportarse, de nuevo, como Mundo-de-la-Vida$_1$ y el ciclo reencadena o reinicia.[28]

Cuando las cosas pueden ser así o de otra manera, aparece la decisión racional que mediante la persuasión a través de la argumentación se llega, entimemáticamente, a conclusiones plausibles, a acuerdos que al depender del tiempo llevan a que la decisión racional imponga una lógica que apoye razonamientos no monotónicos.

2.4.1 Inclusión del otro

[28] Según Vargas (2003a:279): "'Mundo de la vida' es el título de ese ámbito de experiencias -cosas, hechos, motivos, sentimientos, razones, ideales– que tienen contenido humano y para el ser humano".

Vargas y Cárdenas (2005:76) señalan, "*argumentar impone el reconocimiento del otro*; este proceso sólo es eficaz en la medida en que se opera la mentada *inclusión*". Vargas y Cárdenas (2005:76) explican:

> En el desarrollo de la argumentación se busca el consentimiento y concurso mental (psíquico, espiritual, deliberativo) del otro; a éste se lo *reconoce* con capacidad para discutir, para presentar argumentos diversos y rivales; es decir, la retórica aparece como una posible estructura de las ciencias sociales porque se parte del supuesto de que lo social es, en efecto, social; o sea, no es dominio del que presenta las tesis al auditorio, sino que tal dominio lo es de los interlocutores, que están insertos en la experiencia y en la vida de la sociedad.

Vargas (1997:1-2) afirma:

> Sólo se puede ser moral a partir de la toma de conciencia subjetiva de las posibilidades de realización de la vida comunitaria . . . Al analizar los sentimientos morales como se presentan en la vida ordinaria, se cae en lugares comunes.

Para Husserl (1987:¶183):

> Comunidad no significa igualdad de maneras, de formas de acciones personales, de modo de pensar, de opiniones, actividades científicas, etc. Significa más bien personas que, manteniéndose en comunidad, permanecen en tal relación en la unidad de una conexión espiritual activa, sea la acción visible en lo singular o no.

Husserl (1987:¶193-194) explica:

> Cada sujeto singular tiene, como miembro de una comunidad, sus representaciones, convicciones, valoraciones y voliciones. Pero en la cohesión social tengo convicciones como persistentes (al igual que anteriormente representaciones) surgidas sobre la base de mi propia experiencia y, eventualmente, de forma indirecta, a través de la experiencia de los Otros, a la que puedo considerar como convicciones suyas; esto es: según yo sé, los Otros tienen también convicciones (sea surgidas desde ellos mismos, sea transmitidas eventualmente, en primer lugar, por mí a ellos) que concuerdan con las mías: los Otros piensan y creen lo mismo que yo y saben, por su parte, que, en relación a contenidos determinados, su caso es también el mío. Nos conocemos recíprocamente como "juzgando" lo mismo (en sentido permanente). Algo muy

> similar ocurre con las valoraciones. Y también hay un posible reino de necesidades (demandas, deseos) comunes permanentes, de esfuerzos y decisiones constantes que reconocemos justamente como comunes . . . En cualquier caso, hay una convicción, una apreciación, una decisión o acción comunitarias . . . En la comunicación entramos en contacto unos con otros, formamos una unidad personal de nivel superior.

Sobre esta última Vargas (2003b:104) señala: "Las Personalidades de Orden Superior son la expresión de la voluntad comunitaria, de la voluntad articulada de distintos sujetos que, reconociendo su interdependencia con relación a los demás, buscan establecer un proyecto común". Además, Husserl (1987:¶204) afirma: "El ideal comunitario es el de una comunidad de sujetos racionales que aspiran a serlo y que se ponen a sí mismos como tales, pero no aisladamente, sino uno a otro en una voluntad universal".

Sobre una necesidad de vínculo, Vargas (1997:12) considera:

> En parte respetamos a los demás porque, efectivamente, puede cambiar la 'correlación de fuerzas' y podría suceder que todos mis actos de tiranía se convertirían en objeto de revancha para quien fue mi ofendido; pero también puedo tratar al otro como un ser humano en el más pleno sentido de la palabra porque él es también mi par, con el puedo –desde la tolerancia– abrirme perspectiva, él –bajo ciertas circunstancias– podría convertirse en un aliado para mí, e.d., juntos estaríamos en mejores condiciones de enfrentar los peligros que nos amenacen.

Vargas (1997:3) continúa señalando: "nos encontramos con una dimensión interpersonal que determina el sentido mismo de nuestro comportamiento; en cierta forma podríamos ya hablar a partir de lo que nos dan los sentimientos de una especie de 'intuición valorativa'".

Vargas (1997:5) concluye:

> Se puede construir una 'sociabilidad común' auque no compartamos la misma fundamentación para el despliegue de la vida espiritual o cultural. Podríamos llegar a tener una cierta 'unidad de criterio' o –como prefieren otros— una 'ética mínima' aún cuando tengamos diferentes e, incluso, opuestos esquemas de fe. Podríamos hallar una 'ética ciudadana' o una 'ética civil' . . . personas con cualquier presupuesto tiene

> igualdad de oportunidades y de derechos, es igualmente sujeto de respeto y se merece el reconocimiento.

Según Vargas y Cárdenas (2005:130):

> "los otros" y "nosotros", a una, tengan el uso a la voz propia para decir sobre sí mismos, al tiempo que para decidir los horizontes de validez sobre los cuales quieren hacer y construir proyectos de sociedades cada vez más humanas . . . la inclusión reviste no sólo el carácter ético de dar la voz al otro, sino el talante político de dar y tomar la voz en aras de una construcción de una socialidad común.

2.4.2 De la lógica de exclusión a la lógica de inclusión

Según Vargas (2003a:17): "La labor de la retórica en la construcción de una sociedad común no fue reconocida bajo ninguno de los ropajes del positivismo. Allá, más que 'persuadir' se trata de 'probar'". Si bien, Vargas (2003a:18) señala:

> La pedagogía y las ciencias sociales han procurado su "liberación" del positivismo. No por ello se han querido exonerar del rigor y de la sistematicidad. Sin embargo, éstas no tienen que ver con la *demostración*, sino con los procesos persuasivos.

Para Vargas (2003a:20):

> *La retórica es una fuente de sentido para la construcción de la socialidad común en los procesos de formación propios tanto de la pedagogía como de las ciencias sociales* . . . la construcción del sentido desde la deliberación, desde el *acontecimiento* del debate en que cada uno de los interlocutores se valida opinando, discutiendo, en fin, construyendo consensos y disensos racionales, los cuales, en su estructura, fundan *la inclusión del otro*. Y, ¿quién es el otro? En cada caso, el que se ha excluido, el marginado, el que tiene que *empoderarse*, el que ha sido menguado o disminuido en su *potencia de ser*".

De acuerdo a lo hasta ahora señalado, en la decisión racional el interactuar depende de la pluralidad de puntos de vista que, a través de la argumentación –entimemáticamente-, exige la inclusión del otro. Ahora bien, según Ocampo (2007:1), "todo postulado incapaz de la

conjunción deriva en exclusión de . . . «los otros»"; se necesita, entonces, contar con postulados sobre la conjunción para lograr la inclusión del otro. Así, la argumentación en la decisión racional, se articula en la conjunción, permitiendo de este modo la pluralidad de perspectivas, distintos puntos de vista. En este sentido, la decisión racional impone la lógica de la inclusión; además, el paso de los otros al nosotros equivale al tránsito de la lógica de la exclusión a la lógica de la inclusión. Por tanto, de acuerdo a lo considerado a lo largo de esta sección 2.4, la decisión racional impone una lógica de inclusión polivalente que apoya razonamientos no monotónicos.

2.4.3 Sobre la pedagogía como formación

Vargas (2003a:288) señala:

> Concibo la pedagogía como una *praxis*, no como un mero discurso sobre los hechos que acontecen en la formación, sino como efectivos proyectos ciudadanos de participación deliberativa. Ésta es, a su vez, "control crítico", es decir, ámbito donde muchas de las aspiraciones se revelan meramente personales, irrespetuosas de los otros y, por tanto, en ese "revelarse" se convierten en susceptibles de crítica y hasta de sanción social– y "espacio de socialización" –en el que aparecen inesperadas expectativas, sentimientos y razones que enriquecen el horizonte compartido y llevan, finalmente, a nuevas posturas para el desarrollo de la comunidad y de la sociedad–.

Vargas (2003a:17) considera:

> El campo de la pedagogía y de las ciencias sociales . . . tiene que vérselas, cada vez más, con la manera como los sujetos pueden hacerle visible a los otros que el horizonte que proponen puede ser compartido, puede permitir la realización conjunta; en fin, tiene que ver con la manera como se puede dar el tránsito de los "otros" al "nosotros".

Según Vargas (2003a:285):

> *La pedagogía forma en el reconocimiento de sí mismo como otro de los otros y de los otros como condición de posibilidad de sí mismo.*

> El proyecto mismo de la pedagogía puede resumirse como: comprender-se-&-ser-comprendido . . . No obstante, ese sí-mismo –individuo, sujeto, persona– sobre el que obra la pedagogía *no es*. Como tal, ha llegado a ser; tiene la perspectiva de ser. Ha sido obrado –por los otros; en cierto modo, ha sido moldeado– y obra –por los otros, sobre los otros–.

En cuanto a la formación, Vargas (2003a:104) considera: "Bajo este título se puede comprender el fenómeno de conocimiento y reconocimiento en el cual los sujetos logran tomar conciencia de sí mismos como miembros de una comunidad, de una vida comunitaria y comunicativa". En tal sentido, Vargas (2007:27) concluye: "La formación, entonces, es un lugar de despliegue del encuentro de *personas singulares* y *personalidades de orden superior* que mutuamente se afectan y codeterminan".

Para Vargas (2003a:14):

> La *formación* sólo puede ser pensada desde la "localidad", de ese [*sic*] esa "porción de mundo" donde uno se sabe sujeto, donde uno padece por comprender y realizar unos valores; allí, en el lugar donde uno se encuentra solidario con los valores de otros, cómplice de sus búsquedas, tolerante frente a otras perspectivas para construir el horizonte de sentido. Ahí en donde uno puede dar cobijo al otro, en el ámbito en el cual construye su identidad, dinámicamente, dejándose afectar por los otros y afectándolos a ellos a su vez con el propio comportamiento.

Sobre la formación, Vargas (2003a:14-15) continúa afirmando:

> Se trata de hacer de *nosotros mismos* nuestro tema de meditación; desde ese *nosotros*, prever la inclusión del otro, caracterizar la relación solidaria con él y, asimismo, exigente de respeto, de comprensión y de cooperación. Es un nosotros en *apertura*, *dispuesto* al otro; pero, por ello mismo, crítico de sí y del *alter*.

Vargas (2003a:16) concluye:

> Se exige, por tanto, un "distanciamiento" del mundo de la vida como ámbito de una subjetividad -vale decir- autista y el "acercamiento" a la virtualidad de la presencia de los *otros*, aun en los escenarios más privados, íntimos y apacibles.

Según Vargas (2003a:18-19):

> Si se quiere *que la pedagogía y las ciencias sociales vuelvan a ser sociales*, urge que se reinserten en el mundo de la vida y que, por ello, den pasos en la dirección de alcanzar estrategias para que los espíritus puedan ser persuadidos . . . tienen que vérselas con lo preferible, es decir, con los valores; con la manera como ellos se convierten en formas de vida.

Vargas (2003a:16) considera:

> La pedagogía –en cuanto proyecto de *formación*- sitúa su estudio frente a la posibilidad de hacer, junto con las ciencias sociales, una búsqueda mancomunada de fundamento a partir de una pregunta . . . *¿cómo persuadir a los sujetos de unos valores que, al realizarlos, hagan más digna y plena la vida de los seres humanos?*

Así, la decisión racional al permitir la pluralidad de perspectivas, distintos puntos de vista, impone la lógica de inclusión, la inclusión del otro; pero, por el paso de los otros al nosotros se interesa la pedagogía; ésta forma en verse a sí mismo como otro de los otros y a los otros como posibilidad de sí mismo. Por lo tanto, en este sentido, aportar a la decisión racional es aportar a la pedagogía como formación.

2.5 Teoría de plausibilidad: la lógica de plausibilidad

La teoría de plausibilidad fue creada en 1987 por Ulises Agüero, y en Agüero (1987:3) señala: "Consideramos que nuestra teoría contribuye al establecimiento de la arquitectura de computadoras como una disciplina científica" (traducción libre)[29]. De nuevo, refiriéndose a su teoría, Agüero (1988:3) afirma:

> Esta teoría consta de principios que caracterizan la naturaleza de los diseños plausibles, definen formas en las cuales se pueden desarrollar enunciados de plausibilidad para hacer afirmaciones sobre los méritos y deficiencias de un diseño y sirven como pautas de razonamiento durante el desarrollo de diseños.

[29] We believe that our theory contributes to the establishment of computer architecture as a scientific discipline.

Aunque, según Núñez, Agüero y Olivares (1998:4), la teoría de plausibilidad: "ha sido aplicada en el área general de toma de decisiones en grupo" (traducción libre)[30]. Sobre la teoría de plausibilidad, Rodríguez (1999:4) considera:

> La teoría de plausibilidad explica la aceptabilidad de una *decisión*. En general, una decisión es un conjunto no vacío y finito de afirmaciones, llamadas *restricciones*, las cuales especifican sus características relevantes . . . La plausibilidad de una decisión viene determinada por la plausibilidad de un número dado de afirmaciones sobre dicha decisión.
> La plausibilidad de una afirmación A se define en términos de *evidencia* sobre la veracidad de A.

Según Rodríguez (1999:6):

> La naturaleza evolutiva de la decisión, como consecuencia de sucesivos refinamientos o reconsideraciones de una decisión, puede llevar a cambios en la evidencia sobre la veracidad de las afirmaciones que la forman y, por consiguiente, en los estados de plausibilidad de las mismas.

Por ello, Agüero (1988:5) afirma: "El modo de razonamiento asociado con la teoría de plausibilidad es inherentemente no monotónico, puesto que existe la posibilidad de que algunas conclusiones sean retractadas durante el proceso de diseño". Sin embargo, ante esta situación Rodríguez (1999:6-7) comenta:

> Para resolver este problema, la teoría de plausibilidad considera el proceso de decisión por etapas.
> *Etapa*. Es aquella parte del proceso de decisión en la cual no hay posibilidad de cambio en la evidencia.
> Por lo tanto, en el proceso de decisión, la evidencia depende de la etapa y la afirmación consideradas. [31]

---

[30] has been used in the general area of group decision making.

[31] La teoría de plausibilidad cuenta con ciertas estructuras; sobre algunas de ellas, en particular, Rodríguez (1999:74) señala: enunciados de plausibilidad, para establecer la plausibilidad de afirmaciones; sistema de verificación, para determinar empíricamente la evidencia de las afirmaciones. La teoría de plausibilidad utiliza tales estructuras porque, según Rodríguez (1999:73): "Permiten que el proceso de decisión se desarrolle de manera estructurada y sistemática".

Sin embargo, al referirse a la no monotonicidad, Rodríguez (1999:70) explica: "Ello no supone una gran dificultad . . . Se debe a que la evidencia sobre la plausibilidad de una afirmación, no varía en cada etapa. Por ello, dentro de cada etapa se da la monotonicidad".

La definición, al nivel funcional, de la evidencia y plausibilidad de una proposición son elementos formales de la teoría de plausibilidad. La formalización de ésta es relativamente reciente[32], de 1999, realizada por Manuel Rodríguez. Con respecto a dicha formalización, Rodríguez (1999:4) señala: "Se inicia con una versión más amplia de la misma, al nivel de toma de decisiones, y con una representación funcional de la evidencia y de la plausibilidad". Rodríguez (1999:7-8) explica:

> La evidencia se representa por medio de las funciones numéricas ec, ef, ecs y efs. Sea K el conjunto de etapas y F el conjunto de afirmaciones, entonces . . .
>
> ec, ef: $K \times F \rightarrow \{0,0.5,1\}$ y ecs, efs: $K \times F \rightarrow \{0,1\}$ tal que,
>
> ec(k,A)=
> 1, si se sabe que existe evidencia en contra
> 0.5, si no se sabe si existe o no evidencia en contra
> 0, si se sabe que no existe evidencia en contra.
>
> ef(k,A)=
> 1, si se sabe que existe evidencia a favor
> 0.5, si no se sabe si existe o no evidencia a favor
> 0, si se sabe que no existe evidencia a favor.
>
> ecs(k,A)=
> 1, si ec(k,A)=1 y se sabe que la evidencia es significativa
> 0, en otro caso.
>
> efs(k,A)=
> 1, si ef(k,A)=1 y se sabe que la evidencia es significativa
> 0, en otro caso.

[32] Aunque los primeros intentos de su formalización ya se dan en 1988, recién creada la teoría, pues Agüero (1988:12) comenta: "Carlos Loría se encuentra investigando la posibilidad de desarrollar un sistema axiomático de plausibilidad".

Mientras que Agüero (1988:4) señala, la naturaleza de la evidencia "depende del método empleado para determinar la veracidad de la afirmación". Y en Agüero (1988:4), continúa explicando que, la evidencia es una combinación de los tres tipos siguientes: precisa y formal, aproximada, y experimental[33]. Por tanto, el determinar la evidencia de una proposición se sale del dominio de la lógica de plausibilidad.

Según Rodríguez (1999:9):

> La plausibilidad de una afirmación se expresa mediante la función *califica*, representada por cal, donde. . .
>
> $cal:K\times F\rightarrow\{0, 1, 2, 3, 4\}$ tal que,
> $cal(k,A)=0$, si $ec(k,A)=1$ y $ecs(k,A)=1$
> $cal(k,A)=1$, si $ec(k,A)=1$ y $ecs(k,A)=0$
> $cal(k,A)=2$, si $ec(k,A)=0.5$
> $cal(k,A)=3$, si $ec(k,A)=0$ y $efs(k,A)=0$
> $cal(k,A)=4$, si $ec(k,A)=0$ y $efs(k,A)=1$.
>
> Para una etapa dada, por ser cal función, cada afirmación toma uno y sólo uno de los cinco estados de plausibilidad, lo cual es fundamental para que la lógica de plausibilidad sea una *lógica multivalente*.

Además, Rodríguez (1999:11) afirma que la plausibilidad se clasifica en:

> Tres regiones de plausibilidad, S_0, S_1 y S_2, tal que:
> **D2.4**
> $S_0=\{0,1\}$, $S_1=\{2\}$ y $S_2=\{3,4\}$.
>
> Donde S_0 es de *rechazo*, S_1 de *indeterminación* y S_2 de *aceptación*.

---

[33] Sobre cada una, Agüero (1988:4) explica:

- **Precisa** y formal, basada en teorías de deducción bivalentes
- **Aproximada** (y posiblemente formal), basada en métodos heurísticos fundamentados en lógica menos precisas que las lógicas bivalentes
- **Experimental**, basada en métodos experimentales tales como simulación y emulación.

> Además, en S_0 el estado de plausibilidad 0 representa el mayor grado de rechazo; mientras que, en S_2 el estado de plausibilidad 4 representa el mayor grado de aceptación.

2.6 La lógica de plausibilidad

Según Rodríguez (1999:23): "La lógica de plausibilidad es un *método semántico–extensional* de una *lógica proposicional* multivalente (*pentavalente*: cinco estados de plausibilidad) y naturaleza *no monotónica*".

Se explica esta definición de la lógica de plausibilidad: método semántico-extensional, se consideran las características semántico–extensionales, es decir, aquellas que tienen que ver con la relación de las palabras y frases a las cosas; en términos más concretos, se recuerda lo que al respecto Dalla (1976:103) afirma: "Las lógicas polivalentes suelen ser, como la lógica bivalente clásica, *veritativo-funcionales*. Con otras palabras, el valor de verdad de una proposición depende exclusivamente del valor de verdad de sus partes atómicas". En tal sentido, Rodríguez (1999:24) considera:

> Una afirmación puede estar determinada a su vez por otras afirmaciones que describen sus partes. La forma en que dichas partes se relacionan viene caracterizada por los *conectivos de plausibilidad* o *p–conectivos*. En la lógica de plausibilidad se consideran cinco conectivos:
> $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow,$
> los cuales se conocen por *negación*, *conjunción*, *disyunción*, *implicación* y *coimplicación* respectivamente.
> El conectivo $\neg$ actúa sólo sobre una afirmación; mientras que cada uno de los cuatro conectivos restantes enlaza dos afirmaciones.

Los conectivos lógicos llevan a clasificar las afirmaciones en atómicas o moleculares, según Rodríguez (1999:24):

> Una afirmación es *molecular* si posee al menos un conectivo; mientras que si no posee ninguno es *atómica*.

> Por lo tanto, si una afirmación es molecular puede tener más de un conectivo; pero sólo uno de ellos la caracteriza, se trata del *conectivo dominante*. Dicha afirmación molecular es una negación, conjunción, disyunción, implicación o coimplicación si el conectivo dominante es $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ó $\leftrightarrow$ respectivamente.
> Cuando una afirmación posee más de un conectivo, se necesita indicar el conectivo dominante. Para ello se recurre al uso de paréntesis y, con el propósito de reducir el número de paréntesis, se establece un convenio de prioridad entre conectivos: $\neg$ es el más débil; le siguen $\vee$ y $\wedge$, con la misma prioridad entre ambos; por último, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ son los más fuertes con igual prioridad entre ellos. Sin embargo, cada conectivo puede ser dominante si lo indica el paréntesis.

Al nivel de afirmaciones moleculares se da la evidencia y plausibilidad funcionales, en tal sentido Rodríguez (1999:25) precisa:

> Una afirmación molecular es de *evidencia funcional*, si su evidencia está determinada por su conectivo dominante y por la evidencia de cada una de las afirmaciones que dicho conectivo enlaza para formar dicha afirmación molecular.
> Cada afirmación molecular es de *plausibilidad funcional*, si su estado de plausibilidad está determinado por su conectivo dominante y el estado de plausibilidad de cada afirmación que dicho conectivo enlaza al formar la afirmación molecular.
> En un sentido lógico, los conectivos de plausibilidad establecen las interrelaciones entre las afirmaciones que forman una afirmación molecular. Dichos conectivos determinan la evidencia y la plausibilidad funcionales de las afirmaciones moleculares. Por esta razón, los conectivos de plausibilidad son los elementos lógicos que caracterizan la lógica de plausibilidad.

Lo aquí presentado ilustra bien lo que en varias ocasiones se viene señalando: la lógica bivalente constituye un marco de referencia general para las lógicas polivalentes.

Que sea lógica proposicional, se refiere a su alcance, pues Rodríguez (1999:68) señala: “En cuanto a alcance, la lógica de plausibilidad cae dentro de la lógica proposicional”, en otras palabras, no es una lógica cuantificacional, lo que es una gran ventaja; pues, Rodríguez (1999:69) considera: “Desde el punto de vista de su aplicación, es de suma importancia que la lógica de plausibilidad se reduzca a una lógica proposicional, dado que éste es el estrato menos complejo de la lógica”. Pentavalente, se trata de una lógica polivalente con cinco

estados de plausibilidad (valores de verdad): 0, 1, 2, 3 y 4. Y como se señala en 2.3, los razonamientos asociados a la teoría de plausibilidad son de naturaleza no monotónica.

A partir de la representación funcional de la evidencia y de la plausibilidad, según Rodríguez (1999:4): "se establecen los axiomas de la lógica de plausibilidad, a partir de los cuales se desarrolla dicha lógica". En total son siete axiomas, de acuerdo a Rodríguez (1999:26-27, 32-33):

A1
$ec(k,\neg A)=1-ec(k,A)$
$ecs(k,\neg A)=efs(k,A)$
$efs(k,\neg A)=ecs(k,A)$.

A2
$ec(k,A\wedge B)=max(ec(k,A),ec(k,B))$
$ecs(k,A\wedge B)=max(esc(k,A),ecs(k,B))$
$efs(k,A\wedge B)=min(efs(k,A),efs(k,B))$.

A3
$ec(k,A\vee B)=ec(k, \neg(\neg A\wedge\neg B))$
$ecs(k,A\vee B)=ecs(k, \neg(\neg A\wedge\neg B))$
$efs(k,A\vee B)=efs(k, \neg(\neg A\wedge\neg B))$.

A4
$ec(k,A\rightarrow B)=ec(k,\neg A\vee B)$
$ecs(k,A\rightarrow B)=ecs(k,\neg A\vee B)$
$efs(k,A\rightarrow B)=efs(k,\neg A\vee B)$.

A5
$ec(k,A\leftrightarrow B)=ec(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$
$ecs(k,A\leftrightarrow B)=ecs(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$
$efs(k,A\leftrightarrow B)=efs(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$.
…
A6
$ec(k,\forall xAx)=ec(k,Ax_1\wedge...\wedge Ax_n)$
$ecs(k,\forall xAx)=ecs(k,Ax_1\wedge...\wedge Ax_n)$
$efs(k,\forall xAx)=efs(k,Ax_1\wedge...\wedge Ax_n)$
$ec(k,\exists xAx)=ec(k,Ax_1\vee...\vee Ax_n)$

$ecs(k,\exists xAx)=ecs(k,Ax_1\vee...\vee Ax_n)$
$efs(k,\exists xAx)=efs(k,Ax_1\vee...\vee Ax_n)$.

tal que A es un predicado, x una variable y $\{x_1,..., x_n\}$ es el *dominio* de x o *universo* de los cuantificadores $\forall$ y $\exists$.
. . .
A7
$cal(k,A)<cal(k,B)=3$. Implica, $efs(k,A)\leq efs(k,B)$.

Rodríguez (1999:25) afirma, a partir de estos axiomas: "se desarrolla la lógica de plausibilidad; es decir se deducen las propiedades más relevantes de ésta". Como teorema importante de la lógica de plausibilidad, Rodríguez (1999:51) destaca la caracterización de los conectivos de plausibilidad (conectivos lógicos), al afirmar sobre éstos: "Desempeñan un papel fundamental pues determinan la lógica de plausibilidad", dicha caracterización se presenta en Rodríguez (1999:53):

$cal(k,\neg A)=4-cal(k,A)$
$cal(k,A\wedge B)=min(cal(k,A),cal(k,B))$
$cal(k,A\vee B)=max(cal(k,A),cal(k,B))$
$cal(k,A\rightarrow B)=max(4-cal(k,A),cal(k,B))$
$cal(k,A\leftrightarrow B)=min(max(4-cal(k,A),cal(k,B)),max(cal(k,A),4-cal(k,B)))$.

Este resultado enunciado por extensión es, según Rodríguez (1999:52), la tabla de plausibilidad de la lógica de plausibilidad:

A	B	$\neg A$	$A\wedge B$	$A\vee B$	$A\rightarrow B$	$A\leftrightarrow B$
0	0	4	0	0	4	4
0	1	4	0	1	4	3
0	2	4	0	2	4	2
0	3	4	0	3	4	1
0	4	4	0	4	4	0
1	0	3	0	1	3	3
1	1	3	1	1	3	3

1	2	3	1	2	3	2
1	3	3	1	3	3	1
1	4	3	1	4	4	1
2	0	2	0	2	2	2
2	1	2	1	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2
2	3	2	2	3	3	2
2	4	2	2	4	4	2
3	0	1	0	3	1	1
3	1	1	1	3	1	1
3	2	1	2	3	2	2
3	3	1	3	3	3	3
3	4	1	3	4	4	3
4	0	0	0	4	0	0
4	1	0	1	4	1	1
4	2	0	2	4	2	2
4	3	0	3	4	3	3
4	4	0	4	4	4	4

Esto supone que se puede calcular la plausibilidad de cualquier proposición, conociendo la plausibilidad de sus partes. Por tanto, se concluye que la lógica de plausibilidad es decidible. Además, según Rodríguez (1999:61), debido a que la función cal no es inyectiva ─cal(k,A)=cal(k,B) no asegura que A=B─ cal(k,A)=cal(k,B) determina la equivalencia de plausibilidad entre A y B, representada por A≡B. Esta relación verifica una serie de teoremas, en particular las leyes de De Morgan, $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$ y $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$, y el teorema de

remplazamiento[34]. Sobre el interés de la equivalencia de plausibilidad, Rodríguez (1999:67) señala:

> La equivalencia lógica desempeña un papel fundamental como elemento lógico. Y de un modo muy particular, dentro de la lógica de plausibilidad. Pues, las propiedades de equivalencia de plausibilidad representan distintas maneras de enlazar afirmaciones mediante conectivos, sin que su estado de plausibilidad varíe.
> Esto tiene un interés práctico muy significativo en cuanto al proceso de decisión, especialmente en lo que respecta al refinamiento de las restricciones de una decisión, pues dichas propiedades pueden servir como marco de referencia para establecer relaciones entre restricciones mediante conectivos.

2.7 Tres nuevos teoremas de la lógica de plausibilidad

Se han descubierto tres nuevos teoremas, vinculados a la representación funcional de la evidencia y plausibilidad, y se presentan a continuación.

Teorema 1

a) $cal(k,A) \in S_0$ si y sólo si $ec(k,A)=1$.

b) $cal(k,A) \in S_1$ si y sólo si $ec(k,A)=0.5$.

c) $cal(k,A) \in S_2$ si y sólo si $ec(k,A)=0$.

Demostración

a)

i) $cal(k,A) \in S_0=\{0, 1\}$, por D2.2

$ec(k,A)=1$.

ii) $ec(k,A)=1$;

por D2.1, $ecs(k,A)=1$ ó $ecs(k,A)=0$.

Implica,

$ec(k,A)=1$ y $ecs(k,A)=1$, ó

[34] Según Rodríguez (1999:66), este teorema asegura: "En una afirmación, si se sustituye alguna de las afirmaciones que la forman por otra equivalente. Entonces, la afirmación que resulta es equivalente a la primera".

ec(k,A)=1 y ecs(k,A)=0.

Por D2.2,

cal(k,A)$\in$ {0, 1}=S_0.

Por i) y ii),

cal(k,A)$\in S_0$ si y sólo si ec(k,A)=1.

b) Por D2.2,

cal(k,A)$\in S_1$={2} si y sólo si ec(k,A)=0.5.

c)

i) cal(k,A)$\in S_2$={3, 4}, por D2.2

ec(k,A)=0.

ii) ec(k,A)=0;

por D2.1, ecs(k,A)=1 ó ecs(k,A)=0.

Implica,

ec(k,A)=0 y efs(k,A)=0, ó

ec(k,A)=0 y efs(k,A)=1.

Por D2.2,

cal(k,A)$\in$ {3, 4}=S_2.

Por i) y ii),

cal(k,A)$\in S_2$ si y sólo si ec(k,A)=0.□

Teorema 2

a) cal(k,A)$\in S_0$ si y sólo si cal(k,A)=1-ecs(k,A).

b) cal(k,A)$\in S_1$ si y sólo si ec(k,A)=0.5.

c) cal(k,A)$\in S_2$ si y sólo si cal(k,A)=3+efs(k,A).

Demostración

a) cal(k,A)$\in S_0$={0, 1}. Implica,

cal(k,A)=0 ó cal(k,A)=1.

i) cal(k,A)=0;

por D2.2, ec(k,A)=1 y ecs(k,A)=1.

Implica,

cal(k,A)=1-ecs(k,A).

ii) cal(k,A)=1;

por D2.2, ec(k,A)=1 y ecs(k,A)=0.

Implica,

cal(k,A)=1-ecs(k,A).

Por i) y ii),

cal(k,A)$\in S_0$ si y sólo si cal(k,A)=1-ecs(k,A).

b) Por D2.2,

cal(k,A)$\in S_1$={2} si y sólo si ec(k,A)=0.5.

c) cal(k,A)$\in S_2$={3, 4}. Implica,

cal(k,A)=3 ó cal(k,A)=4.

i) cal(k,A)=3;

por D2.2, ec(k,A)=0 y efs(k,A)=0.

Implica,

cal(k,A)=3+efs(k,A).

ii) cal(k,A)=4;

por D2.2, ec(k,A)=0 y efs(k,A)=1.

Implica,

cal(k,A)=3+efs(k,A).

Por i) y ii),

cal(k,A)$\in S_2$ si y sólo si cal(k,A)=3+efs(k,A).□

Teorema 3

a) cal(k,A)=1-ecs(k,A) si y sólo si ec(k,A)=1.

b) cal(k,A)=2 si y sólo si ec(k,A)=0.5.

c) cal(k,A)=3+efs(k,A) si y sólo si ec(k,A)=0.

Demostración

a)

i) cal(k,A)=1-ecs(k,A), por el Teorema 2

cal(k,A)$\in S_0$, por el Teorema 1

ec(k,A)=1.

ii) ec(k,A)=1, por el Teorema 1

cal(k,A)$\in S_0$, por el Teorema 2

cal(k,A)=1-ecs(k,A).

Por i) y ii),

cal(k,A)=1-ecs(k,A) si y sólo si ec(k,A)=1.

b)

i) cal(k,A)=2, por el Teorema 2

cal(k,A)$\in S_1$, por el Teorema 1

ec(k,A)=0.5.

ii) ec(k,A)=0.5, por el Teorema 1

cal(k,A)$\in S_1$, por el Teorema 2

cal(k,A)=2.

Por i) y ii),

cal(k,A)=2 si y sólo si ec(k,A)=0.5.

c)

i) cal(k,A)=3+efs(k,A), por el Teorema 2

cal(k,A)$\in S_2$, por el Teorema 1

ec(k,A)=0.

ii) ec(k,A)=0, por el Teorema 1

cal(k,A)$\in S_2$, por el Teorema 2

cal(k,A)=3+efs(k,A).

Por i) y ii),

cal(k,A)=3+efs(k,A) si y sólo si ec(k,A)=0.□

2.8 Interés de desarrollar la teoría de plausibilidad

2.8.1 Aplicación de la teoría de plausibilidad en la fundamentación de software educativo colaborativo y su impacto en educación

Lukasiewicz (1975g:137) destaca el interés de una lógica polivalente por su poder de aplicación, al considerar: "No podemos dejar de tomar en cuenta los sistemas de lógica polivalente, una vez que han sido construidos; lo único que podemos hacer es discutir . . . si se les puede encontrar alguna aplicación". Y precisamente, como se sabe, la lógica de plausibilidad surge para ser aplicada; originalmente, en el diseño de sistemas computacionales.

Después de ser presentada la teoría de plausibilidad en Agüero (1987) y en Agüero y Dasgupta (1987), se desarrolla un ejercicio de aplicación de la teoría de plausibilidad, que figura en Hooton, Agüero y Dasgupta (1988:30), donde sus autores concluyen: "Un resultado importante de este ejercicio es la demostración que la TPD [Teoría del diseño plausible] proporciona tangibles ventajas, aún aplicada menos rigurosamente que lo intentado" (traducción libre)[35]. Posterior a este trabajo, y bajo la dirección del doctor Ulises Agüero, la teoría de plausibilidad se desarrolla en el Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Esta teoría se aplica en la fundamentación de herramientas computacionales, especialmente para la toma de decisiones en grupo, y también de software educativo colaborativo. En cuanto a las herramientas computacionales, Vicente Gómez propone "Desarrollo plausible de las pruebas de correctitud de programas", y concluye en Gómez (1988:133):

[35] An important result of this exercise is the demonstration that TPD [Theory of plausible design] provides these tangible advantages even when applied less rigorously than intended.

> La teoría de plausibilidad es una buena herramienta de diseño. Obliga al diseñador a tener una total y absoluta seguridad en el conocimiento de los aspectos a diseñar. Este es un requisito obligado por cuanto el particionamiento que genera los enunciados de plausibilidad así lo exige.[36]

Mientras que J. C. Gómez estudia "Consideraciones prácticas sobre la teoría de plausibilidad", y explica en Gómez, J. C. (1989:2):

> En este documento se presentan los aspectos fundamentales para uno de los módulos de un ambiente para el apoyo computarizado del diseño de programas, Plausible-CAD, el cual está basado en la teoría de plausibilidad. Este módulo recibe el nombre de Núcleo-Plausible-CAD y es uno de los seis módulos que constituyen el sistema Plausible-CAD.

Sobre las herramientas computacionales para la toma de decisiones en grupo, Núñez et al. (1998:4)[37] señalan: "VirtualMeetings™ es un producto comercial costarricense basado en la teoría de plausibilidad, desarrollado por CREADISA [Creaciones Digitales, S.A.] en 1993, para soportar la toma de decisiones en grupo" (traducción libre)[38]. Además, al nivel académico, la tesis de maestría de César Olivares, quien afirma en Olivares (1996:2):

> En esta tesis se presentan los fundamentos para el desarrollo de un modelo de apoyo a la toma de decisiones en grupos grandes basado en la teoría de plausibilidad de Ulises Agüero. Nos apoyamos en esta teoría porque se orienta al consenso.

Por tanto, se puede concluir que la teoría de plausibilidad fundamenta herramientas computacionales, particularmente para la toma de decisiones en grupo. Pero sobre todo, las aportaciones de la teoría de plausibilidad aquí señaladas, tienen implicaciones importantes en

---

[36] Sobre particionamiento, Gómez (1988:6-7) explica: "R es el conjunto no nulo de afirmaciones que se verificarán para determinar si R califica para estar en el estado P . . . el particionamiento de R debe hacerse de tal forma que, conociendo los estados de plausibilidad de las partes, se puede inferir si R califica para estar en el estado P".

[37] Según Velásquez (s.f.): CREADISA, una empresa costarricense cuya capacidad central de la empresa es la investigación y desarrollo de tecnología de software, que actualmente se enfoca en herramientas en las áreas de educación, toma de decisiones y colaboración en tiempo real.

[38] Has been used in the general area of group decision making, even at the commercial level . . . For example, VirtualMeetings™ is a commercial Costa Rican product based on the theory of plausibility, developed by CREADISA in 1993, to support group decision-making.

educación, a través de la tecnología, especialmente en la fundamentación de software educativo colaborativo. En tal sentido cabe señalar la tesis de maestría, de Giannina Núñez, "Toma de decisiones en grupo para juegos educativos colaborativos". Según Núñez (1999:2,10):

> El objeto central de esta investigación es la toma de decisiones en grupo dirigida hacia niños de educación básica . . . el proceso de toma de decisiones en grupo se emplea en lo que aquí se denomina juegos educativos colaborativos[39].

Sobre la fundamentación del sistema colaborativo propuesto, Núñez (1999:10-11) explica:

> En esta investigación, interesa los sistemas colaborativos en tiempo real . . . Otra característica fundamental del sistema colaborativo que se propone es la toma de decisiones en grupo. Este componente de toma de decisiones en grupo hace uso de la teoría de plausibilidad de Ulises Agüero y del modelo de votación en grandes grupos propuesto por César Olivares.[40]

Además cabe destacar, de acuerdo a Núñez (1999:84): "Uno de los aspectos relevantes en esta tesis es la evaluación de las soluciones en el foro de discusión". Por tanto, la teoría de plausibilidad fundamenta sistemas de soporte para aprendizaje colaborativo, también llamados sistemas CSCL, *Computer Supported Colaborative Learning*.

2.8.2 Interés de aumentar la polivalencia de la lógica de plausibilidad

La lógica de plausibilidad actualmente, como se sabe, cuenta con cinco estados de plausibilidad. Sin embargo, en cuanto a los estados de plausibilidad de una proposición, Agüero (1987:24) afirma: "acepta cualquier de los valores **assumed, validated, refuted,** and

---

[39] Según Núñez (1999:26,34): "Los juegos educativos colaborativos pretenden ser una especie de juego colectivo en el que, de manera amigable y entretenida, aprenden a construir su conocimiento, a tomar decisiones y a contraer responsabilidades.

[40] De acuerdo a Núñez (1999:10): "El sistema colaborativo en tiempo real, es aquel que es capaz de dar a todos los participantes resultados que pueden ser obtenidos en un tiempo determinado, dando a cada usuario el sentimiento de estar interactuando simultáneamente o al menos proveer los resultados en un término aceptable".

undetermined" (traducción libre)[41]. Igualmente en Gómez (1988:5) se utilizan cuatro estados de plausibilidad: indeterminado, factible, satisfactorio e insatisfactorio; mientras que, en Gómez, J. C. (1989:3) ya se usan cinco, al afirmar: "Se definen cinco estados de plausibilidad: indeterminado, insatisfactorio, muy insatisfactorio, satisfactorio y factible"[42].

También en CREADISA (1993), bajo la dirección del doctor Ulises Agüero, para la fundamentación de VirtualMeetings, que como se señala es un software colaborativo para la toma de decisiones en grupo, están presentes los cinco estados de plausibilidad. Lo mismo sucede en Olivares (1996), Núñez (1999) y en Rodríguez y Castro (1999), todas ellas tesis de maestría bajo el asesoramiento del Dr. Agüero.

Por tanto, una vez introducidos los cinco estados de plausibilidad, en Gómez, J. C. (1989), estos cinco estados son utilizados en las posteriores investigaciones y aplicaciones de la teoría de plausibilidad. Esto muestra la preocupación constante, por parte del inventor de la teoría, por incrementar la polivalencia de la misma. Sin embargo, estas aspiraciones se han visto mermadas por la complejidad que eso suponía en los cálculos de plausibilidad. Incluso, sólo con cuatro estados de plausibilidad, Gómez (1988:133-134) comenta:

> En el desarrollo de este trabajo tuve como uno de los principales problemas, el largo tiempo requerido en aprender a usar la teoría de plausibilidad . . . Recomiendo . . . estudiar la posibilidad de plantear un esquema axiomático para la simplificación de condiciones de verificación.

No obstante, esta dificultad es superada, como se puede observar, gracias a la formalización de la teoría de plausibilidad, al proporcionar la tabla de plausibilidad. De ahí que, Rodríguez y Castro (1999:106), en sus recomendaciones señalan: "Generalizar la teoría con respecto a los estados de plausibilidad permite una mejor adaptación de los problemas, ampliando el campo de aplicación de la teoría de plausibilidad". Además, la teoría de plausibilidad por estar

---

[41] Accepts any of the values **assumed, validated, refuted,** and **undetermined**.

[42] Según Rodríguez (1999:5): "Con el propósito de simplificar el enunciado de definiciones, axiomas y teoremas y, sobre todo, de facilitar el desarrollo deductivo, los estados de plausibilidad se representan numéricamente [insatisfactorio, dudoso, indeterminado, factible y satisfactorio por 0, 1, 2, 3 y 4 respectivamente]".

fundamentada en la lógica de plausibilidad, lógica pentavalente que apoya razonamientos no monotónicos, de acuerdo a lo señalado en 2.4, cumple condiciones exigidas por la decisión racional.

En síntesis, por lo señalado a lo largo de la sección 2.8, la teoría de plausibilidad con base en una lógica polivalente, la lógica de plausibilidad, fundamenta herramientas computacionales, aplicadas principalmente en la toma de decisiones en grupo, y software educativo colaborativo, de gran impacto en educación. También, a través de la lógica de plausibilidad, la teoría de plausibilidad satisface condiciones exigidas por la decisión racional, que a su vez aporta a la pedagogía como formación. Se muestra así, a través de su aplicación, la importancia de la teoría de plausibilidad, como lógica polivalente; pues, recordando a Lukasiewicz (1975g:137), el interés de una lógica polivalente radica en su poder de aplicación.

Por tanto, existen razones más que suficientes para destacar el interés de desarrollar la teoría de plausibilidad. Ésta, como se señala, después de su formalización matemática uno de los problemas que plantea, para facilitar y ampliar su aplicación, es precisamente lo que constituye este trabajo de investigación: aumentar la polivalencia de la lógica de plausibilidad. Además, determinar su relación con la decisión racional.

2.9 Problema de investigación

La teoría de plausibilidad se convierte en una teoría de gran interés al ser aplicada en la toma de decisiones en grupo, fundamentando herramientas computacionales, en particular software educativo colaborativo. Por tanto, se plantea como problema: desarrollar la teoría de plausibilidad. En este sentido, como se señala en la sección anterior, después de su formalización matemática, un problema a resolver es la generalización de la lógica de plausibilidad al nivel de polivalencia. Ahora bien, al considerar la aplicación de la teoría en la toma de decisiones en grupo, surge la idea de relacionar la teoría de plausibilidad con la decisión racional. Pero, en un principio, no estaba claro el papel de la decisión racional en el

contexto del problema de investigación, así que éste se formuló provisionalmente: ¿Cómo construir un algoritmo para la decisión racional? Sin embargo, sería después de profundizar en la decisión racional y en los fundamentos de la lógica de plausibilidad, que se llegó a la formulación definitiva del problema:

¿Cómo generalizar la lógica de plausibilidad al nivel de polivalencia y cómo vincularla a la decisión racional?

De acuerdo al planteamiento del problema de investigación, en este estudio se defiende la siguiente tesis: La lógica de plausibilidad se puede generalizar al nivel de polivalencia.

Como parte de este trabajo también logré establecer que, la lógica de plausibilidad generalizada se fundamenta en la decisión racional.

Como problema pedagógico, en esta investigación la pedagogía se entiende como formación. Y en ella, lo que se esclarece aquí es la posibilidad de comprender formalmente la decisión racional, a través de la lógica de plausibilidad generalizada.

A partir de la teoría de plausibilidad se generaliza la lógica de plausibilidad al nivel de polivalencia, es decir, se construye la lógica de plausibilidad generalizada. Después de redefinir los estados de plausibilidad, se fundamentan axiomáticamente los conectivos lógicos en función de la evidencia. A través de esos axiomas, se obtiene la caracterización, en términos de plausibilidad (plausibilidad funcional), de los conectivos de la lógica de plausibilidad generalizada, y se relaciona ésta con la decisión racional.

Por tanto, generalizar la lógica de plausibilidad, al aumentar los estados de plausibilidad, y fundamentarla axiomáticamente y desarrollarla, y determinar su vinculación con la decisión racional es la aportación fundamental a la generación de conocimiento. Además, la investigación contribuye directamente a la lógica; y por el carácter universal de ésta, a la ciencia en general.

2.9.1 Objetivo general

Generalizar la lógica de plausibilidad al nivel de polivalencia y vincularla a la decisión racional.

2.9.2 Objetivos específicos

1. Redefinir los estados de plausibilidad.

2. Formular los elementos básicos de la lógica de plausibilidad generalizada.

3. Construir un sistema axiomático para la lógica de plausibilidad generalizada.

4. Caracterizar los conectivos de la lógica de plausibilidad generalizada, en términos de plausibilidad, que permitan calcular mecánicamente la plausibilidad funcional.

5. Desarrollar la lógica de plausibilidad generalizada, mediante el descubrimiento y demostración de teoremas.

6. Formalizar la decisión racional mediante la lógica de plausibilidad generalizada.

2.9.3 Preguntas de investigación

1. ¿Cuáles son los estados de plausibilidad de la lógica de plausibilidad generalizada?

2. ¿Cómo formular los elementos básicos de la lógica de plausibilidad generalizada?

3. ¿Qué axiomas fundamentan la lógica de plausibilidad generalizada?

4. ¿Cómo calcular mecánicamente la plausibilidad funcional a través de los conectivos, en la lógica de plausibilidad generalizada?

5. ¿Qué teoremas conforman el desarrollo de la lógica de plausibilidad generalizada?

6. ¿Cómo vincular la lógica de plausibilidad generalizada con la decisión racional?

2.9.4 Metodología

En esta investigación se fundamenta y desarrolla la lógica de plausibilidad generalizada; supone el descubrimiento y la formulación de sus axiomas y teoremas, y la demostración matemática de éstos a partir de dichos axiomas. Por tanto, se trata, esencialmente, de un estudio en el ámbito lógico-matemático.

Debido a la naturaleza de la investigación, la construcción de la lógica de plausibilidad generalizada se lleva a cabo siguiendo el método deductivo lógico-matemático: la deducción se apoya en razonamientos válidos, de acuerdo a la lógica de primer orden, esto significa, a partir de premisas verdaderas se obtienen conclusiones verdaderas; y se desarrolla a través del lenguaje de la teoría de conjuntos, utilizando conceptos como función, relación de equivalencia, partición de un conjunto, familia infinita numerable, entre otros. Porque, recordando lo señalado por Lukasiewicz (1975g:130): "La precisión del pensamiento sólo puede estar garantizada por la precisión del lenguaje".

Para evitar posibles sesgos, se pone especial énfasis en el establecimiento y la formulación precisa de los axiomas de la lógica de plausibilidad generalizada, respetando los axiomas de la lógica de plausibilidad, en el sentido que ésta es un caso particular de aquélla. Por otro lado, un trabajo científico de esta naturaleza, exige observar el rigor y detalle lógico-matemático de las demostraciones de los teoremas, dado que la demostración es el único medio para asegurar qué teoremas verifica la lógica de plausibilidad generalizada, en un principio, desconocidos.

3. Lógica de plausibilidad generalizada

Como ya se señala en el marco teórico, la teoría de plausibilidad da pautas para guiar los razonamientos en el proceso de decisión, explica la aceptabilidad de una decisión a través de la plausibilidad de sus restricciones, es decir, de las afirmaciones que caracterizan tal decisión; a su vez, la plausibilidad de dichas afirmaciones se define en términos de evidencia.

Para determinar la plausibilidad de una decisión, la teoría de plausibilidad cuenta con la lógica de plausibilidad. Es una lógica proposicional polivalente (pentavalente) veritativo-funcional que apoya razonamientos no monotónicos: proposicional, se refiere a su alcance, es decir, no es una lógica cuantificacional; pentavalente, una lógica polivalente con cinco estados de plausibilidad; veritativo-funcional, significa que la plausibilidad de una afirmación depende sólo de la plausibilidad de las afirmaciones que la forman; apoya razonamientos no monotónicos, porque los razonamientos asociados a la teoría de plausibilidad son de naturaleza no monotónica, debido a que sucesivas reconsideraciones de una decisión pueden llevar a cambios en la evidencia de las afirmaciones que la caracterizan y, por consiguiente, en su estado de plausibilidad.

La teoría de plausibilidad resuelve este problema de la no monotocidad al considerar el proceso de decisión por etapas; en cada etapa, no hay posibilidad de cambio en la evidencia. Así, en cada etapa se da la monotocidad. En consecuencia, en el proceso de decisión, la evidencia depende de la etapa y la afirmación consideradas.

La lógica de plausibilidad generalizada es una generalización de la lógica de plausibilidad, al nivel de polivalencia. Por tanto, supone, evidentemente, redefinir los estados de plausibilidad. Lo que a su vez implica redefinir la representación funcional de la evidencia y de la plausibilidad, descubrimiento y formulación de axiomas y teoremas, y la demostración de éstos a partir de dichos axiomas, de tal modo que la lógica de plausibilidad sea un caso particular de la lógica de plausibilidad generalizada.

3.1 Estados de plausibilidad en la lógica de plausibilidad generalizada

En la lógica de plausibilidad, la polivalencia está determinada por cinco estados de plausibilidad: 0, 1, 2, 3 y 4; mientras que en la lógica de plausibilidad generalizada, los estados de plausibilidad son 0, 1, ..., 2n, tal como lo señala la siguiente definición.

D1

$P_{2n}=\{0, 1, ..., 2n\}$

Donde n es cualquier número natural mayor que 1 y P_{2n} el conjunto de estados de plausibilidad.

3.2 Justificación de la representación de la polivalencia mediante P_{2n}

La lógica de plausibilidad como caso particular de la lógica de plausibilidad generalizada, coincide con ella cuando $P_{2n}=\{0, 1, ..., 2n\}$ y $P=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ son iguales, es decir, $\{0, 1, ..., 2n\}=\{0, 1, 2, 3, 4\}$, lo que implica n=2. Por tanto, la lógica de plausibilidad es un caso particular de la lógica de plausibilidad generalizada, cuando en ésta P_{2n} se reduce a $P_4=\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Además, la polivalencia al ser impar, como sucede en la lógica de plausibilidad, garantiza que las regiones de plausibilidad S_0^{2n}, S_1^{2n} y S_2^{2n}, de rechazo, indeterminación y aceptación, sean simétricas: por T10, S_0^{2n} y S_2^{2n} son simétricas y S_1^{2n} lo es consigo misma. Y como es de esperar, S_0^4, S_1^4 y S_2^4 de la lógica de plausibilidad generalizada corresponden, respectivamente, a las regiones S_0, S_1 y S_2 de la lógica de plausibilidad (véanse secciones 2.5 y 3.6).

3.3 Funciones de representación de la evidencia en la lógica de plausibilidad generalizada

A través de las funciones numéricas ec, ef, ecs_{2n} y efs_{2n} se representa la evidencia: Sea K el conjunto de etapas, F el conjunto de afirmaciones, N el conjunto de los números naturales y n cualquier natural mayor que 1, entonces

D2

ec, ef: $K \times F \rightarrow \{0, 0.5, 1\}$ tal que,

ec(k,A)=

1, si se sabe que existe evidencia en contra

0.5, si no se sabe si existe o no evidencia en contra

0, si se sabe que no existe evidencia en contra.

ef(k,A)=

1, si se sabe que existe evidencia a favor

0.5, si no se sabe si existe o no evidencia a favor

0, si se sabe que no existe evidencia a favor.

ecs_{2n}, efs_{2n}: $K \times F \rightarrow \{0, 1, ..., n-1\}$ tal que,

ecs_{2n}(k,A)=

$m \in N$ con $0 \leq m \leq n-1$ y m es el grado de evidencia, si ec(k,A)=1

0, en otro caso.

efs_{2n}(k,A)=

$m \in N$ con $0 \leq m \leq n-1$ y m es el grado de evidencia, si ef(k,A)=1

0, en otro caso.

Por tanto, con base en las funciones ec de la evidencia en contra y ef de la evidencia a favor, se definen las funciones ecs_{2n} y efs_{2n}, de la evidencia en contra significativa y la evidencia a favor significativa, para representar el grado de evidencia en contra y a favor, respectivamente. Además, tanto en la evidencia en contra como a favor, su grado máximo es n-1 mientras que el mínimo es 0.

En adelante, K, F y N siguen representando el conjunto de etapas, el de afirmaciones y el de los naturales, respectivamente.

3.3.1 Justificación de la representación de la evidencia a través de las funciones ec, ef, ecs_{2n} y efs_{2n}

En la sección 2.7 se demuestran tres nuevos teoremas de la lógica de plausibilidad, los dos primeros son:

Teorema 1

a) $cal(k,A) \in S_0$ si y sólo si $ec(k,A)=1$.
b) $cal(k,A) \in S_1$ si y sólo si $ec(k,A)=0.5$.
c) $cal(k,A) \in S_2$ si y sólo si $ec(k,A)=0$.

Teorema 2

a) $cal(k,A) \in S_0$ si y sólo si $cal(k,A)=1-ecs(k,A)$.
b) $cal(k,A) \in S_1$ si y sólo si $cal(k,A)=2$.
c) $cal(k,A) \in S_2$ si y sólo si $cal(k,A)=3+efs(k,A)$.

El primero de ellos prueba que la clasificación de la plausibilidad por regiones, en la lógica de plausibilidad, depende exclusivamente de la función ec. Y el segundo demuestra que, en la lógica de plausibilidad, dentro de cada región de plausibilidad, el estado de plausibilidad está determinado por las funciones ecs y efs: ecs define el estado de plausibilidad en la región de

rechazo; mientras que, la función efs lo define en la región de aceptación. Sin embargo, en el caso de indeterminación, por ser 2 el único valor de plausibilidad, éste queda determinado unívocamente por la propia región de indeterminación, caracterizada a su vez, según el teorema 1, por la función ec.

Por lo tanto, la polivalencia incide sobre las funciones ecs y efs; de ahí, en la lógica de plausibilidad generalizada, la necesidad de redefinirlas. Como muestra D2, ecs y efs son sustituidas por las funciones ecs_{2n} y efs_{2n}, respectivamente. Mientras que ec y ef, al no ser afectadas por la polivalencia, la definición de ambas coincide con la dada en la lógica de plausibilidad (véase sección 2.5).

3.3.2 Cotas y condiciones necesarias (o suficientes) tanto entre ec y ecs_{2n} como entre ef y efs_{2n}

T1

a) $ec(k,A) \in \{0, 0.5, 1\}$.
b) $0 \leq ecs_{2n}(k,A)$.
c) $0 \leq efs_{2n}(k,A)$.

Demostración

Es consecuencia inmediata de D2.□

T2

a) $ec(k,A) \in \{0, 0.5\}$ implica $ecs_{2n}(k,A)=0$.
b) $ef(k,A) \in \{0, 0.5\}$ implica $efs_{2n}(k,A)=0$.
c) $0<ecs_{2n}(k,A)$ implica $ec(k,A)=1$.
d) $0<efs_{2n}(k,A)$ implica $ef(k,A)=1$.

Demostración

Es consecuencia inmediata de D2.□

3.4 Función de representación de la plausibilidad en la lógica de plausibilidad generalizada

La plausibilidad de una afirmación, a partir de la evidencia, se expresa mediante la función califica, simbolizada por cal_{2n}.

D3

cal_{2n}:K×F→P_{2n} tal que,

$cal_{2n}(k,A)=$

$n-1-ecs_{2n}(k,A)$, si $ec(k,A)=1$

n, si $ec(k,A)=0.5$

$n+1+efs_{2n}(k,A)$, si $ec(k,A)=0$.

3.5 Justificación de la representación de la plausibilidad mediante la función cal_{2n}

Que la plausibilidad de una afirmación venga dada a través de la función cal_{2n}, en los términos expresados en D3, no resulta nada evidente. Sin embargo, como se señala en la sección 3.1.1, la lógica de plausibilidad es un caso particular de la lógica de plausibilidad generalizada, cuando $P_{2n}=\{0, 1, ..., 2n\}$ y $P=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ son iguales, y eso se da cuando n=2.

Entonces, de los tres nuevos teoremas de la lógica de plausibilidad, tratados en la sección 2.7, el tercero

Teorema 3

a) $cal(k,A)=1-ecs(k,A)$ si y sólo si $ec(k,A)=1$.
b) $cal(k,A)=2$ si y sólo si $ec(k,A)=0.5$.
c) $cal(k,A)=1+efs(k,A)$ si y sólo si $ec(k,A)=0$.

Si se reformula en términos de n para n=2, se obtiene:

a) cal(k,A)=n-1-ecs(k,A) si y sólo si ec(k,A)=1.
b) cal(k,A)=n si y sólo si ec(k,A)=0.5.
c) cal(k,A)=n+1+efs(k,A) si y sólo si ec(k,A)=0.

A partir de este resultado, y de un modo natural, ahora sí resulta evidente la definición D3 correspondiente a la función cal_{2n}. También, la función cal_{2n} se puede expresar del modo siguiente.

T3

$cal_{2n}(k,A)=$

n-1-m con $m=ecs_{2n}(k,A)$, si ec(k,A)=1

n, si ec(k,A)=0.5

n+1+m con $m=efs_{2n}(k,A)$, si ec(k,A)=0.

Demostración

i)

i.1) $cal_{2n}(k,A)=n-1-m$ con $m=ecs_{2n}(k,A)$, implica

$cal_{2n}(k,A)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$, por D3

ec(k,A)=1.

Implica,

$cal_{2n}(k,A)=n-1-m$ con $m=ecs_{2n}(k,A)$ implica ec(k,A)=1.

i.2) ec(k,A)=1, por D3

$cal_{2n}(k,A)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$, implica

$cal_{2n}(k,A)=n-1-m$ con $m=ecs_{2n}(k,A)$.

Implica,

ec(k,A)=1 implica $cal_{2n}(k,A)=n-1-m$ con $m=ecs_{2n}(k,A)$.

Por i.1) y i.2),

$cal_{2n}(k,A)=n-1-m$ con $m=ecs_{2n}(k,A)$ si y sólo si ec(k,A)=1.

ii.1) $cal_{2n}(k,A)=n$, por D3

$ec(k,A)=0.5$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A)=n$ implica $ec(k,A)=0.5$.

ii.2) $ec(k,A)=0.5$, por D3

$cal_{2n}(k,A)=n$.

Implica,

$ec(k,A)=0.5$ implica $cal_{2n}(k,A)=n$.

Por ii.1) y ii.2),

$cal_{2n}(k,A)=n$ si y sólo si $ec(k,A)=0.5$.

iii)

iii.1) $cal_{2n}(k,A)=n+1+m$ con $m=efs_{2n}(k,A)$, implica

$cal_{2n}(k,A)=n+1+efs_{2n}(k,A)$, por D3

$ec(k,A)=0$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A)=n+1+m$ con $m=efs_{2n}(k,A)$ implica $ec(k,A)=0$.

iii.2) $ec(k,A)=0$, por D3

$cal_{2n}(k,A)=n+1+efs_{2n}(k,A)$, implica

$cal_{2n}(k,A)=n+1+m$ con $m=efs_{2n}(k,A)$.

Implica,

$ec(k,A)=0$ implica $cal_{2n}(k,A)=n+1+m$ con $m=efs_{2n}(k,A)$.

Por iii.1) y iii.2),

$cal_{2n}(k,A)=n+1+m$ con $m=efs_{2n}(k,A)$ si y sólo si $ec(k,A)=0$.

Por i), ii) y iii),

$cal_{2n}(k,A)=$

$n-1-m$ con $m=ecs_{2n}(k,A)$, si $ec(k,A)=1$

n, si $ec(k,A)=0.5$

$n+1+m$ con $m=efs_{2n}(k,A)$, si $ec(k,A)=0$.□

3.6 Regiones de plausibilidad en la lógica de plausibilidad generalizada

La evidencia en contra permite clasificar la plausibilidad por regiones, tal como se muestra en esta sección.

D4

$S_0^{2n}=\{0, 1, ..., n-1\}$, $S_1^{2n}=\{n\}$ y $S_2^{2n}=\{n+1, n+2, ..., 2n\}$.

Donde n es cualquier número natural mayor que 1; S_0^{2n} es la región de rechazo, S_1^{2n} la de indeterminación y S_2^{2n} la región de aceptación. Además, en S_0^{2n} el estado de plausibilidad 0 representa el mayor grado de rechazo; en S_1^{2n}, n es el único estado de indeterminación; mientras que en S_2^{2n}, el estado de plausibilidad 2n representa el mayor grado de aceptación.

T4

a) $S_0^{2n} \subseteq P_{2n}$.

b) $S_1^{2n} \subseteq P_{2n}$.

c) $S_2^{2n} \subseteq P_{2n}$.

Demostración

a) Por D4, $S_0^{2n}=\{0, 1, ..., n-1\}$;

por D1, $P_{2n}=\{0, 1, ..., 2n\}$.

Implica,

$S_0^{2n} \subseteq P_{2n}$.

b) Por D4, $S_1^{2n}=\{n\}$;

por D1, $P_{2n}=\{0, 1, ..., 2n\}$.

Implica,

$S_1^{2n} \subseteq P_{2n}$.

c) Por D4, $S_2^{2n}=\{n+1, n+2, ..., 2n\}$;

por D1, $P_{2n}=\{0, 1, ..., 2n\}$.

Implica,

$S_2^{2n} \subseteq P_{2n}$.□

T5

$\bigcup_{i=0}^{2} S_i^{2n} = P_{2n}$.

Demostración

$\bigcup_{i=0}^{2} S_i^{2n} = S_0^{2n} \cup S_1^{2n} \cup S_2^{2n}$, por D4

$=\{0, 1, ..., n-1\} \cup \{n\} \cup \{n+1, n+2, ..., 2n\}\}$,

$=\{0, 1, ..., 2n\}$, por D1

$=P_{2n}$.□

T6

$\{S_0^{2n}, S_1^{2n}, S_2^{2n}\}$ es una partición de P_{2n}.

Demostración

i)

i.1) Por D4, $S_0^{2n}=\{0, 1, ..., n-1\}$

con n>1. Implica,

$S_0^{2n} \neq \emptyset$.

i.2) Por D4, $S_1^{2n}=\{n\}$,

$S_1^{2n} \neq ø$.

i.3) Por D4, $S_2^{2n} = \{n+1, n+2, ..., 2n\}$

con n>1. Implica,

$S_2^{2n} \neq ø$.

Por i.1), i.2) y i.3),

$S_0^{2n} \neq ø$, $S_1^{2n} \neq ø$ y $S_2^{2n} \neq ø$.

ii)

ii.1) Por D4, $S_0^{2n} = \{0, 1, ..., n-1\}$ y

$S_1^{2n} = \{n\}$. Implica,

$S_0^{2n} \cap S_1^{2n} = ø$.

ii.2) Por D4, $S_0^{2n} = \{0, 1, ..., n-1\}$ y

$S_2^{2n} = \{n+1, n+2, ..., 2n\}$. Implica,

$S_0^{2n} \cap S_2^{2n} = ø$.

ii.3) Por D4, $S_1^{2n} = \{n\}$ y

$S_2^{2n} = \{n+1, n+2, ..., 2n\}$. Implica,

$S_1^{2n} \cap S_2^{2n} = ø$.

Por ii.1), ii.2) y ii.3),

$S_0^{2n} \cap S_1^{2n} = ø$,

$S_0^{2n} \cap S_2^{2n} = ø$ y

$S_1^{2n} \cap S_2^{2n} = ø$.

iii) Por T5, $\bigcup_{i=0}^{2} S_i^{2n} = P_{2n}$.

Por i), ii) y iii),

$\{S_0^{2n}, S_1^{2n}, S_2^{2n}\}$ es una partición de P_{2n}.□

La clasificación de la plausibilidad por regiones se puede expresar a través de la relación de equivalencia siguiente.

D5

$(a,b)\in S^{2n}$ si y sólo si existe $i\in\{0, 1, 2\}$ tal que $a, b\in S_i^{2n}$.

T7

S^{2n} es una relación de equivalencia sobre P_{2n}.

Demostración

i) $S^{2n}\subseteq P_{2n}\times P_{2n}$:

$(a,b)\in S^{2n}$, por D5

existe $i\in\{0, 1, 2\}$ tal que $a, b\in S_i^{2n}$, por T4

$(a,b)\in P_{2n}\times P_{2n}$.

Implica,

$(a,b)\in S^{2n}$ implica $(a,b)\in P_{2n}\times P_{2n}$.

ii) S^{2n} es reflexiva sobre P_{2n}:

$a\in P_{2n}$;

por T5, $P_{2n}=\bigcup_{i=0}^{2} S_i^{2n}$. Implica,

existe $i\in\{0, 1, 2\}$ tal que $a\in S_i^{2n}$, luego $a, a\in S_i^{2n}$.

Por D5,

$(a,a)\in S^{2n}$.

Implica,

$a\in P_{2n}$ implica $(a,a)\in S^{2n}$.

iii) S^{2n} es simétrica:

$(a,b)\in S^{2n}$, por D5

existe $i \in \{0, 1, 2\}$ tal que $a, b \in S_i^{2n}$,

existe $i \in \{0, 1, 2\}$ tal que $b, a \in S_i^{2n}$, por D5

$(b,a) \in S^{2n}$.

Implica,

$(a,b) \in S^{2n}$ implica $(b,a) \in S^{2n}$.

iv) S^{2n} es transitiva:

$(a,b), (b,c) \in S^{2n}$; por D5,

existe $i \in \{0, 1, 2\}$ tal que $a, b \in S_i^{2n}$ y

existe $j \in \{0, 1, 2\}$ tal que $b, c \in S_j^{2n}$,

$S_i^{2n} \cap S_j^{2n} \neq \emptyset$; por T6,

$S_i^{2n} = S_j^{2n}$. Implica,

existe $i \in \{0, 1, 2\}$ tal que $a, c \in S_i^{2n}$, por D5

$(a,c) \in S^{2n}$.

Implica,

$(a,b), (b,c) \in S^{2n}$ implica $(a,c) \in S^{2n}$.

Por i), ii), iii) y iv),

S^{2n} es una relación de equivalencia sobre P_{2n}.□

T8

$P_{2n}/S^{2n} = \{ S_0^{2n}, S_1^{2n}, S_2^{2n} \}$.

Demostración

i)

i.1) $x \in [0]_S{}^{2n}$, implica

$(0,x) \in S^{2n}$, por D5

existe $i \in \{0, 1, 2\}$ tal que $0, x \in S_i^{2n}$;

por D4, $0 \in S_0^{2n}$;

por T6, $\{S_0^{2n}, S_1^{2n}, S_2^{2n}\}$

es una partición de P_{2n}. Implica,

$x \in S_0^{2n}$.

Implica,

$x \in [0]_S{}^{2n}$ implica $x \in S_0^{2n}$.

i.2) $x \in S_0^{2n}$;

por D4, $0 \in S_0^{2n}$. Implica,

$0, x \in S_0^{2n}$, por D5

$(0,x) \in S^{2n}$, implica

$x \in [0]_S{}^{2n}$.

Implica,

$x \in S_0^{2n}$ implica $x \in [0]_S{}^{2n}$.

Por i.1) y i.2),

$[0]_S{}^{2n} = S_0^{2n}$.

ii)

ii.1) $x \in [n]_S{}^{2n}$, implica

$(n,x) \in S^{2n}$, por D5

existe $i \in \{0, 1, 2\}$ tal que $n, x \in S_i^{2n}$;

por D4, $n \in S_1^{2n}$;

por T6, $\{S_0^{2n}, S_1^{2n}, S_2^{2n}\}$

es una partición de P_{2n}. Implica,

$x \in S_1^{2n}$.

Implica,

$x \in [n]_S{}^{2n}$ implica $x \in S_1^{2n}$.

ii.2) $x \in S_1^{2n}$;

por D4, $n \in S_1^{2n}$. Implica,

$n, x \in S_1^{2n}$, por D5

$(n,x) \in S^{2n}$, implica

$x \in [n]_S{}^{2n}$.

Implica,

$x \in S_1^{2n}$ implica $x \in [n]_S{}^{2n}$.

Por ii.1) y ii.2),

$[n]_S{}^{2n} = S_1^{2n}$.

iii.1) $x \in [n+1]_S{}^{2n}$, implica

$(n+1,x) \in S^{2n}$, por D5

existe $i \in \{0, 1, 2\}$ tal que $n+1, x \in S_i^{2n}$;

por D4, $n+1 \in S_2^{2n}$;

por T6, $\{S_0^{2n}, S_1^{2n}, S_2^{2n}\}$

es una partición de P_{2n}. Implica,

$x \in S_2^{2n}$.

Implica,

$x \in [n+1]_S{}^{2n}$ implica $x \in S_2^{2n}$.

iii.2) $x \in S_2^{2n}$;

por D4, $n+1 \in S_1^{2n}$. Implica,

$n+1, x \in S_2^{2n}$, por D5

$(n+1,x) \in S^{2n}$, implica

$x \in [n+1]_S{}^{2n}$.

Implica,

$x \in S_2^{2n}$ implica $x \in [n+1]_S{}^{2n}$.

Por iii.1) y iii.2),

$[n+1]_S{}^{2n} = S_2^{2n}$.

Por i), ii) y iii),

$[0]_S{}^{2n} = S_0^{2n}$,

$[n]_S{}^{2n} = S_1^{2n}$ y

$[n+1]_S{}^{2n} = S_2^{2n}$;

por D4, $S_0^{2n} = \{0, 1, ..., n-1\}$,

$S_1^{2n} = \{n\}$ y

$S_2^{2n} = \{n+1, n+2, ..., 2n\}$. Implica,

$S_0^{2n} = [0]_S{}^{2n} = [1]_S{}^{2n} = \ldots = [n-1]_S{}^{2n}$,

$S_1^{2n} = [n]_S{}^{2n}$ y

$S_2^{2n} = [n+1]_S{}^{2n} = [n+2]_S{}^{2n} = \ldots = [2n]_S{}^{2n}$.

Implica,

$P_{2n}/S^{2n} = \{[m]_S{}^{2n}: m \in P_{2n}\}$

$= \{S_0^{2n}, S_1^{2n}, S_2^{2n}\}$.□

Por tanto, T8 asegura que la clasificación de la plausibilidad por regiones, coincide con el conjunto cociente determinado por la relación de equivalencia S^{2n}, ésta dada en D5.

3.6.1 Regiones de plausibilidad simétricas

Sobre el conjunto de las regiones de plausibilidad, $P_{2n}/S^{2n} = \{S_0^{2n}, S_1^{2n}, S_2^{2n}\}$, es posible definir la relación siguiente.

D6

$(S_i^{2n}, S_j^{2n}) \in R^{2n}$ si y sólo si j=2–i.

T9

R^{2n} es una relación simétrica.

Demostración

$(S_i^{2n}, S_j^{2n}) \in R^{2n}$, por D6

j=2–i,

i=2–j, por D6

$(S_j^{2n}, S_i^{2n}) \in R^{2n}$.

Implica,

$(S_i^{2n}, S_j^{2n}) \in R^{2n}$ implica $(S_j^{2n}, S_i^{2n}) \in R^{2n}$. □

Esta propiedad lleva a definir regiones de plausibilidad simétricas.

D7

Si $(S_i^{2n}, S_j^{2n}) \in R^{2n}$, S_i^{2n} y S_j^{2n} son simétricas.

Resulta así el siguiente teorema, que permite identificar qué regiones son simétricas entre sí.

T10

a) S_0^{2n} y S_2^{2n} son simétricas.

b) S_1^{2n} es simétrica consigo misma.

Demostración

a) 2=2-0, por D6

$(S_0^{2n}, S_2^{2n}) \in R^{2n}$, por D7

S_0^{2n} y S_2^{2n} son simétricas.

b) 1=2-1, por D6

$(S_1^{2n}, S_1^{2n}) \in R^{2n}$, por D7

S_1^{2n} es simétrica consigo misma.□

3.6.2 Condiciones necesarias y suficientes de la función cal_{2n}

T11

a) $cal_{2n}(k,A)<n$ si y sólo si $ec(k,A)=1$.

b) $cal_{2n}(k,A)=n$ si y sólo si $ec(k,A)=0.5$.

c) $cal_{2n}(k,A)>n$ si y sólo si $ec(k,A)=0$.

Demostración

a)

i) $cal_{2n}(k,A)<n$;

por T1, $ecs_{2n}(k,A)\geq 0$ y $efs_{2n}(k,A)\geq 0$. Por D3,

$ec(k,A)=1$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A)<n$ implica $ec(k,A)=1$.

ii) $ec(k,A)=1$, por D3

$cal_{2n}(k,A)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$; por T1,

$ecs_{2n}(k,A)\ )\geq 0$. Implica,

$cal_{2n}(k,A)<n$.

$ec(k,A)=1$ implica $cal_{2n}(k,A)<n$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A)<n$ si y sólo si $ec(k,A)=1$.

b)

i) $cal_{2n}(k,A)=n$, por D3

$ec(k,A)=0.5$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A)=n$ implica $ec(k,A)=0.5$.

ii) $ec(k,A)=0.5$, por D3

$cal_{2n}(k,A)=n$.

$ec(k,A)=0.5$ implica $cal_{2n}(k,A)=n$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A)=n$ si y sólo si $ec(k,A)=0.5$.

c)

i) $cal_{2n}(k,A)>n$;

por T1, $ecs_{2n}(k,A)\ )\geq 0$ y $efs_{2n}(k,A)\geq 0$. Por D3,

$ec(k,A)=0$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A)>n$ implica $ec(k,A)=0$.

ii) $ec(k,A)=0$, por D3

$cal_{2n}(k,A)=n+1+ efs_{2n}(k,A)$;

por T1, $efs_{2n}(k,A)\geq 0$. Implica,

$cal_{2n}(k,A)>n$.

Implica,

$ec(k,A)=0$ implica $cal_{2n}(k,A)>n$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A)>n$ si y sólo si $ec(k,A)=0$.□

T12

a) $cal_{2n}(k,A)<n$ si y sólo si $cal_{2n}(k,A)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$.

b) $cal_{2n}(k,A)>n$ si y sólo si $cal_{2n}(k,A)=n+1+efs_{2n}(k,A)$.

Demostración

a)

i) $cal_{2n}(k,A)<n$, por T4

$ec(k,A)=1$, por D3

$cal_{2n}(k,A)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A)<n$ implica $cal_{2n}(k,A)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$.

ii) $cal_{2n}(k,A)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$, por D3

$ec(k,A)=1$, por T4

$cal_{2n}(k,A)<n$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$ implica $cal_{2n}(k,A)<n$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A)<n$ si y sólo si $cal_{2n}(k,A)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$.

b)

i) $cal_{2n}(k,A)>n$, por T4

$ec(k,A)=0$, por D3

$cal_{2n}(k,A)=n+1+efs_{2n}(k,A)$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A)>n$ implica $cal_{2n}(k,A)=n+1+efs_{2n}(k,A)$.

ii) $cal_{2n}(k,A)=n+1+efs_{2n}(k,A)$, por D3

$ec(k,A)=0$, por T4

$cal_{2n}(k,A)>n$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A)=n+1+efs_{2n}(k,A)$ implica $cal_{2n}(k,A)>n$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A)>n$ si y sólo si $cal_{2n}(k,A)=n+1+efs_{2n}(k,A)$.□

T13

a) $cal_{2n}(k,A)<n$ si y sólo si $cal_{2n}(k,A)\in S_0^{2n}$.

b) $cal_{2n}(k,A)=n$ si y sólo si $cal_{2n}(k,A)\in S_1^{2n}$.

c) $cal_{2n}(k,A)>n$ si y sólo si $cal_{2n}(k,A)\in S_2^{2n}$.

Demostración

a)

i) $cal_{2n}(k,A)<n$;

por D3, $cal_{2n}(k,A)\in P_{2n}$;

por D1, $P_{2n}=\{0, 1, ..., 2n\}$. Implica,

$cal_{2n}(k,A)\in\{0, 1, ..., n-1\}$, por D4

$cal_{2n}(k,A)\in S_0^{2n}$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A)<n$ implica $cal_{2n}(k,A)\in S_0^{2n}$.

ii) $cal_{2n}(k,A)\in S_0^{2n}$, por D4

$cal_{2n}(k,A)\in\{0, 1, ..., n-1\}$, implica

$cal_{2n}(k,A)<n$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A)\in S_0^{2n}$ implica $cal_{2n}(k,A)<n$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A)<n$ si y sólo si $cal_{2n}(k,A)\in S_0^{2n}$.

b)

i) $cal_{2n}(k,A)=n$, por D4

$cal_{2n}(k,A)\in S_1^{2n}$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A)=n$ implica $cal_{2n}(k,A)\in S_1^{2n}$.

ii) $cal_{2n}(k,A)\in S_1^{2n}$, por D4

$cal_{2n}(k,A)=n$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$ implica $cal_{2n}(k,A)=n$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A)=n$ si y sólo si $cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$.

c)

i) $cal_{2n}(k,A)>n$;

por D3, $cal_{2n}(k,A) \in P_{2n}$;

por D1, $P_{2n}=\{0, 1, ..., 2n\}$. Implica,

$cal_{2n}(k,A) \in \{n+1, n+2, ..., 2n\}$, por D4

$cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A)>n$ implica $cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$.

ii) $cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$, por D4

$cal_{2n}(k,A) \in \{n+1, n+2, ..., 2n\}$, implica

$cal_{2n}(k,A)>n$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$ implica $cal_{2n}(k,A)>n$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A)>n$ si y sólo si $cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$. □

T14

a) $cal_{2n}(k,A) \in S_0^{2n}$ si y sólo si $ec(k,A)=1$.

b) $cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$ si y sólo si $ec(k,A)=0.5$.

c) $cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$ si y sólo si $ec(k,A)=0$.

Demostración

a)

i) $cal_{2n}(k,A) \in S_0^{2n}$, por T13

$cal_{2n}(k,A)<n$, por T11

$ec(k,A)=1$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A) \in S_0^{2n}$ implica $ec(k,A)=1$.

ii) $ec(k,A)=1$, por T11

$cal_{2n}(k,A)<n$, por T13

$cal_{2n}(k,A) \in S_0^{2n}$.

Implica,

$ec(k,A)=1$ implica $cal_{2n}(k,A) \in S_0^{2n}$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A) \in S_0^{2n}$ si y sólo si $ec(k,A)=1$.

b)

i) $cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$, por T13

$cal_{2n}(k,A)=n$, por D3

$ec(k,A)=0.5$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$ implica $ec(k,A)=0.5$.

ii) $ec(k,A)=0.5$, por D3

$cal_{2n}(k,A)=n$, por T13

$cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$.

Implica,

$ec(k,A)=0.5$ implica $cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$ si y sólo si $ec(k,A)=0.5$.

c)

i) $cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$, por T13

$cal_{2n}(k,A)>n$, por T11

$ec(k,A)=0$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$ implica $ec(k,A)=0$.

ii) $ec(k,A)=0$, por T11

$cal_{2n}(k,A)>n$, por T13

$cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$.

Implica,

$ec(k,A)=0$ implica $cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$ si y sólo si $ec(k,A)=0$.□

T15

a) $cal_{2n}(k,A) \in S_0^{2n}$ si y sólo si $cal_{2n}(k,A)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$.

b) $cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$ si y sólo si $cal_{2n}(k,A)=n$.

c) $cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$ si y sólo si $cal_{2n}(k,A)=n+1+efs_{2n}(k,A)$.

Demostración

a)

i) $cal_{2n}(k,A) \in S_0^{2n}$, por T14

$ec(k,A)=1$, por D3

$cal_{2n}(k,A)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A) \in S_0^{2n}$ implica $cal_{2n}(k,A)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$.

ii) $cal_{2n}(k,A)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$, por D3

ec(k,A)=1, por T14

$cal_{2n}(k,A) \in S_0^{2n}$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$ implica $cal_{2n}(k,A) \in S_0^{2n}$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A) \in S_0^{2n}$ si y sólo si $cal_{2n}(k,A)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$.

b)

i) $cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$, por T14

ec(k,A)=0.5, por D3

$cal_{2n}(k,A)=n$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$ implica $cal_{2n}(k,A)=n$.

ii) $cal_{2n}(k,A)=n$, por D3

ec(k,A)=0.5, por T14

$cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A)=n$ implica $cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$ si y sólo si $cal_{2n}(k,A)=n$.

c)

i) $cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$, por T14

ec(k,A)=0, por D3

$cal_{2n}(k,A)=n+1+efs_{2n}(k,A)$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$ implica $cal_{2n}(k,A)=n+1+efs_{2n}(k,A)$.

ii) $cal_{2n}(k,A)=n+1+efs_{2n}(k,A)$, por D3

ec(k,A)=0, por T14

$cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A)=n+1+efs_{2n}(k,A)$ implica $cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$ si y sólo si $cal_{2n}(k,A)=n+1+efs_{2n}(k,A)$.□

3.6.3 Justificación de la representación de las regiones de plausibilidad mediante S_0^{2n}, S_1^{2n} y S_2^{2n}

Por T6, $\{S_0^{2n}, S_1^{2n}, S_2^{2n}\}$ es una partición de P_{2n}; y por D1, $P_{2n}=\{0, 1, ..., 2n\}$ es el conjunto de estados de plausibilidad. Por tanto, S_0^{2n}, S_1^{2n} y S_2^{2n} se convierten en regiones de plausibilidad. Además, por T14

a) $cal_{2n}(k,A) \in S_0^{2n}$ si y sólo si ec(k,A)=1.

b) $cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$ si y sólo si ec(k,A)=0.5.

c) $cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$ si y sólo si ec(k,A)=0.

Este teorema T14 prueba que, la clasificación de la plausibilidad a través de las regiones de plausibilidad S_0^{2n}, S_1^{2n} y S_2^{2n}, depende exclusivamente de la función ec. Y que los valores de la evidencia en contra, es decir, los de la función ec, a la luz de D2, dan nombre a S_0^{2n}, S_1^{2n} y S_2^{2n}: región de rechazo, de indeterminación y región de aceptación, respectivamente, lo que coincide con D4.

Mientras que T15, demuestra que, dentro de cada región de plausibilidad, el estado de plausibilidad está determinado por las funciones ecs_{2n} y efs_{2n}: ecs_{2n} define el estado de plausibilidad en la región de rechazo, tal que 0 representa el mayor grado de rechazo; mientras

que, la función efs_{2n} lo define en la región de aceptación, tal que 2n representa el mayor grado de aceptación. Sin embargo, en el caso de indeterminación, por ser n el único valor de plausibilidad, éste queda determinado unívocamente por la propia región de indeterminación, caracterizada a su vez, según T14, por la función ec.

Además, como se adelantaba en la sección 3.2, la polivalencia al ser impar, como sucede en la lógica de plausibilidad, permite que las regiones de plausibilidad S_0^{2n}, S_1^{2n} y S_2^{2n} sean simétricas: por T10, S_0^{2n} y S_2^{2n} son simétricas entre sí y S_1^{2n} lo es consigo misma. Y también, S_0^4, S_1^4 y S_2^4 de la lógica de plausibilidad generalizada corresponden, respectivamente, a las regiones S_0, S_1 y S_2 de la lógica de plausibilidad, como cabe esperar.

3.7 Propiedades de la plausibilidad entre afirmaciones en términos de orden

T16

ec(k,A)=ec(k,B)
$ecs_{2n}(k,A)=ecs_{2n}(k,B)$
$efs_{2n}(k,A)=efs_{2n}(k,B)$.
Implica,
$cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$.

Demostración

i) $cal_{2n}(k,A) \in S_0^{2n}$. Implica:

i.1) Por T15, $cal_{2n}(k,A)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$.

i.2) Por T14, ec(k,A)=1;
por hipótesis, ec(k,A)=ec(k,B).
Implica,
ec(k,B)=1, por D3
$cal_{2n}(k,B)=n-1-ecs_{2n}(k,B)$;

por hipótesis, $ecs_{2n}(k,A)=ecs_{2n}(k,B)$.

Implica,

$cal_{2n}(k,B)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$.

Por i.1) y i.2),

$cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$.

ii) $cal_{2n}(k,A)\in S_1^{2n}$. Implica:

ii.1) Por T15, $cal_{2n}(k,A)=n$.

ii.2) Por T14, $ec(k,A)=0.5$;

por hipótesis, $ec(k,A)=ec(k,B)$.

Implica,

$ec(k,B)=0.5$, por D3

$cal_{2n}(k,B)=n$.

Por ii.1) y ii.2),

$cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$.

iii) $cal_{2n}(k,A)\in S_2^{2n}$. Implica:

iii.1) Por T15, $cal_{2n}(k,A)=n+1+efs_{2n}(k,A)$.

iii.2) Por T14, $ec(k,A)=0$;

por hipótesis, $ec(k,A)=ec(k,B)$.

Implica,

$ec(k,B)=0$, por D3

$cal_{2n}(k,B)=n+1+efs_{2n}(k,B)$;

por hipótesis, $efs_{2n}(k,A)=efs_{2n}(k,B)$.

Implica,

$cal_{2n}(k,B)=n+1+efs_{2n}(k,A)$.

Por iii.1) y iii.2),

$cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$.

Por i), ii) y iii),

$cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$.□

T17

a) $ec(k,A)<ec(k,B)$. Implica,
$cal_{2n}(k,B)<cal_{2n}(k,A)$.

b) $ec(k,A)=ec(k,B)$ y $ecs_{2n}(k,A)<ecs_{2n}(k,B)$. Implica,
$cal_{2n}(k,B)<cal_{2n}(k,A)$.

Demostración

a) $ec(k,A)<ec(k,B)$. Implica:

i) Para $ec(k,B)=1$, por T1
$ec(k,A)\in\{0, 0.5\}$.
Por T11,
$cal_{2n}(k,B)<n\leq cal_{2n}(k,A)$,
$cal_{2n}(k,B)<cal_{2n}(k,A)$.

ii) Para $ec(k,B)=0.5$, por T1
$ec(k,A)=0$.
Por T11,
$cal_{2n}(k,B)=n<cal_{2n}(k,A)$,
$cal_{2n}(k,B)<cal_{2n}(k,A)$.

Por i) y ii),
$ec(k,A)<ec(k,B)$. Implica,
$cal_{2n}(k,B)<cal_{2n}(k,A)$.

b) $ec(k,A)=ec(k,B)$ y $ecs_{2n}(k,A)<ecs_{2n}(k,B)$. Implica:

i) Por T1, $0\leq ecs_{2n}(k,A)<ecs_{2n}(k,B)$,
$0<ecs_{2n}(k,B)$, por T2
$ec(k,B)=1$;
por hipótesis, $ec(k,A)=ec(k,B)$. Implica,
$ec(k,A)=ec(k,B)=1$, por D3
$cal_{2n}(k,A)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$ y
$cal_{2n}(k,B)=n-1-ecs_{2n}(k,B)$.

ii) $ecs_{2n}(k,A)<ecs_{2n}(k,B)$,

$n-1-ecs_{2n}(k,B)<n-1-ecs_{2n}(k,A)$.

Por i) y ii),

$ec(k,A)=ec(k,B)$ y $ecs_{2n}(k,A)<ecs_{2n}(k,B)$. Implica,

$cal_{2n}(k,B)<cal_{2n}(k,A)$.□

Como muestran los siguientes teoremas, mediante las regiones de plausibilidad, los dos teoremas anteriores se pueden reformular, pasando de condiciones necesarias a condiciones necesarias y suficientes. Además, en T17 no se considera efs, mientras que en T18 sí, logrando así un mayor alcance.

T18

a) $cal_{2n}(k,A), cal_{2n}(k,B) \in S_0^{2n}$. Implica:

a.1) $cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$ si y sólo si $ecs_{2n}(k,A)=ecs_{2n}(k,B)$.

a.2) $cal_{2n}(k,A)<cal_{2n}(k,B)$ si y sólo si $ecs_{2n}(k,B)<ecs_{2n}(k,A)$.

a.3) $cal_{2n}(k,A)\leq cal_{2n}(k,B)$ si y sólo si $ecs_{2n}(k,B)\leq ecs_{2n}(k,A)$.

b) $cal_{2n}(k,A), cal_{2n}(k,B) \in S_1^{2n}$. Implica, $cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$.

c) $cal_{2n}(k,A), cal_{2n}(k,B) \in S_2^{2n}$. Implica:

c.1) $cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$ si y sólo si $efs_{2n}(k,A)=efs_{2n}(k,B)$.

c.2) $cal_{2n}(k,A)<cal_{2n}(k,B)$ si y sólo si $efs_{2n}(k,A)<efs_{2n}(k,B)$.

c.3) $cal_{2n}(k,A)\leq cal_{2n}(k,B)$ si y sólo si $efs_{2n}(k,A)\leq efs_{2n}(k,B)$.

Demostración

a) $cal_{2n}(k,A), cal_{2n}(k,B) \in S_0^{2n}$, por T15

$cal_{2n}(k,A)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$ y

$cal_{2n}(k,B)=n-1-ecs_{2n}(k,B)$. Implica:

a.1)

i) Para $cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$,

$ecs_{2n}(k,A)=ecs_{2n}(k,B)$.

ii) Para $ecs_{2n}(k,A)=ecs_{2n}(k,B)$,

$cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A)$, $cal_{2n}(k,B) \in S_0^{2n}$. Implica,

$cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$ si y sólo si

$ecs_{2n}(k,A)=ecs_{2n}(k,B)$.

a.2)

i) Para $cal_{2n}(k,A)<cal_{2n}(k,B)$,

$ecs_{2n}(k,B)<ecs_{2n}(k,A)$.

ii) Para $ecs_{2n}(k,B)<ecs_{2n}(k,A)$,

$cal_{2n}(k,A)<cal_{2n}(k,B)$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A)$, $cal_{2n}(k,B) \in S_0^{2n}$. Implica,

$cal_{2n}(k,A)<cal_{2n}(k,B)$ si y sólo si

$ecs_{2n}(k,B)<ecs_{2n}(k,A)$.

a.3) Es consecuencia inmediata de a.1) y a.2).

b) $cal_{2n}(k,A)$, $cal_{2n}(k,B) \in S_1^{2n}$, por T15

$cal_{2n}(k,A)=n$ y

$cal_{2n}(k,B)=n$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$.

c) $cal_{2n}(k,A)$, $cal_{2n}(k,B) \in S_2^{2n}$, por T15

$cal_{2n}(k,A)=n+1+efs_{2n}(k,A)$ y

$cal_{2n}(k,B)=n+1+efs_{2n}(k,B)$. Implica:

c.1)

i) Para $cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$,

$efs_{2n}(k,A)=efs_{2n}(k,B)$.

ii) Para $efs_{2n}(k,A)=efs_{2n}(k,B)$,

$cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A), cal_{2n}(k,B) \in S_2^{2n}$. Implica,

$cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$ si y sólo si

$efs_{2n}(k,A)=efs_{2n}(k,B)$.

c.2)

i) Para $cal_{2n}(k,A)<cal_{2n}(k,B)$,

$efs_{2n}(k,A)<efs_{2n}(k,B)$.

ii) Para $efs_{2n}(k,A)<efs_{2n}(k,B)$,

$cal_{2n}(k,A)<cal_{2n}(k,B)$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A), cal_{2n}(k,B) \in S_2^{2n}$. Implica,

$cal_{2n}(k,A)<cal_{2n}(k,B)$ si y sólo si

$efs_{2n}(k,A)<efs_{2n}(k,B)$.

c.3) Es consecuencia inmediata de c.1) y c.2).□

T19

$cal_{2n}(k,A) \in S_i^{2n}$ y $cal_{2n}(k,B) \in S_j^{2n}$ con $i<j$. Implica,

$cal_{2n}(k,A)<cal_{2n}(k,B)$.

Demostración

i) $cal_{2n}(k,A) \in S_0^{2n}$. Implica:

i.1) Por T13, $cal_{2n}(k,A)<n$.

i.2) Por hipótesis, $cal_{2n}(k,A) \in S_i^{2n}$ y

$cal_{2n}(k,B) \in S_j^{2n}$ con $i<j$.

Implica,

$cal_{2n}(k,B) \in \bigcup_{i=1}^{2} S_i^{2n}$, por T13

$n \leq cal_{2n}(k,B)$.

Por i.1) y i.2),

$cal_{2n}(k,A) < cal_{2n}(k,B)$.

$cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$. Implica:

ii.1) Por T13, $cal_{2n}(k,A)=n$.

ii.2) Por hipótesis, $cal_{2n}(k,A) \in S_i^{2n}$ y

$cal_{2n}(k,B) \in S_j^{2n}$ con $i<j$.

Implica,

$cal_{2n}(k,B) \in S_2^{2n}$, por T13

$n < cal_{2n}(k,B)$.

Por ii.1) y ii.2),

$cal_{2n}(k,A) < cal_{2n}(k,B)$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A) \in S_i^{2n}$ y $cal_{2n}(k,B) \in S_j^{2n}$ con $i<j$. Implica,

$cal_{2n}(k,A) < cal_{2n}(k,B)$.□

T20

$cal_{2n}(k,A) \in S_i^{2n}$ y $cal_{2n}(k,A) \leq cal_{2n}(k,B)$. Implica,

$cal_{2n}(k,B) \in \bigcup_{j=i}^{2} S_j^{2n}$.

Demostración

i) $cal_{2n}(k,A) \in S_0^{2n}$;

Por D3, $cal_{2n}(k,B) \in P_{2n}$. Por T5,

$cal_{2n}(k,B) \in \bigcup_{i=0}^{2} S_i^{2n}$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A) \in S_0^{2n}$ y $cal_{2n}(k,A) \leq cal_{2n}(k,B)$. Implica,

$cal_{2n}(k,B) \in \bigcup_{i=0}^{2} S_i^{2n}$.

ii) $cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$, por T13

$cal_{2n}(k,A)=n$;

por hipótesis, $cal_{2n}(k,A) \leq cal_{2n}(k,B)$. Implica,

$n \leq cal_{2n}(k,B)$, por T13

$cal_{2n}(k,B) \in \bigcup_{i=1}^{2} S_i^{2n}$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$ y $cal_{2n}(k,A) \leq cal_{2n}(k,B)$. Implica,

$cal_{2n}(k,B) \in \bigcup_{i=1}^{2} S_i^{2n}$.

iii) $cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$, por T13

$n < cal_{2n}(k,A)$;

por hipótesis, $cal_{2n}(k,A) \leq cal_{2n}(k,B)$.

Implica,

$n < cal_{2n}(k,B)$, por T13

$cal_{2n}(k,B) \in S_2^{2n}$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$ y $cal_{2n}(k,A) \leq cal_{2n}(k,B)$. Implica,

$cal_{2n}(k,B) \in S_2^{2n}$.

Por i), ii) y iii),

$cal_{2n}(k,A) \in S_i^{2n}$ y $cal_{2n}(k,A) \leq cal_{2n}(k,B)$. Implica,

$cal_{2n}(k,B) \in \bigcup_{j=i}^{2} S_j^{2n}$.□

T21

$cal_{2n}(k,A) \leq cal_{2n}(k,B)$.

Implica:

a) $ec(k,B) \leq ec(k,A)$.

b) $ecs_{2n}(k,B) \leq ecs_{2n}(k,A)$.

Demostración

a)

i) $cal_{2n}(k,A) \in S_0^{2n}$. Implica:

i.1) Por T14, $ec(k,A)=1$.

i.2) Por T1, $ec(k,B) \leq 1$.

Por i.1) y i.2),

$ec(k,B) \leq ec(k,A)$.

ii) $cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$. Implica:

ii.1) Por T14, $ec(k,A)=0.5$.

ii.2) Por hipótesis, $cal_{2n}(k,A) \leq cal_{2n}(k,B)$; por T20,

$cal_{2n}(k,B) \in \bigcup_{i=1}^{2} S_i^{2n}$, por T14

$ec(k,B) \leq 0.5$.

Por ii.1) y ii.2),

$ec(k,B) \leq ec(k,A)$.

iii) $cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$. Implica:

iii.1) Por T14, $ec(k,A)=0$.

iii.2) Por hipótesis, $cal_{2n}(k,A) \leq cal_{2n}(k,B)$; por T20

$cal_{2n}(k,B) \in S_2^{2n}$; por T14

$ec(k,B)=0$.

Por iii.1) y iii.2),

$ec(k,B) \leq ec(k,A)$.

Por i), ii) y iii),

$cal_{2n}(k,A) \leq cal_{2n}(k,B)$. Implica,

$ec(k,B) \leq ec(k,A)$.

b)

i) $cal_{2n}(k,A) \in S_0^{2n}$;

por hipótesis, $cal_{2n}(k,A) \leq cal_{2n}(k,B)$.

Por T20,

$cal_{2n}(k,B) \in \bigcup_{i=0}^{2} S_i^{2n}$.

i.1) Para $cal_{2n}(k,B) \in S_0^{2n}$, por T15

$cal_{2n}(k,A)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$ y

$cal_{2n}(k,B)=n-1-ecs_{2n}(k,B)$;

por hipótesis, $cal_{2n}(k,A) \leq cal_{2n}(k,B)$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,B) \leq ecs_{2n}(k,A)$.

i.2) Para $cal_{2n}(k,B) \in \bigcup_{i=1}^{2} S_i^{2n}$, por T14

$ec(k,B) \in \{0, 0.5\}$, por T2

$ecs_{2n}(k,B)=0$;

por T1, $0 \leq ecs_{2n}(k,A)$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,B) \leq ecs_{2n}(k,A)$.

Por i.1) y i.2),

$ecs_{2n}(k,B) \leq ecs_{2n}(k,A)$.

ii) $cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$;

por hipótesis, $cal_{2n}(k,A) \leq cal_{2n}(k,B)$.

Por T20,

$cal_{2n}(k,B) \in \bigcup_{i=1}^{2} S_i^{2n}$, por T14

$ec(k,B) \in \{0, 0.5\}$, por T2

$ecs_{2n}(k,B)=0$;

por T1, $0 \leq ecs_{2n}(k,A)$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,B) \leq ecs_{2n}(k,A)$.

iii) $cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$. Implica:

iii.1) Por T14, $ec(k,A)=0$, por T2

$ecs_{2n}(k,A)=0$.

iii.2) Por T20, $cal_{2n}(k,B) \in S_2^{2n}$; por T14

$ec(k,B)=0$, por T2

$ecs_{2n}(k,B)=0$.

Por iii.1) y iii.2),

$ecs_{2n}(k,B) \leq ecs_{2n}(k,A)$.

Por i), ii) y iii),

$cal_{2n}(k,A) \leq cal_{2n}(k,B)$. Implica,

$ecs_{2n}(k,B) \leq ecs_{2n}(k,A)$.□

3.8 Lemas sobre números reales

Para poder demostrar ciertos teoremas, a continuación se introducen seis lemas sobre números reales, organizados en dos grupos, uno de cinco lemas y otro de uno. Sin embargo, en este caso, sólo se presentan los enunciados; mientras que, éstos con sus correspondientes demostraciones aparecen en el apéndice B.

3.8.1 Cinco lemas sobre números reales

Cualesquiera números reales p, q y r cumplen las siguientes propiedades.

L1

a) 1-max(1-p,1-q)=min(p,q).
b) 1-min(1-p,1-q)=max(p,q).

L2

a) max(max(p,q),r)=max(p,max(q,r)).
b) min(min(p,q),r)=min(p,min(q,r)).

L3

a) max(p,min(q,r))=min(max(p,q),max(p,r)).
b) min(p,max(q,r))=max(min(p,q),min(p,r)).

L4

a) max(min(p,r-q),min(r-p,q))=min(max(p,q),max(r-p,r-q)).
b) min(max(p,r-q),max(r-p,q))=max(min(p,q),min(r-p,r-q)).

L5

a) max(p,min(p,q))=p.
b) min(p,max(p,q))=p.

3.8.2 Un lema más sobre números reales

Cualesquiera números reales p_0, ..., p_m, cumplen las siguientes propiedades.

L6

a) $\max(\max(p_0,...,p_i),\max(p_{i+1},...,p_m))=\max(p_0,...,p_m)$.
b) $\min(\min(p_0,...,p_i),\min(p_{i+1},...,p_m))=\min(p_0,...,p_m)$.

Los resultados anteriores, sobre números reales, constituyen seis lemas que, en particular, permiten demostrar las siguientes propiedades.

3.9 Propiedades en términos de las funciones ec, ecs_{2n}, efs_{2n} y cal_{2n} a partir de los lemas sobre números reales

3.9.1 Propiedades en términos de ec

T22

a) 1-max(1-ec(k,A),1-ec(k,B))=min(ec(k,A),ec(k,B)).
b) 1-min(1-ec(k,A),1-ec(k,B))=max(ec(k,A),ec(k,B)).

Demostración
Por D2, ec(k,A), ec(k,B)) y ec(k,C) son números reales.
Implica:
a) Por L1 a), 1-max(1-ec(k,A),1-ec(k,B))=min(ec(k,A),ec(k,B)).
b) Por L1 b), 1-min(1-ec(k,A),1-ec(k,B))=max(ec(k,A),ec(k,B)).□

T23

a) max(max(ec(k,A),ec(k,B)),ec(k,C))
=max(ec(k,A),max(ec(k,B),ec(k,C))).
b) min(min(ec(k,A),ec(k,B)),ec(k,C))
=min(ec(k,A),min(ec(k,B),ec(k,C))).

Demostración

Por D2, ec(k,A), ec(k,B) y ec(k,C) son números reales.

Implica:

a) Por L2 a), max(max(ec(k,A),ec(k,B)),ec(k,C))
=max(ec(k,A),max(ec(k,B),ec(k,C))).

b) Por L2 b), min(min(ec(k,A),ec(k,B)),ec(k,C))
=min(ec(k,A),min(ec(k,B),ec(k,C))).□

T24

a) max(ec(k,A),min(ec(k,B)),ec(k,C)))
=min(max(ec(k,A),ec(k,B)),max(ec(k,A),ec(k,C))).

b) min(ec(k,A),max(ec(k,B)),ec(k,C)))
=max(min(ec(k,A),ec(k,B)),min(ec(k,A),ec(k,C))).

Demostración

Por D2, ec(k,A), ec(k,B) y ec(k,C) son números reales.

Implica:

a) Por L3 a), max(ec(k,A),min(ec(k,B),ec(k,C)))
=min(max(ec(k,A),ec(k,B)),max(ec(k,A),ec(k,C))).

b) Por L3 b), min(ec(k,A),max(ec(k,B),ec(k,C)))
=max(min(ec(k,A),ec(k,B)),min(ec(k,A),ec(k,C))).□

T25

a) max(min(1-ec(k,A),ec(k,B)),min(1-ec(k,B),ec(k,A)))
=min(max(ec(k,A),ec(k,B)),max(1-ec(k,A),1-ec(k,B))).

b) min(max(1-ec(k,A),ec(k,B)),max(1-ec(k,B),ec(k,A)))
=max(min(ec(k,A),ec(k,B)),min(1-ec(k,A),1-ec(k,B))).

Demostración

Por D2, ec(k,A) y ec(k,B) son números reales.

Implica:

a) Por L4 a), max(min(1-ec(k,A),ec(k,B)),min(1-ec(k,B),ec(k,A)))
=min(max(ec(k,A),ec(k,B)),max(1-ec(k,A),1-ec(k,B))).

b) Por L4 b), min(max(1-ec(k,A),ec(k,B)),max(1-ec(k,B),ec(k,A)))
=max(min(ec(k,A),ec(k,B)),min(1-ec(k,A),1-ec(k,B))).□

T26

a) max(ec(k,A),min(ec(k,A),ec(k,B)))=ec(k,A).

b) min(ec(k,A),max(ec(k,A),ec(k,B)))=ec(k,A).

Demostración

Por D2, ec(k,A) y ec(k,B) son números reales.

Implica:

a) Por L5 b), max(ec(k,A),min(ec(k,A),ec(k,B)))=ec(k,A).

b) Por L5 a), min(ec(k,A),max(ec(k,A),ec(k,B)))=ec(k,A).□

T27

a) max(max(ec(k,A_j):j=0,...,i),max(ec(k,A_j):j=i+1,...,m)
=max((ec(k,A_j):j=0,...,m).

b) min(min(ec(k,A_j):j=0,...,i),min(ec(k,A_j):j=i+1,...,m)
=min((ec(k,A_j):j=0,...,m).

Demostración

Por D2, ec(k,A_o), ..., ec(k,A_m) son números reales.

Implica:

a) Por L6 a), max(max(ec(k,A_j):j=0,...,i),max(ec(k,A_j):j=i+1,...,m)
=max((ec(k,A_j):j=0,...,m).

b) min(min(ec(k,A_j):j=0,...,i),min(ec(k,A_j):j=i+1,...,m)
=min((ec(k,A_j):j=0,...,m).□

3.9.2 Propiedades en términos de ecs_{2n}

T28

a) $\max(\max(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)),ecs_{2n}(k,C))$
$=\max(ecs_{2n}(k,A),\max(ecs_{2n}(k,B),ecs_{2n}(k,C)))$.

b) $\min(\min(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)),ecs_{2n}(k,C))$
$=\min(ecs_{2n}(k,A),\min(ecs_{2n}(k,B),ecs_{2n}(k,C)))$.

Demostración

Por D2, $ecs_{2n}(k,A)$, $ecs_{2n}(k,B)$ y $ecs_{2n}(k,C)$ son números reales.

Implica:

a) Por L2 a), $\max(\max(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)),ecs_{2n}(k,C))$
$=\max(ecs_{2n}(k,A),\max(ecs_{2n}(k,B),ecs_{2n}(k,C)))$.

b) Por L2 b), $\min(\min(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)),ecs_{2n}(k,C))$
$=\min(ecs_{2n}(k,A),\min(ecs_{2n}(k,B),ecs_{2n}(k,C)))$.□

T29

a) $\max(ecs_{2n}(k,A),\min(ecs_{2n}(k,B),ecs_{2n}(k,C)))$
$=\min(\max(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)),\max(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,C)))$.

b) $\min(ecs_{2n}(k,A),\max(ecs_{2n}(k,B),ecs_{2n}(k,C)))$
$=\max(\min(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)),\min(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,C)))$.

Demostración

Por D2, $ecs_{2n}(k,A)$, $ecs_{2n}(k,B)$ y $ecs_{2n}(k,C)$ son números reales.

Implica:

a) Por L3 a), $\max(ecs_{2n}(k,A),\min(ecs_{2n}(k,B),ecs_{2n}(k,C)))$
$=\min(\max(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)),\max(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,C)))$.

b) Por L3 b), $\min(ecs_{2n}(k,A),\max(ecs_{2n}(k,B),ecs_{2n}(k,C)))$

$=\max(\min(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)),\min(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,C))).\square$

T30

a) $\max(ecs_{2n}(k,A),\min(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)))=ecs_{2n}(k,A)$.

b) $\min(ecs_{2n}(k,A),\max(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)))=ecs_{2n}(k,A)$.

Demostración

Por D2, $ecs_{2n}(k,A)$ y $ecs_{2n}(k,B)$ son números reales.

Implica:

a) Por L5 b), $\max(ecs_{2n}(k,A),\min(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)))=ecs_{2n}(k,A)$.

b) Por L5 a), $\min(ecs_{2n}(k,A),\max(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)))=ecs_{2n}(k,A)$.$\square$

T31

a) $\max(\max(ecs_{2n}(k,A_j):j=0,...,i),\max(ecs_{2n}(k,A_j):j=i+1,...,m)$
$=\max((ec(k,A_j):j=0,...,m)$.

b) $\min(\min(ecs_{2n}(k,A_j):j=0,...,i),\min(ecs_{2n}(k,A_j):j=i+1,...,m)$
$=\min((ecs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

Demostración

Por D2, $ec(k,A_o)$, ..., $ec(k,A_m)$ son números reales.

Implica:

a) Por L6 a), $\max(\max(ecs_{2n}(k,A_j):j=0,...,i),\max(ecs_{2n}(k,A_j):j=i+1,...,m)$
$=\max((ecs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

b) $\min(\min(ecs_{2n}(k,A_j):j=0,...,i),\min(ecs_{2n}(k,A_j):j=i+1,...,m)$
$=\min((ecs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.$\square$

3.9.3 Propiedades en términos de efs_{2n}

T32

a) $\max(\max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)),efs_{2n}(k,C))$
$=\max(efs_{2n}(k,A),\max(efs_{2n}(k,B),efs_{2n}(k,C)))$.

b) $\min(\min(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)),efs_{2n}(k,C))$
$=\min(efs_{2n}(k,A),\min(efs_{2n}(k,B),efs_{2n}(k,C)))$.

Demostración

Por D2, $efs_{2n}(k,A)$, $efs_{2n}(k,B)$ y $efs_{2n}(k,C)$ son números reales.

Implica:

a) Por L2 a), $\max(\max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)),efs_{2n}(k,C))$
$=\max(efs_{2n}(k,A),\max(efs_{2n}(k,B),efs_{2n}(k,C)))$.

b) Por L2 b), $\min(\min(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)),efs_{2n}(k,C))$
$=\min(efs_{2n}(k,A),\min(efs_{2n}(k,B),efs_{2n}(k,C)))$.□

T33

a) $\max(efs_{2n}(k,A),\min(efs_{2n}(k,B),efs_{2n}(k,C)))$
$=\min(\max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)),\max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,C)))$.

b) $\min(efs_{2n}(k,A),\max(efs_{2n}(k,B),efs_{2n}(k,C)))$
$=\max(\min(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)),\min(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,C)))$.

Demostración

Por D2, $efs_{2n}(k,A)$, $efs_{2n}(k,B)$ y $efs_{2n}(k,C)$ son números reales.

Implica:

a) Por L3 a), $\max(efs_{2n}(k,A),\min(efs_{2n}(k,B)),efs_{2n}(k,C)))$
$=\min(\max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)),\max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,C)))$.

b) Por L3 b), $\min(efs_{2n}(k,A),\max(efs_{2n}(k,B),efs_{2n}(k,C)))$
$=\max(\min(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)),\min(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,C)))$.□

T34

a) $\max(efs_{2n}(k,A),\min(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)))=efs_{2n}(k,A)$.

b) $\min(efs_{2n}(k,A),\max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)))=efs_{2n}(k,A)$.

Demostración

Por D2, $efs_{2n}(k,A)$ y $efs_{2n}(k,B)$ son números reales.

Implica:

a) Por L5 b), $\max(efs_{2n}(k,A),\min(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)))=efs_{2n}(k,A)$.

b) Por L5 a), $\min(efs_{2n}(k,A),\max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)))=efs_{2n}(k,A)$.□

T35

a) $\max(\max(efs_{2n}(k,A_j):j=0,...,i),\max(efs_{2n}(k,A_j):j=i+1,...,m)$
$=\max((efs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

b) $\min(\min(efs_{2n}(k,A_j):j=0,...,i),\min(efs_{2n}(k,A_j):j=i+1,...,m)$
$=\min((efs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

Demostración

Por D2, $efs_{2n}(k,A_o)$, ..., $efs_{2n}(k,A_m)$ son números reales.

Implica:

a) Por L6 a), $\max(\max(efs_{2n}(k,A_j):j=0,...,i),\max(efs_{2n}(k,A_j):j=i+1,...,m)$
$=\max((efs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

b) $\min(\min(efs_{2n}(k,A_j):j=0,...,i),\min(efs_{2n}(k,A_j):j=i+1,...,m)$
$=\min((efs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.□

3.9.4 Propiedades en términos de cal_{2n}

T36

a) $\min(cal_{2n}(k,A),\max(cal_{2n}(k,B),cal_{2n}(k,C)))$
$=\max(\min(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B)),\min(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,C)))$.

b) $\max(cal_{2n}(k,A),\min(cal_{2n}(k,B),cal_{2n}(k,C)))$
$=\min(\max(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B)),\max(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,C)))$.

c) $\min(\max(cal_{2n}(k,A),2n-cal_{2n}(k,B)),\max(cal_{2n}(k,B),2n-cal_{2n}(k,A)))$
$=\max(\min(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B)),\min(2n-cal_{2n}(k,A),2n-cal_{2n}(k,B)))$.

Demostración

a) $cal_{2n}(k,A)$, $cal_{2n}(k,B)$ y $cal_{2n}(k,C)$ son números reales, por L3 b)
$\min(cal_{2n}(k,A),\max(cal_{2n}(k,B),cal_{2n}(k,C)))$
$=\max(\min(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B)),\min(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,C)))$.

b) $cal_{2n}(k,A)$, $cal_{2n}(k,B)$ y $cal_{2n}(k,C)$ son números reales, por L3 a)
$\max(cal_{2n}(k,A),\min(cal_{2n}(k,B),cal_{2n}(k,C)))$
$=\min(\max(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B)),\max(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,C)))$.

c) $cal_{2n}(k,A)$, $cal_{2n}(k,B)$ y $cal_{2n}(k,C)$ son números reales, por L4 b)
$\min(\max(cal_{2n}(k,A),2n-cal_{2n}(k,B)),\max(cal_{2n}(k,B),2n-cal_{2n}(k,A)))$
$=\max(\min(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B)),\min(2n-cal_{2n}(k,A),2n-cal_{2n}(k,B)))$.□

T37

a) $\max(\max(cal_{2n}(k,A_j):j=0,...,i),\max(cal_{2n}(k,A_j):j=i+1,...,m)$
$=\max((cal_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

b) $\min(\min(cal_{2n}(k,A_j):j=0,...,i),\min(cal_{2n}(k,A_j):j=i+1,...,m)$
$=\min((cal_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

Demostración

Por D2, $cal_{2n}(k,A_o)$, ..., $cal_{2n}(k,A_m)$ son números reales.

Implica:

a) Por L6 a), $\max(\max(cal_{2n}(k,A_j):j=0,...,i),\max(cal_{2n}(k,A_j):j=i+1,...,m)$
$=\max((cal_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

b) $\min(\min(cal_{2n}(k,A_j):j=0,...,i),\min(cal_{2n}(k,A_j):j=i+1,...,m)$
$=\min((cal_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.□

3.10 Conectivos lógicos en la lógica de plausibilidad generalizada

El propósito de la lógica de plausibilidad generalizada, como lógica veritativo-funcional, es determinar la plausibilidad de una afirmación a partir de la plausibilidad de las afirmaciones que la forman. Ahora bien, la interrelación entre éstas está determinada por sus conectivos lógicos.

Al igual que en la lógica de plausibilidad, en la lógica de plausibilidad generalizada se consideran cinco conectivos lógicos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$, conocidos por negación, conjunción, disyunción, implicación y coimplicación, respectivamente. Todos ellos enlazan dos afirmaciones, salvo el conectivo $\neg$, la negación, que actúa sobre una sola afirmación. Estos conectivos dan lugar a dos tipos de afirmaciones: molecular, si tiene al menos un conectivo; y atómica, si no posee ninguno. Por tanto, una afirmación molecular puede tener más de un conectivo, pero sólo uno de ellos la caracteriza, el conectivo dominante. Es decir, una afirmación molecular es una negación, conjunción, disyunción, implicación o coimplicación si el conectivo dominante es $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ó $\leftrightarrow$, respectivamente. Por tanto, en una afirmación con más de un conectivo lógico, es necesario indicar el conectivo dominante. En este caso, procediendo igualmente que en la lógica de plausibilidad (véase sección 2.6), se recurre al uso de paréntesis y, con el propósito de reducir el número de éstos, se establece un convenio de prioridad entre conectivos: el más débil es $\neg$; con igual prioridad entre ellos, le siguen $\wedge$ y $\vee$; por último, los más fuertes son $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ con la misma prioridad entre ambos. No obstante, cualquier conectivo puede ser el dominante si así lo indican los paréntesis.

3.11 Evidencia y plausibilidad funcionales en la lógica de plausibilidad generalizada

Al nivel de afirmaciones moleculares se da la evidencia y plausibilidad funcionales: si la evidencia de una afirmación molecular está determinada por el conectivo dominante y la evidencia de las afirmaciones que dicho conectivo enlaza, su evidencia es funcional;

análogamente, la plausibilidad de una afirmación molecular es funcional, si está determinada por el conectivo dominante y la plausibilidad de las afirmaciones que tal conectivo une.

Por tanto, los conectivos lógicos establecen las interrelaciones entre las afirmaciones que forman una afirmación molecular, y determinan así de ésta su evidencia y plausibilidad funcionales a partir de sus partes. Por tal razón, son los conectivos lógicos los que caracterizan la lógica de plausibilidad generalizada; pues como se señala en 2.1.2, al ser una lógica polivalente, es veritativo-funcional.

3.12 Axiomas de la lógica de plausibilidad generalizada

En la lógica de plausibilidad generalizada, por D1, la polivalencia está determinada, para cualquier natural n mayor que 1, por P_{2n}={0, 1, ..., 2n}; es decir, la plausibilidad de una afirmación toma valores en P_{2n}={0, 1, ..., 2n}. A su vez, según D4, dichos valores están clasificados, a través de regiones de plausibilidad: S_0^{2n}={0, 1, ..., n-1}, S_1^{2n}={n} y S_2^{2n}={n+1, n+2, ..., 2n}, de rechazo, indeterminación y aceptación, respectivamente; por T6, las tres regiones constituyen una partición de P_{2n}.

El estado de plausibilidad de una afirmación está determinado por la función cal_{2n}, y a su vez ésta se define en términos de las funciones numéricas ec, ef, ecs_{2n} y efs_{2n}. Por tanto ahora, al contar con esta representación funcional de la evidencia y plausibilidad, se establecen los axiomas de la lógica de plausibilidad generalizada, respetando los axiomas de la lógica de plausibilidad, en el sentido que ésta es un caso particular de aquélla.

En el caso de la lógica de plausibilidad generalizada, si la evidencia de una afirmación molecular es funcional, se determina a partir de los siguientes axiomas (esquema) o bien de propiedades a su vez deducidas de tales axiomas.

AE1

$ec(k,\neg A)=1-ec(k,A)$

$ecs_{2n}(k,\neg A)=efs_{2n}(k,A)$

$efs_{2n}(k,\neg A)=ecs_{2n}(k,A)$.

AE2

$ec(k,A\wedge B)=\max(ec(k,A),ec(k,B))$

$ecs_{2n}(k,A\wedge B)=\max(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B))$

$efs_{2n}(k,A\wedge B)=\min(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B))$.

AE3

$ec(k,A\vee B)=ec(k,\neg(\neg A\wedge\neg B))$

$ecs_{2n}(k,A\vee B)=ecs_{2n}(k,\neg(\neg A\wedge\neg B))$

$efs_{2n}(k,A\vee B)=efs_{2n}(k,\neg(\neg A\wedge\neg B))$.

AE4

$ec(k,A\rightarrow B)=ec(k,\neg A\vee B)$

$ecs_{2n}(k,A\rightarrow B)=ecs_{2n}(k,\neg A\vee B)$

$efs_{2n}(k,A\rightarrow B)=efs_{2n}(k,\neg A\vee B)$.

AE5

$ec(k,A\leftrightarrow B)=ec(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$

$ecs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=ecs_{2n}(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$

$efs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=efs_{2n}(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$.

AE6

$cal_{2n}(k,A)\in\bigcup_{i=0}^{1}S_i^{2n}$ y $cal_{2n}(k,B)\in S_2^{2n}$. Implica, $efs_{2n}(k,A)\leq efs_{2n}(k,B)$.

3.13 Justificación de los axiomas de la lógica de plausibilidad generalizada

De los seis axiomas de la lógica de plausibilidad generalizada, los cinco primeros AE1, AE2, AE3, AE4 y AE5, son una generalización de los axiomas de la lógica de plausibilidad A1, A2, A3, A4 y A5, respectivamente. Resultan al sustituir en estos últimos las funciones ecs por ecs_{2n} y efs por efs_{2n}.

El axioma A6 es, como se afirma en la sección 2.6,

A6

$ec(k,\forall xAx)=ec(k,Ax_1\wedge...\wedge Ax_n)$

$ecs(k,\forall xAx)=ecs(k,Ax_1\wedge...\wedge Ax_n)$

$efs(k,\forall xAx)=efs(k,Ax_1\wedge...\wedge Ax_n)$

$ec(k,\exists xAx)=ec(k,Ax_1\vee...\vee Ax_n)$

$ecs(k,\exists xAx)=ecs(k,Ax_1\vee...\vee Ax_n)$

$efs(k,\exists xAx)=efs(k,Ax_1\vee...\vee Ax_n)$.

Tal que A es un predicado, x una variable y $\{x_1,..., x_n\}$ es el dominio de x o universo de los cuantificadores $\forall$ y $\exists$.

Pero no existe su correspondiente en la lógica de plausibilidad generalizada. Pues, el que sería su axioma correspondiente lo constituyen los teoremas T60 y T61; por tanto, es innecesario, al poder demostrarlo. No obstante, sí existe AE6, sexto y último axioma de la lógica de plausibilidad generalizada, que corresponde también al último de la lógica de plausibilidad, el séptimo axioma:

A7

$cal(k,A)<cal(k,B)=3$. Implica, $efs(k,A)\leq efs(k,B)$.

Ahora bien, si se generaliza A7 al nivel de la lógica de plausibilidad generalizada, resulta la siguiente formulación.

$cal_{2n}(k,A)<cal_{2n}(k,B)=n+1$. Implica, $efs_{2n}(k,A)\leq efs_{2n}(k,B)$.

Sin embargo, para $cal_{2n}(k,A)<n+1<cal_{2n}(k,B)\in S_2^{2n}$, por T11 $ecs_{2n}(k,A)\neq 0$; pero, nada se sabe sobre el valor de $efs_{2n}(k,A)$. Aunque, sí en el caso particular de la lógica de plausibilidad. Porque, si $cal(k,B)=4$, por la sección 2.5, se sabe que $efs(k,A)\leq 1$ y $efs(k,B)=1$; entonces, $efs(k,A)\leq efs(k,B)$. Por tanto, en la lógica de plausibilidad generalizada, para AE6, el correspondiente al axioma A7, no basta exigir

$cal_{2n}(k,A)<cal_{2n}(k,B)=n+1$. Implica, $efs_{2n}(k,A)\leq efs_{2n}(k,B)$.

Se necesita asegurar más:

$cal_{2n}(k,A)<n+1\leq cal_{2n}(k,B)$. Implica, $efs_{2n}(k,A)\leq efs_{2n}(k,B)$.

De manera equivalente,

$cal_{2n}(k,A)\in \bigcup_{i=0}^{1} S_i^{2n}$ y $cal_{2n}(k,B)\in S_2^{2n}$. Implica, $efs_{2n}(k,A)\leq efs_{2n}(k,B)$.

En la lógica de plausibilidad, según lo señalado en la sección 2.6, se introduce el axioma A7 para fundamentar la caracterización del conectivo $\vee$. Lo mismo sucede con AE6 en la lógica de plausibilidad generalizada, al fundamentar T64, a través del siguiente teorema.

3.14 Una consecuencia del axioma AE6

T38

$cal_{2n}(k,A) \leq cal_{2n}(k,B) \in S_2^{2n}$. Implica, $efs_{2n}(k,A) \leq efs_{2n}(k,B)$.

Demostración

i) $cal_{2n}(k,A) \in \bigcup_{i=0}^{1} S_i^{2n}$;

por hipótesis, $cal_{2n}(k,B) \in S_2^{2n}$. Por AE6,

$efs_{2n}(k,A) \leq efs_{2n}(k,B)$.

ii) $cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$;

por hipótesis, $cal_{2n}(k,B) \in S_2^{2n}$. Por T15,

$cal_{2n}(k,A)=n+1+efs_{2n}(k,A)$ y

$cal_{2n}(k,B)=n+1+efs_{2n}(k,B)$;

por hipótesis, $cal_{2n}(k,A) \leq cal_{2n}(k,B)$.

Implica,

$efs_{2n}(k,A) \leq efs_{2n}(k,B)$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A) \leq cal_{2n}(k,B) \in S_2^{2n}$. Implica,

$efs_{2n}(k,A) \leq efs_{2n}(k,B)$.□

3.15 Propiedades al nivel de evidencia de los conectivos de la lógica de plausibilidad generalizada

Como se destaca en la sección 2.1.2, una lógica polivalente se fundamenta, esencialmente, en la definición de sus conectivos y en su polivalencia. Además, se señala, precisamente, que la construcción de la lógica de plausibilidad ganeralizada se articula en ambas condiciones. Sin embargo, para caracterizar al nivel de plausibilidad los conectivos y, en general, para deducir

sus propiedades, previamente se necesita hacerlo al nivel de evidencia, a través de los siguientes teoremas.

3.15.1 Propiedades al nivel de evidencia de ¬ en la lógica de plausibilidad generalizada

T39

a) $ec(k,\neg(\neg A))=ec(k,A)$.

b) $ecs_{2n}(k,\neg(\neg A))=ecs_{2n}(k,A)$.

c) $efs_{2n}(k,\neg(\neg A))=efs_{2n}(k,A)$.

Demostración

a) Por AE1, $ec(k,\neg(\neg A))=1-ec(k,\neg A)$; por AE1

$=1-(1-ec(k,A))$,

$=ec(k,A)$.

Implica,

$ec(k,\neg(\neg A))=ec(k,A)$.

b) Por AE1, $ecs_{2n}(k,\neg(\neg A))=efs_{2n}(k,\neg A)$; por AE1

$=ecs_{2n}(k,A)$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,\neg(\neg A))=ecs_{2n}(k,A)$.

c) Por AE1, $efs_{2n}(k,\neg(\neg A))=ecs_{2n}(k,\neg A)$; por AE1

$=efs_{2n}(k,A)$.

Implica,

$efs_{2n}(k,\neg(\neg A))=efs_{2n}(k,A)$.□

T40

a) $ec(k,\neg A)=ec(k,\neg B)$ si y sólo si $ec(k,A)=ec(k,B)$.

b) $ecs_{2n}(k,\neg A)=ecs_{2n}(k,\neg B)$ si y sólo si $efs_{2n}(k,A)=efs_{2n}(k,B)$.

c) $efs_{2n}(k,\neg A)=efs_{2n}(k,\neg B)$ si y sólo si $ecs_{2n}(k,A)=ecs_{2n}(k,B)$.

Demostración

a)

i) $ec(k,\neg A)=ec(k,\neg B)$, por AE1

$1-ec(k,A)=1-ec(k,B)$,

$ec(k,A)=ec(k,B)$.

Implica,

$ec(k,\neg A)=ec(k,\neg B)$ implica

$ec(k,A)=ec(k,B)$.

ii) $ec(k,A)=ec(k,B)$,

$1-ec(k,A)=1-ec(k,B)$, por AE1

$ec(k,\neg A)=ec(k,\neg B)$.

Implica,

$ec(k,A)=ec(k,B)$ implica

$ec(k,\neg A)=ec(k,\neg B)$.

Por i) y ii),

$ec(k,\neg A)=ec(k,\neg B)$ si y sólo si $ec(k,A)=ec(k,B)$.

b)

i) $ecs_{2n}(k,\neg A)=ecs_{2n}(k,\neg B)$, por AE1

$efs_{2n}(k,A)=efs_{2n}(k,B)$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,\neg A)=ecs_{2n}(k,\neg B)$ implica $efs_{2n}(k,A)=efs_{2n}(k,B)$.

ii) $efs_{2n}(k,A)=efs_{2n}(k,B)$, por AE1

$ecs_{2n}(k,\neg A)=ecs_{2n}(k,\neg B)$.

Implica,

$efs_{2n}(k,A)=efs_{2n}(k,B)$ implica $ecs_{2n}(k,\neg A)=ecs_{2n}(k,\neg B)$.

Por i) y ii),

$ecs_{2n}(k,\neg A)=ecs_{2n}(k,\neg B)$ si y sólo si $efs_{2n}(k,A)=efs_{2n}(k,B)$.

c)

i) $efs_{2n}(k,\neg A)=ef_{2n}(k,\neg B)$, por AE1,

$ecs_{2n}(k,A)=ecs_{2n}(k,B)$.

Implica,

$efs_{2n}(k,\neg A)=ef_{2n}(k,\neg B)$ implica $ecs_{2n}(k,A)=ecs_{2n}(k,B)$.

ii) $ecs_{2n}(k,A)=ecs_{2n}(k,B)$, por AE1

$efs_{2n}(k,\neg A)=ef_{2n}(k,\neg B)$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,A)=ecs_{2n}(k,B)$ implica $efs_{2n}(k,\neg A)=ef_{2n}(k,\neg B)$.

Por i) y ii),

$efs_{2n}(k,\neg A)=ef_{2n}(k,\neg B)$ si y sólo si $ecs_{2n}(k,A)=ecs_{2n}(k,B)$.□

T41

a) $ec(k,\neg A)<ec(k,\neg B)$ si y sólo si $ec(k,B)<ec(k,A)$.

b) $ecs_{2n}(k,\neg A)<ecs_{2n}(k,\neg B)$ si y sólo si $efs_{2n}(k,A)<efs_{2n}(k,B)$.

c) $efs_{2n}(k,\neg A)<efs_{2n}(k,\neg B)$ si y sólo si $ecs_{2n}(k,A)<ecs_{2n}(k,B)$.

Demostración

a)

i) $ec(k,\neg A)<ec(k,\neg B)$, por AE1

$1-ec(k,A)<1-ec(k,B)$,

$ec(k,B)<ec(k,A)$.

Implica,

$ec(k,\neg A)<ec(k,\neg B)$ implica

$ec(k,B)<ec(k,A)$.

ii) $ec(k,B)<ec(k,A)$,

$1-ec(k,A)<1-ec(k,B)$, por AE1

$ec(k,\neg A)<ec(k,\neg B)$.

Implica,

$ec(k,A)<ec(k,B)$ implica

$ec(k,\neg A)<ec(k,\neg B)$.

Por i) y ii),

$ec(k,\neg A)<ec(k,\neg B)$ si y sólo si

$ec(k,A)<ec(k,B)$.

b)

i) $ecs_{2n}(k,\neg A)<ecs_{2n}(k,\neg B)$, por AE1

$efs_{2n}(k,A)<efs_{2n}(k,B)$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,\neg A)<ecs_{2n}(k,\neg B)$ implica

$efs_{2n}(k,A)<efs_{2n}(k,B)$.

ii) $efs_{2n}(k,A)<efs_{2n}(k,B)$, por AE1

$ecs_{2n}(k,\neg A)<ecs_{2n}(k,\neg B)$.

Implica,

$efs_{2n}(k,A)<efs_{2n}(k,B)$ implica

$ecs_{2n}(k,\neg A)<ecs_{2n}(k,\neg B)$.

Por i) y ii),

$ecs_{2n}(k,\neg A)<ecs_{2n}(k,\neg B)$ si y sólo si

$efs_{2n}(k,A)<efs_{2n}(k,B)$.

c)

i) $efs_{2n}(k,\neg A)<ef_{2n}(k,\neg B)$, por AE1

$ecs_{2n}(k,A)<ecs_{2n}(k,B)$.

Implica,

$efs_{2n}(k,\neg A)<ef_{2n}(k,\neg B)$ implica

$ecs_{2n}(k,A)<ecs_{2n}(k,B)$.

ii) $ecs_{2n}(k,A)<ecs_{2n}(k,B)$, por AE1

$efs_{2n}(k,\neg A)<ef_{2n}(k,\neg B)$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,A)<ecs_{2n}(k,B)$ implica

$efs_{2n}(k,\neg A)<ef_{2n}(k,\neg B)$.

Por i) y ii),

$efs_{2n}(k,\neg A)<ef_{2n}(k,\neg B)$ si y sólo si

$ecs_{2n}(k,A)<ecs_{2n}(k,B)$.□

3.15.2 Caracterización mediante la evidencia de $\vee$ en la lógica de plausibilidad generalizada

T42

a) $ec(k,A\vee B)=\min(ec(k,A),ec(k,B))$.
b) $ecs_{2n}(k,A\vee B)=\min(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B))$.
c) $efs_{2n}(k,A\vee B)=\max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B))$.

Demostración

a) Por AE3, $ec(k,A\vee B)=ec(k,\neg(\neg A\wedge\neg B))$; por AE1

$=1-ec(k,\neg A\wedge\neg B)$, por AE2

$=1-\max(ec(k,\neg A),ec(k,\neg B))$, por AE1

$=1-\max(1-ec(k,A),1-ec(k,B))$, por T22

$=\min(ec(k,A),ec(k,B))$.

Implica,

$ec(k,A\vee B)$

$=\min(ec(k,A),ec(k,B))$.

b) Por AE3, $ecs_{2n}(k,A\vee B)=ecs_{2n}(k,\neg(\neg A\wedge\neg B))$; por AE1

$=efs_{2n}(k,\neg A\wedge\neg B)$, por AE2

$=\min(efs_{2n}(k,\neg A),efs_{2n}(k,\neg B))$, por AE1

$=\min(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B))$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,A\vee B)$

$=\min(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B))$.

c) Por AE3, $efs_{2n}(k,A\vee B)=efs_{2n}(k,\neg(\neg A\wedge\neg B))$; por AE1

$=ecs_{2n}(k,\neg A\wedge\neg B)$, por AE2

$=\max(ecs_{2n}(k,\neg A),ecs_{2n}(k,\neg B))$, por AE1

$=\max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B))$.

Implica,

$efs_{2n}(k,A\vee B)$

$=\max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B))$.□

3.15.3 Propiedades al nivel de evidencia de $\wedge$ y $\vee$ en la lógica de plausibilidad generalizada

T43

a.1) $ec(k,A\wedge B)=ec(k,B\wedge A)$.	a.2) $ec(k,A\vee B)=ec(k,B\vee A)$.
b.1) $ecs_{2n}(k,A\wedge B)=ecs_{2n}(k,B\wedge A)$.	b.2) $ecs_{2n}(k,A\vee B)=ecs_{2n}(k,B\vee A)$.
c.1) $efs_{2n}(k,A\wedge B)=efs_{2n}(k,B\wedge A)$.	c.2) $efs_{2n}(k,A\vee B)=efs_{2n}(k,B\vee A)$.

Demostración

a.1) Por AE2, $ec(k,A\wedge B)=\max(ec(k,A),ec(k,B))$,

$=\max(ec(k,B),ec(k,A))$, por AE2

$=ec(k,B\wedge A)$.

Implica,

$ec(k,A\wedge B)=ec(k,B\wedge A)$.

a.2) Por T42, $ec(k,A\vee B)=\min(ec(k,A),ec(k,B))$,

$=\min(ec(k,B),ec(k,A))$, por T42

$=ec(k,B\vee A)$.

Implica,

$ec(k,A\vee B)=ec(k,B\vee A)$.

b.1) Por AE2, $ecs_{2n}(k,A\wedge B)=\max(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B))$,

$=\max(ecs_{2n}(k,B),ecs_{2n}(k,A))$, por AE2

$=ecs_{2n}(k,B\wedge A)$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,A\wedge B)=ecs_{2n}(k,B\wedge A)$.

b.2) Por T42, $ecs_{2n}(k,A\vee B)=\min(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B))$,

$=\min(ecs_{2n}(k,B),ecs_{2n}(k,A))$, por T42

$=ecs_{2n}(k,B\vee A)$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,A\vee B)=ecs_{2n}(k,B\vee A)$.

c.1) Por AE2, $efs_{2n}(k,A\wedge B)=\min(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B))$,

$=\min(efs_{2n}(k,B),efs_{2n}(k,A))$, por AE2

$=efs_{2n}(k,B\wedge A)$.

Implica,

$efs_{2n}(k,A\wedge B)=efs_{2n}(k,B\wedge A)$.

c.2) Por T42, $efs_{2n}(k,A\vee B)=\max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B))$,

$=\max(efs_{2n}(k,B),efs_{2n}(k,A))$, por T42

$=efs_{2n}(k,B\vee A)$.

Implica,

$efs_{2n}(k,A\vee B)=efs_{2n}(k,B\vee A)$.□

T44

a.1) $ec(k,(A\wedge B)\wedge C)=ec(k,A\wedge(B\wedge C))$.	a.2) $ec(k,(A\vee B)\vee C)=ec(k,A\vee(B\vee C))$.
b.1) $ecs_{2n}(k,(A\wedge B)\wedge C)=ecs_{2n}(k,A\wedge(B\wedge C))$.	b.2) $ecs_{2n}(k,(A\vee B)\vee C)=ecs_{2n}(k,A\vee(B\vee C))$.
c.1) $efs_{2n}(k,(A\wedge B)\wedge C)=efs_{2n}(k,A\wedge(B\wedge C))$.	c.2) $efs_{2n}(k,(A\vee B)\vee C)=efs_{2n}(k,A\vee(B\vee C))$.

Demostración

a.1) Por AE2, $ec(k,(A\wedge B)\wedge C)=\max(ec(k,A\wedge B),ec(k,C))$; por AE2,

$=\max(\max(ec(k,A),ec(k,B)),ec(k,C))$, por T23

$=\max(ec(k,A),\max(ec(k,B)),ec(k,C)))$, por AE2

$=\max(ec(k,A), ec(k,B\wedge C))$, por AE2

$=ec(k,A\wedge(B\wedge C))$.

Implica,

$ec(k,(A\wedge B)\wedge C)=ec(k,A\wedge(B\wedge C))$.

a.2) Por T42, $ec(k,(A\vee B)\vee C)=\min(ec(k,A\vee B),ec(k,C))$; por T42

$=\min(\min(ec(k,A),ec(k,B)),ec(k,C))$, por T23

$=\min(ec(k,A),\min(ec(k,B)),ec(k,C)))$, por T42

$=\min(ec(k,A), ec(k,B\vee C))$, por T42

$=ec(k,A\vee(B\vee C))$.

Implica,

$ec(k,(A\vee B)\vee C)=ec(k,A\vee(B\vee C))$.

b.1) Por AE2, $ecs_{2n}(k,(A\wedge B)\wedge C)=\max(ecs_{2n}(k,A\wedge B),ecs_{2n}(k,C))$; por AE2

$=\max(\max(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)),ecs_{2n}(k,C))$, por T28

$=\max(ecs_{2n}(k,A),\max(ecs_{2n}(k,B)),ecs_{2n}(k,C))$, por AE2

$=\max(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B\wedge C)))$, por AE2

$=ecs_{2n}(k,A\wedge(B\wedge C))$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,(A\wedge B)\wedge C)=ecs_{2n}(k,A\wedge(B\wedge C))$.

b.2) Por T42, $ecs_{2n}(k,(A\vee B)\vee C)=\min(ecs_{2n}(k,A\vee B),ecs_{2n}(k,C))$; por T42

$=\min(\min(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)),ecs_{2n}(k,C))$, por T28

$=\min(ecs_{2n}(k,A),\min(ecs_{2n}(k,B)),ecs_{2n}(k,C)))$, por T42

$=\min(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B\vee C))$, por T42

$=ecs_{2n}(k,A\vee(B\vee C))$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,(A\vee B)\vee C)=ecs_{2n}(k,A\vee(B\vee C))$.

c.1) Por AE2, $efs_{2n}(k,(A\wedge B)\wedge C)=min(efs_{2n}(k,A\wedge B),efs_{2n}(k,C))$; por AE2

$=min(min(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)),efs_{2n}(k,C))$, por T32

$=min(efs_{2n}(k,A), min(efs_{2n}(k,B),efs_{2n}(k,C)))$, por AE2

$=min(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B\wedge C)))$, por AE2

$=efs_{2n}(k,A\wedge(B\wedge C))$.

Implica,

$efs_{2n}(k,(A\wedge B)\wedge C)=efs_{2n}(k,A\wedge(B\wedge C))$.

c.2) Por T42, $efs_{2n}(k,(A\vee B)\vee C)=max(efs_{2n}(k,A\vee B),efs_{2n}(k,C))$; por T42

$=max(max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)),efs_{2n}(k,C))$, por T32

$=max(efs_{2n}(k,A),max(efs_{2n}(k,B)),efs_{2n}(k,C)))$, por T42

$=max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B\vee C))$, por T42

$=efs_{2n}(k,A\vee(B\vee C))$.

Implica,

$efs_{2n}(k,(A\vee B)\vee C)=efs_{2n}(k,A\vee(B\vee C))$.□

T45

a.1) $ec(k,A\wedge(B\vee C))=ec(k,(A\wedge B)\vee(A\wedge C))$. a.2) $ec(k,A\vee(B\wedge C))=ec(k,(A\vee B)\wedge(A\vee C))$.

b.1) $ecs_{2n}(k,A\wedge(B\vee C))=ecs_{2n}(k,(A\wedge B)\vee(A\wedge C))$. b.2) $ecs_{2n}(k,A\vee(B\wedge C))=ecs_{2n}(k,(A\vee B)\wedge(A\vee C)$.

c.1) $efs_{2n}(k,A\wedge(B\vee C))=efs_{2n}(k,(A\wedge B)\vee(A\wedge C))$. c.2) $efs_{2n}(k,A\vee(B\wedge C))=efs_{2n}(k,(A\vee B)\wedge(A\vee C)$.

Demostración

a.1) Por AE2, $ec(k,A\wedge(B\vee C))=max(ec(k,A),ec(k,B\vee C))$; por T42

$=max(ec(k,A),min(ec(k,B)),ec(k,C)))$, por T24

$=min(max(ec(k,A),ec(k,B)),max(ec(k,A),ec(k,C)))$, por AE2

$=min(ec(k,A\wedge B),ec(k, A\wedge C))$, por T42

$=ec(k,(A\wedge B)\vee(A\wedge C))$.

Implica,

$ec(k,A\wedge(B\vee C))=ec(k,(A\wedge B)\vee(A\wedge C))$.

a.2) Por T42, $ec(k,A\vee(B\wedge C))=\min(ec(k,A),ec(k,B\wedge C))$; por AE2

$=\min(ec(k,A),\max(ec(k,B)),ec(k,C)))$, por T24

$=\max(\min(ec(k,A),ec(k,B)),\min(ec(k,A),ec(k,C)))$, por T42

$=\max(ec(k,A\vee B),ec(k,A\vee C))$, por AE2

$=ec(k,(A\vee B)\wedge(A\vee C))$.

Implica,

$ec(k,A\vee(B\wedge C))=ec(k,(A\vee B)\wedge(A\vee C))$.

b.1) Por AE2, $ecs_{2n}(k,A\wedge(B\vee C))=\max(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B\vee C))$; por T42

$=\max(ecs_{2n}(k,A),\min(ecs_{2n}(k,B)),ecs_{2n}(k,C)))$, por T29

$=\min(\max(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)),\max(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,C)))$, por AE2

$=\min(ecs_{2n}(k,A\wedge B),ecs_{2n}(k, A\wedge C))$, por T42

$= ecs_{2n}(k,(A\wedge B)\vee(A\wedge C))$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,A\wedge(B\vee C))=ecs_{2n}(k,(A\wedge B)\vee(A\wedge C))$.

b.2) Por T42, $ecs_{2n}(k,A\vee(B\wedge C))=\min(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B\wedge C))$; por AE2

$=\min(ecs_{2n}(k,A),\max(ecs_{2n}(k,B)),ecs_{2n}(k,C)))$, por T29

$=\max(\min(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)),\min(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,C)))$, por T42

$=\max(ecs_{2n}(k,A\vee B),ecs_{2n}(k,A\vee C))$, por AE2

$=ecs_{2n}(k,(A\vee B)\wedge(A\vee C))$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,A\vee(B\wedge C))=ecs_{2n}(k,(A\vee B)\wedge(A\vee C))$.

c.1) Por AE2, $efs_{2n}(k,A\wedge(B\vee C))=\min(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B\vee C))$; por T42

$=\min(efs_{2n}(k,A),\max(efs_{2n}(k,B)),efs_{2n}(k,C)))$, por T33

$=\max(\min(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)),\min(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,C)))$, por AE2

$=\max(efs_{2n}(k,A\wedge B),efs_{2n}(k, A\wedge C))$, por T42

$= efs_{2n}(k,(A\wedge B)\vee(A\wedge C))$.

Implica,

$efs_{2n}(k,A\wedge(B\vee C))=efs_{2n}(k,(A\wedge B)\vee(A\wedge C))$.

c.2) Por T42, $efs_{2n}(k,A\vee(B\wedge C))=\max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B\wedge C))$; por AE2

$=\max(efs_{2n}(k,A),\min(efs_{2n}(k,B)),efs_{2n}(k,C)))$, por T33

$=\min(\max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)),\max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,C)))$, por T42

$=\min(efs_{2n}(k,A\vee B),efs_{2n}(k,A\vee C))$, por AE2

$=efs_{2n}(k,(A\vee B)\wedge(A\vee C))$.

Implica,

$efs_{2n}(k,A\vee(B\wedge C))=efs_{2n}(k,(A\vee B)\wedge(A\vee C))$.□

T46

a.1) $ec(k,A\wedge A)=ec(k,A)$.	a.2) $ec(k,A\vee A)=ec(k,A)$.
b.1) $ecs_{2n}(k,A\wedge A)=ecs_{2n}(k,A)$.	b.2) $ecs_{2n}(k,A\vee A)=ecs_{2n}(k,A)$.
c.1) $efs_{2n}(k,A\wedge A)=efs_{2n}(k,A)$.	c.2) $efs_{2n}(k,A\vee A)=efs_{2n}(k,A)$.

Demostración

a.1) Por AE2, $ec(k,A\wedge A)=\max(ec(k,A),ec(k,A))$,

$=ec(k,A)$.

Implica,

$ec(k,A\wedge A)=ec(k,A)$.

a.2) Por T42, $ec(k,A\vee A)=\min(ec(k,A),ec(k,A))$,

$=ec(k,A)$.

Implica,

$ec(k,A\vee A)=ec(k,A)$.

b.1) Por AE2, $ecs_{2n}(k,A\wedge A)=\max(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,A))$,

$=ecs_{2n}(k,A)$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,A\wedge A)=ecs_{2n}(k,A)$.

b.2) Por T42, $ecs_{2n}(k,A\vee A)=\min(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,A))$,

$=ecs_{2n}(k,A)$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,A\vee A)=ecs_{2n}(k,A)$.

c.1) Por AE2, $efs_{2n}(k,A\wedge A)=\min(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,A))$,

$=efs_{2n}(k,A)$.

Implica,

$efs_{2n}(k,A\wedge A)=efs_{2n}(k,A)$.

c.2) Por T42, $efs_{2n}(k,A\vee A)=\max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,A))$,

$=efs_{2n}(k,A)$.

Implica,

$efs_{2n}(k,A\vee A)=efs_{2n}(k,A)$.□

T47

a.1) $ec(k,A\wedge(A\vee B))=ec(k,A)$.	a.2) $ec(k,A\vee(A\wedge B))=ec(k,A)$.
b.1) $ecs_{2n}(k,A\wedge(A\vee B))=ecs_{2n}(k,A)$.	b.2) $ecs_{2n}(k,A\vee(A\wedge B))=ecs_{2n}(k,A)$.
c.1) $efs_{2n}(k,A\wedge(A\vee B))=efs_{2n}(k,A)$.	c.2) $efs_{2n}(k,A\vee(A\wedge B))=efs_{2n}(k,A)$.

Demostración

a.1) Por AE2, $ec(k,A\wedge(A\vee B))=\max(ec(k,A),ec(k,A\vee B))$; por T42

$=\max(ec(k,A),\min(ec(k,A),ec(k,B)))$, por T24

$=\min(\max(ec(k,A),ec(k,A)),\max(ec(k,A),ec(k,B)))$,

$=\min(ec(k,A),\max(ec(k,A),ec(k,B)))$, por T24

$=ec(k,A)$.

Implica,

$ec(k,A\wedge(A\vee B))=ec(k,A)$.

a.2) Por T42, $ec(k,A\vee(A\wedge B))=\min(ec(k,A),ec(k,A\wedge B))$; por AE2

$=\min(ec(k,A),\max(ec(k,A),ec(k,B)))$, por T26

$=ec(k,A)$.

Implica,

$ec(k,A\vee(A\wedge B))=ec(k,A)$.

b.1) Por AE2, $ecs_{2n}(k,A\wedge(A\vee B))=\max(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,A\vee B))$; por T42

$=\max(ecs_{2n}(k,A),\min(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)))$, por T30

$=ecs_{2n}(k,A)$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,A\wedge(A\vee B))=ecs_{2n}(k,A)$.

b.2) Por T42, $ecs_{2n}(k,A\vee(A\wedge B))=\min(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,A\wedge B))$; por AE2,

$=\min(ecs_{2n}(k,A),\max(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)))$, por T30

$=ecs_{2n}(k,A)$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,A\vee(A\wedge B))= ecs_{2n}(k,A)$.

c.1) Por AE2, $efs_{2n}(k,A\wedge(A\vee B))=\min(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,A\vee B))$; por T42

$=\min(efs_{2n}(k,A),\max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)))$, por T34

$=efs_{2n}(k,A)$.

Implica,

$efs_{2n}(k,A\wedge(A\vee B))=efs_{2n}(k,A)$.

c.2) Por T42, $efs_{2n}(k,A\vee(A\wedge B))=\max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,A\wedge B))$; por AE2,

$=\max(efs_{2n}(k,A),\min(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)))$, por T34

$=efs_{2n}(k,A)$.

Implica,

$efs_{2n}(k,A\vee(A\wedge B))=efs_{2n}(k,A)$.□

T48

a) $ec(k,(A_0\wedge\ldots\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge\ldots\wedge A_m))=\max(ec(k,A_j):j=0,\ldots,m)$.

b) $ecs_{2n}(k,(A_0\wedge\ldots\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge\ldots\wedge A_m))=\max(ecs_{2n}(k,A_j):j=0,\ldots,m)$.

c) $efs_{2n}(k,(A_0\wedge\ldots\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge\ldots\wedge A_m))=\min(efs_{2n}(k,A_j):j=0,\ldots,m)$.

Demostración

Por inducción sobre el número m de conectivos.

a)

i) Por hipótesis de inducción,

si el número de conectivos es menor que m,

entonces se cumple a).

ii) Para m conectivos,

$ec(k,(A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))$, por AE2

$=max(ec(k,A_0\wedge...\wedge A_i),ec(k,A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))$, por hipótesis de inducción

$=max(max(ec(k,A_j):j=0,...,i),max(ec(k,A_j):j=i+1,...,m)$, por T27

$=max((ec(k,A_j):j=0,...,m)$.

Por i) y ii),

$ec(k,(A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))=max(ec(k,A_j):j=0,...,m)$.

b)

i) Por hipótesis de inducción,

si el número de conectivos es menor que m,

entonces se cumple b).

ii) Para m conectivos,

$ecs_{2n}(k,(A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))$, por AE2

$=max(ecs_{2n}(k,A_0\wedge...\wedge A_i),ecs_{2n}(k,A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))$, por hipótesis de inducción

$=max(max(ecs_{2n}(k,A_j):j=0,...,i),max(ecs_{2n}(k,A_j):j=i+1,...,m)$, por T31

$=max((ecs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

Por i) y ii),

$ecs_{2n}(k,(A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))=max(ecs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

c)

i) Por hipótesis de inducción,

si el número de conectivos es menor que m,

entonces se cumple c).

ii) Para m conectivos,

$efs_{2n}(k,(A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))$, por AE2

$=\min(efs_{2n}(k,A_0\wedge...\wedge A_i),efs_{2n}(k,A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))$, por hipótesis de inducción

$=\min(\min(efs_{2n}(k,A_j):j=0,...,i),\min(efs_{2n}(k,A_j):j=i+1,...,m)$, por T35

$=\min((efs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

Por i) y ii),

$efs_{2n}(k,(A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))=\min(efs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.□

T49

a) $ec(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))=\min(ec(k,A_j):j=0,...,m)$.

b) $ecs_{2n}(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))=\min(ecs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

c) $efs_{2n}(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))=\max(efs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

Demostración

Por inducción sobre el número m de conectivos.

a)

i) Por hipótesis de inducción,

si el número de conectivos es menor que m,

entonces se cumple a).

ii) Para m conectivos,

$ec(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))$, por AE2

$=\min(ec(k,A_0\vee...\vee A_i),ec(k,A_{i+1}\vee...\vee A_m))$, por hipótesis de inducción

$=\min(\min(ec(k,A_j):j=0,...,i),\min(ec(k,A_j):j=i+1,...,m)$, por T27

$=\min((ec(k,A_j):j=0,...,m)$.

Por i) y ii),

$ec(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))=\min(ec(k,A_j):j=0,...,m)$.

b)

i) Por hipótesis de inducción,

si el número de conectivos es menor que m,

entonces se cumple b).

ii) Para m conectivos,

$ecs_{2n}(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))$, por AE2

$=min(ecs_{2n}(k,A_0\vee...\vee A_i),ecs_{2n}(k,A_{i+1}\vee...\vee A_m))$, por hipótesis de inducción

$=min(min(ecs_{2n}(k,A_j):j=0,...,i),min(ecs_{2n}(k,A_j):j=i+1,...,m)$, por T31

$=min((ecs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

Por i) y ii),

$ecs_{2n}(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))=min(ecs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

c)

i) Por hipótesis de inducción,

si el número de conectivos es menor que m,

entonces se cumple c).

ii) Para m conectivos,

$efs_{2n}(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))$, por AE2

$=max(efs_{2n}(k,A_0\vee...\vee A_i),efs_{2n}(k,A_{i+1}\vee...\vee A_m))$, por hipótesis de inducción

$=max(max(efs_{2n}(k,A_j):j=0,...,i),max(efs_{2n}(k,A_j):j=i+1,...,m)$, por T35

$=max((efs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

Por i) y ii),

$efs_{2n}(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))=max(efs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.□

Los dos teoremas anteriores conducen a la siguiente definición.

D8

a) $A_0\wedge...\wedge A_m=(A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m)$.

b) $A_0\vee...\vee A_m=(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m)$.

A partir de esta definición, resultan los teoremas siguientes.

T50

a) $ec(k,A_0\wedge...\wedge A_m)=ec(k,(A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))$.

b) $ecs_{2n}(k,A_0\wedge...\wedge A_m)=ecs_{2n}(k,(A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))$.

c) $efs_{2n}(k,A_0\wedge...\wedge A_m)=efs_{2n}(k,(A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))$.

Demostración

a) Por D8, $A_0\wedge...\wedge A_m$

$=A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m)$;

por D2, ec es función. Implica,

$ec(k,A_0\wedge...\wedge A_m)$

$=ec(k,(A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))$.

b) Por D8, $A_0\wedge...\wedge A_m$

$=A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m)$;

por D2, ecs_{2n} es función. Implica,

$ecs_{2n}(k,A_0\wedge...\wedge A_m)$

$=ecs_{2n}(k,(A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))$.

c) Por D8, $A_0\wedge...\wedge A_m$

$=A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m)$;

por D2, efs_{2n} es función. Implica,

$efs_{2n}(k,A_0\wedge...\wedge A_m)$

$=efs_{2n}(k,(A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))$.□

T51

a) $ec(k,A_0\vee...\vee A_m)=ec(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))$.

b) $ecs_{2n}(k,A_0\vee...\vee A_m)=ecs_{2n}(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))$.

c) $efs_{2n}(k,A_0\vee...\vee A_m)=efs_{2n}(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))$.

Demostración

a) Por D8, $A_0\vee...\vee A_m$

$=(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m)$;

por D2, ec es función. Implica,

$ec(k,A_0\vee...\vee A_m)$

$=ec(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))$.

b) Por D8, $A_0\vee...\vee A_m$

$=(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m)$;

por D2, ecs_{2n} es función. Implica,

$ecs_{2n}(k,A_0\vee...\vee A_m)$

$=ecs_{2n}(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))$.

c) Por D8, $A_0\vee...\vee A_m$

$=(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m)$;

por D2, efs_{2n} es función. Implica,

$efs_{2n}(k,A_0\vee...\vee A_m)$

$=efs_{2n}(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))$.□

T52

a) $ec(k,A_0\wedge...\wedge A_m)=\max(ec(k,A_j):j=0,...,m)$.

b) $ecs_{2n}(k,A_0\wedge...\wedge A_m)=\max(ecs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

c) $efs_{2n}(k,A_0\wedge...\wedge A_m)=\min(efs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

Demostración

a) $ec(k,A_0\wedge...\wedge A_m)$, por T50

$=ec(k,(A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))$, por T48

$=\max(ec(k,A_j):j=0,...,m)$.

Implica,

$ec(k,A_0\wedge...\wedge A_m)$

$=\max(ec(k,A_j):j=0,...,m)$.

b) $ecs_{2n}(k,A_0\wedge...\wedge A_m)$, por T50

$=ecs_{2n}(k,(A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))$, por T48

$=\max(ecs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,A_0\wedge...\wedge A_m)$

$=\max(ecs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

c) $efs_{2n}(k,A_0\wedge...\wedge A_m)$, por T50

$=efs_{2n}(k,(A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))$, por T48

$=\min(efs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

Implica,

$efs_{2n}(k,A_0\wedge...\wedge A_m)$

$=\min(efs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.□

T53

a) $ec(k,A_0\vee...\vee A_m)=\min(ec(k,A_j):j=0,...,m)$.

b) $ecs_{2n}(k,A_0\vee...\vee A_m)=\min(ecs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

c) $efs_{2n}(k,A_0\vee...\vee A_m)=\max(efs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

Demostración

a) $ec(k,A_0\vee...\vee A_m)$, por T51

$=ec(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))$, por T49

$=\min(ec(k,A_j):j=0,...,m)$.

Implica,

$ec(k,A_0\vee...\vee A_m)$

$=\min(ec(k,A_j):j=0,...,m)$.

b) $ecs_{2n}(k,A_0\vee...\vee A_m)$, por T51

$=ecs_{2n}(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))$, por T49

$=\min(ecs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,A_0\vee...\vee A_m)$

$=\min(ecs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

c) $efs_{2n}(k,A_0\vee...\vee A_m)$, por T51

$=efs_{2n}(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))$, por T49

$=\max(efs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

Implica,

$efs_{2n}(k,A_0\vee...\vee A_m)$

$=\max(efs_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.□

3.15.4 Caracterización mediante la evidencia de → en la lógica de plausibilidad generalizada

T54

a) $ec(k,A\rightarrow B)=\min(1-ec(k,A),ec(k,B))$.

b) $ecs_{2n}(k,A\rightarrow B)=\min(efs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B))$.

c) $efs_{2n}(k,A\rightarrow B)=\max(ecs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B))$.

Demostración

a) Por AE4, $ec(k,A\rightarrow B)=ec(k,\neg A\vee B)$; por T42

$=\min(ec(k,\neg A),ec(k,B))$, por AE1

$=\min(1-ec(k,A),ec(k,B))$.

Implica,

$ec(k,A\rightarrow B)=\min(1-ec(k,A),ec(k,B))$.

b) Por AE4, $ecs_{2n}(k,A\rightarrow B)=ecs_{2n}(k,\neg A\vee B)$; por T42

$=\min(ecs_{2n}(k,\neg A),ecs_{2n}(k,B))$, por AE1

$=\min(efs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B))$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,A\rightarrow B)=\min(efs_{2n}(k,A),ec(k,B))$.

c) Por AE4, $efs_{2n}(k,A\rightarrow B)=efs_{2n}(k,\neg A\vee B)$; por T42

$=\max(efs_{2n}(k,\neg A),efs_{2n}(k,B))$, por AE1

$=\max(ecs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B))$.

Implica,

$efs_{2n}(k,A\rightarrow B)=\max(ecs_{2n}(k,A),ef(k,B))$.□

3.15.5 Propiedades al nivel de evidencia de → en la lógica de plausibilidad generalizada

T55

a) $ec(k,A\rightarrow B)=ec(k,\neg B\rightarrow\neg A)$.
b) $ecs_{2n}(k,A\rightarrow B)=ecs_{2n}(k,\neg B\rightarrow\neg A)$.
c) $efs_{2n}(k,A\rightarrow B)=efs_{2n}(k,\neg B\rightarrow\neg A)$.

Demostración

a) Por T54, $ec(k,A\rightarrow B)=\min(1-ec(k,A), ec(k,B))$

$=\min(1-(1-ec(k,B)),1-ec(k,A))$, por AE1

$=\min(1-ec(k,\neg B),ec(k,\neg A))$, por T54

$= ec(k,\neg B\rightarrow\neg A)$.

Implica,

$ec(k,A\rightarrow B)=ec(k,\neg B\rightarrow\neg A)$.

b) Por T54, $ecs_{2n}(k,A\rightarrow B)=\min(efs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B))$; por AE1

$=\min(efs_{2n}(k,\neg B),ecs_{2n}(k,\neg A))$, por T54

$=ecs_{2n}(k,\neg B\rightarrow\neg A)$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,A\rightarrow B)=ecs_{2n}(k,\neg B\rightarrow\neg A)$.

c) Por T54, $efs_{2n}(k,A\rightarrow B)=\max(efs_{2n}(k,B),ecs_{2n}(k,A))$; por AE1

$=\max(ecs_{2n}(k,\neg B),efs_{2n}(k,\neg A))$, por T54

$=efs_{2n}(k,\neg B\rightarrow\neg A)$.

Implica,

$efs_{2n}(k,A\rightarrow B)=efs_{2n}(k,\neg B\rightarrow\neg A)$.□

3.15.6 Caracterización mediante la evidencia de ↔ en la lógica de plausibilidad generalizada

T56

a) $ec(k,A\leftrightarrow B)=max(min(1-ec(k,A),ec(k,B)),min(ec(k,A),1-ec(k,B)))$.

b) $ecs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=max(min(efs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)),min(ecs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)))$.

c) $efs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=min(max(ecs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)),max(efs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)))$.

Demostración

a) Por AE5, $ec(k,A\leftrightarrow B)=ec(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$; por AE2

$=max(ec(k,(A\rightarrow B),ec(k,(B\rightarrow A))$, por T54

$=max(min(1-ec(k,A),ec(k,B)),min(ec(k,A),1-ec(k,B)))$.

Implica,

$ec(k,A\leftrightarrow B)=max(min(1-ec(k,A),ec(k,B)),min(ec(k,A),1-ec(k,B)))$.

b) Por AE5, $ecs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=ecs_{2n}(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$; por AE2

$=max(ecs_{2n}(k,A\rightarrow B),ecs_{2n}(k,B\rightarrow A))$, por T54

$=max(min(efs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)),min(ecs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)))$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=max(min(efs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)),min(ecs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)))$.

c) Por AE5, $efs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=efs_{2n}(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$; por AE2,

$=min(efs_{2n}(k,A\rightarrow B),efs_{2n}(k,B\rightarrow A))$, por T54

$=min(max(ecs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)),max(efs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)))$.

Implica,

$efs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=min(max(ecs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B)),max(efs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B)))$.□

3.15.7 Propiedades al nivel de evidencia de ↔ en la lógica de plausibilidad generalizada

T57

a) $ec(k,A\leftrightarrow B)=ec(k,B\leftrightarrow A)$.

b) $ecs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=ecs_{2n}(k,B\leftrightarrow A)$.

c) $efs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=efs_{2n}(k,B\leftrightarrow A)$.

Demostración

a) Por AE5, $ec(k,A\leftrightarrow B)=ec(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$; por T43

$=ec(k,(B\rightarrow A)\wedge(A\rightarrow B))$; por AE5

$=ec(k,B\leftrightarrow A)$.

Implica,

$ec(k,A\leftrightarrow B)=ec(k,B\leftrightarrow A)$.

b) Por AE5, $ecs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=ecs_{2n}(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$; por T43

$=ecs_{2n}(k,(B\rightarrow A)\wedge(A\rightarrow B))$; por AE5

$=ecs_{2n}(k,B\leftrightarrow A)$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=ecs_{2n}(k,B\leftrightarrow A)$.

c) Por AE5, $efs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=efs_{2n}(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$; por T43

$=efs_{2n}(k,(B\rightarrow A)\wedge(A\rightarrow B))$; por AE5

$=efs_{2n}(k,B\leftrightarrow A)$.

Implica,

$efs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=efs_{2n}(k,B\leftrightarrow A)$.□

T58

$ec(k,A\leftrightarrow B)=ec(k,(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B))$.

Demostración

Por AE5, $ec(k,A\leftrightarrow B)=ec(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$; por AE2

$=\max(ec(k,A\rightarrow B),ec(k,B\rightarrow A))$, por T54

$=\max(\min(1-ec(k,A),ec(k,B)),\min(1-ec(k,B),ec(k,A)))$, por T25

$=\min(\max(ec(k,A),ec(k,B)),\max(1-ec(k,A),1-ec(k,B)))$, por AE1

$=\min(\max(ec(k,A),ec(k,B)),\max(ec(k,\neg A),ec(k,\neg B)))$, por AE2

$=\min(ec(k,A\wedge B),ec(k,\neg A\wedge\neg B))$, por T42

$=ec(k,(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B))$.

Implica,

$ec(k,A\leftrightarrow B)=ec(k,(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B))$.□

3.15.8 Cuantificación al nivel de evidencia en la lógica de plausibilidad generalizada

Este tipo de evidencia funcional, resulta al considerar afirmaciones que incluyen los cuantificadores universal y existencial, simbolizados por $\forall$ y $\exists$, respectivamente.

Por la sección 2.1.1, se sabe que el cuantificador universal representa la aplicación reiterada del conectivo $\wedge$, mientras que el cuantificador existencial es la repetición del conectivo $\vee$; esto en ambos casos se da, si el universo del discurso es finito. Resulta así que los cuantificadores, $\forall$ y $\exists$, representan proposiciones de la forma $A_0\wedge...\wedge A_m$ y $A_0\vee...\vee A_m$, de acuerdo a la siguiente definición.

Si A es un predicado, x una variable y $\{x_0, ..., x_m\}$ es el dominio de x o universo de los cuantificadores $\forall$ y $\exists$.

D9

a) $\forall xAx=Ax_0 \wedge...\wedge Ax_m$.

b) $\exists xAx=Ax_0\vee...\vee Ax_m$.

T59

a) $ec(k,\forall xAx)=ec(k,Ax_1\wedge...\wedge Ax_m)$.

b) $ecs_{2n}(k,\forall xAx)=ecs_{2n}(k,Ax_1 \wedge...\wedge Ax_m)$.

c) $efs_{2n}(k,\forall xAx)=efs_{2n}(k,Ax_1\wedge...\wedge Ax_m)$.

Demostración

Es consecuencia inmediata de D9, por ser ec, ecs_{2n} y efs_{2n} funciones.□

T60

a) $ec(k,\exists xAx)=ec(k,Ax_0\vee...\vee Ax_m)$.

b) $ecs_{2n}(k,\exists xAx)=ecs_{2n}(k,Ax_0\vee...\vee Ax_m)$.

c) $efs_{2n}(k,\exists xAx)=efs_{2n}(k,Ax_0\vee...\vee Ax_m)$.

Demostración

Es consecuencia inmediata de D9, por ser ec, ecs_{2n} y efs_{2n} funciones.□

3.15.9 Relaciones entre conectivos mediante la función cal_{2n}

T61

a) $cal_{2n}(k,A\wedge B)=cal_{2n}(k,\neg(\neg A\vee\neg B))$.

b) $cal_{2n}(k,A\vee B)=cal_{2n}(k,\neg(\neg A\wedge\neg B))$.

c) $cal_{2n}(k,A\rightarrow B)=cal_{2n}(k,\neg A\vee B)$.

d) $cal_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=cal_{2n}(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$.

Demostración

a) Por AE2:

i) $ec(k,A\wedge B)=\max(ec(k,A),ec(k,B))$, por T22

$=1-\min(1-ec(k,A),1-ec(k,B))$, por AE1

$=1-\min(ec(k,\neg A),ec(k,\neg B))$, por T42

$=1-ec(k,\neg A\vee\neg B)$, por AE1

$=ec(k,\neg(\neg A\vee\neg B))$.

Implica,

$ec(k,A\wedge B)=ec(k,\neg(\neg A\vee\neg B))$.

ii) $ecs_{2n}(k,A\wedge B)=\max(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B))$, por T22

$=1-\min(1-ecs_{2n}(k,A),1-ecs_{2n}(k,B))$, por AE1

$=1-\min(ecs_{2n}(k,\neg A),ecs_{2n}(k,\neg B))$, por T42

$=1-ecs_{2n}(k,\neg A\vee\neg B)$, por AE1

$=ecs_{2n}(k,\neg(\neg A\vee\neg B))$.

Implica,

$ecs_{2n}(k,A\wedge B)=ecs_{2n}(k,\neg(\neg A\vee\neg B))$.

iii) $efs_{2n}(k,A\wedge B)=\max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B))$, por T22

$=1-\min(1-efs_{2n}(k,A),1-efs_{2n}(k,B))$, por AE1

$=1-\min(efs_{2n}(k,\neg A),efs_{2n}(k,\neg B))$, por T42

$=1-efs_{2n}(k,\neg A\vee\neg B)$, por AE1

$=efs_{2n}(k,\neg(\neg A\vee\neg B))$.

Implica,

$efs_{2n}(k,A\wedge B)=efs_{2n}(k,\neg(\neg A\vee\neg B))$.

Por i), ii), iii) y T16,

$cal_{2n}(k,A\wedge B)=cal_{2n}(k,\neg(\neg A\vee\neg B))$.

b) Por AE3:

$ec(k,A\vee B)=ec(k,\neg(\neg A\wedge\neg B))$

$ecs_{2n}(k,A\vee B)=ecs_{2n}(k,\neg(\neg A\wedge\neg B))$

$efs_{2n}(k,A\vee B)=efs_{2n}(k,\neg(\neg A\wedge\neg B))$.

Por T16,

$cal_{2n}(k,A\vee B)=cal_{2n}(k,\neg(\neg A\wedge\neg B))$.

c) Por AE4:

$ec(k,A\rightarrow B)=ec(k,\neg A\vee B)$

$ecs_{2n}(k,A\rightarrow B)=ecs_{2n}(k,\neg A\vee B)$

$efs_{2n}(k,A\rightarrow B)=efs_{2n}(k,\neg A\vee B)$.

Por T16,

$cal_{2n}(k,A\rightarrow B)=cal_{2n}(k,\neg A\vee B)$.

d) Por AE5:

$ec(k,A\leftrightarrow B)=ec(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$

$ecs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=ecs_{2n}(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$

$efs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=efs_{2n}(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$.

Por T16,

$cal_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=cal_{2n}(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$.□

3.16 Caracterización al nivel de plausibilidad de los conectivos de la lógica de plausibilidad generalizada

3.16.1 Caracterización mediante la plausibilidad de $\neg$ en la lógica de plausibilidad generalizada

T62

$cal_{2n}(k,\neg A)=2n-cal_{2n}(k,A)$.

Demostración

i) $cal_{2n}(k,A)\in S_0^{2n}$. Implica:

i.1) Por T14, $ec(k,A)=1$; por AE1

$ec(k,\neg A)=0$, por T14

$cal_{2n}(k,\neg A)\in S_2^{2n}$, por T15

$cal_{2n}(k,\neg A)=n+1+efs_{2n}(k,\neg A)$, por AE1

$=n+1+ecs_{2n}(k,A)$.

i.2) Por T14, $cal_{2n}(k,A)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$.

Por i.1) y i.2),

$cal_{2n}(k,\neg A)=2n-cal_{2n}(k,A)$.

i) $cal_{2n}(k,A)\in S_1^{2n}$. Implica:

ii.1) Por T14, $ec(k,A)=0.5$; por AE1

$ec(k,\neg A)=0.5$, por T14

$cal_{2n}(k,A)\in S_1^{2n}$, por T15

$cal_{2n}(k,\neg A)=n$.

ii.2) Por T15, $cal_{2n}(k,A)=n$.

Por ii.1) y ii.2),

$cal_{2n}(k,\neg A)=2n-cal_{2n}(k,A)$.

iii) $cal_{2n}(k,A)\in S_2^{2n}$. Implica,

$ec(k,A)=0$. Implica:

iii.1) Por AE1, $ec(k,\neg A)=1$; por T15

$cal_{2n}(k,\neg A)=n-1-ecs_{2n}(k,\neg A)$, por AE1,

$=n-1-efs_{2n}(k,A)$.

iii.2) Por T15, $cal_{2n}(k,A)=n+1+efs_{2n}(k,A)$.

Por iii.1) y iii.2),

$cal_{2n}(k,\neg A)=2n-cal_{2n}(k,A)$.

Por i), ii) y iii),

$cal_{2n}(k,\neg A)=2n-cal_{2n}(k,A)$.□

3.16.2 Caracterización mediante la plausibilidad de $\wedge$ en la lógica de plausibilidad generalizada

T63

$cal_{2n}(k,A\wedge B)=\min(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B))$.

Demostración

i) $cal_{2n}(k,A)\leq cal_{2n}(k,B)$. Implica:

i.1) $\min(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B))=cal_{2n}(k,A)$.

i.2) Por T21, $ec(k,B)\leq ec(k,A)$ y

$ecs_{2n}(k,B)\leq ecs_{2n}(k,A)$. Implica,

$\max(ec(k,A),ec(k,B))= ec(k,A)$ y

$\max(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B))=ecs_{2n}(k,A)$.

Por AE2,

$ec(k,A\wedge B)=ec(k,A)$ y

$ecs_{2n}(k,A\wedge B)=ecs_{2n}(k,A)$.

i.2.1) $cal_{2n}(k,A)\in S_0^{2n}$;

como $ec(k,A\wedge B)=ec(k,A)$. Por T14,

$ec(k,A\wedge B)=ec(k,A)=1$, por D3

$cal_{2n}(k,A\wedge B)=n-1-ecs_{2n}(k,A\wedge B)$ y

$cal_{2n}(k,A)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$;

como $ecs_{2n}(k,A\wedge B)=ecs_{2n}(k,A)$. Implica,

$cal_{2n}(k,A\wedge B)=cal_{2n}(k,A)$.

i.2.2) $cal_{2n}(k,A)\in S_1^{2n}$;

como $ec(k,A\wedge B)=ec(k,A)$. Por T14,

$ec(k,A\wedge B)=ec(k,A)=0.5$, por D3

$cal_{2n}(k,A\wedge B)=cal_{2n}(k,A)$.

i.2.3) $cal_{2n}(k,A)\in S_2^{2n}$. Implica:

i.2.3.1) Por T12, $ec(k,A\wedge B)=ec(k,A)=0$; por D3

$cal_{2n}(k,A\wedge B)=n+1+efs_{2n}(k,A\wedge B)$ y

$cal_{2n}(k,A)=n+1+efs_{2n}(k,A)$.

i.2.3.2) Por ser $cal_{2n}(k,A)\leq cal_{2n}(k,B)$ y por T18,

$efs_{2n}(k,A)\leq efs_{2n}(k,B)$,

$\min(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B))=efs_{2n}(k,A)$, por AE2

$efs_{2n}(k,A\wedge B)=efs_{2n}(k,A)$.

Por i.2.3.1) y i.2.3.2),

$cal_{2n}(k,A\wedge B)=cal_{2n}(k,A)$.

Por i.2.1), i.2.2) y i.2.3),

$cal_{2n}(k,A\wedge B)=cal_{2n}(k,A)$.

Por i.1) y i.2),

$cal_{2n}(k,A\wedge B)=\min(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B))$.

ii) $cal_{2n}(k,B)\leq cal_{2n}(k,A)$. Implica:

ii.1) $\min(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B))=cal_{2n}(k,B)$.

ii.2) Por T21, $ec(k,A)\leq ec(k,B)$ y

$ecs_{2n}(k,A)\leq ecs_{2n}(k,B)$. Implica,

$\max(ec(k,A),ec(k,B))= ec(k,B)$ y

$\max(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B))=ecs_{2n}(k,B)$.

Por AE2,

$ec(k,A\wedge B)=ec(k,B)$ y

$ecs_{2n}(k,A\wedge B)=ecs_{2n}(k,B)$.

ii.2.1) $cal_{2n}(k,B)\in S_0^{2n}$;

como $ec(k,A\wedge B)=ec(k,B)$. Por T14,

$ec(k,A\wedge B)=ec(k,B)=1$, por D3

$cal_{2n}(k,A\wedge B)=n-1-ecs_{2n}(k,A\wedge B)$ y

$cal_{2n}(k,B)=n-1-ecs_{2n}(k,B)$;

como $ecs_{2n}(k,A\wedge B)=ecs_{2n}(k,B)$. Implica,

$cal_{2n}(k,A\wedge B)=cal_{2n}(k,B)$.

ii.2.2) $cal_{2n}(k,B)\in S_1^{2n}$;

como $ec(k,A\wedge B)=ec(k,B)$. Por T14,

$ec(k,A\wedge B)=ec(k,B)=0.5$, por D3

$cal_{2n}(k,A\wedge B)=cal_{2n}(k,B)$.

ii.2.3) $cal_{2n}(k,B)\in S_2^{2n}$. Implica:

ii.2.3.1) Por T14, $ec(k,A\wedge B)=ec(k,B)=0$; por D3

$cal_{2n}(k,A\wedge B)=n+1+efs_{2n}(k,A\wedge B)$ y

$cal_{2n}(k,B)=n+1+efs_{2n}(k,B)$.

ii.2.3.2) Por ser $cal_{2n}(k,B) \leq cal_{2n}(k,A)$ y por T18,

$efs_{2n}(k,B) \leq efs_{2n}(k,A)$,

$min(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B))=efs_{2n}(k,B)$, por AE2

$efs_{2n}(k,A \wedge B)=efs_{2n}(k,B)$.

Por ii.2.3.1) y ii.2.3.2),

$cal_{2n}(k,A \wedge B)=cal_{2n}(k,B)$.

Por ii.2.1), ii.2.2) y ii.2.3),

$cal_{2n}(k,A \wedge B)=cal_{2n}(k,B)$.

Por ii.1) y ii.2),

$cal_{2n}(k,A \wedge B)=min(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B))$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A \wedge B)=min(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B))$.□

3.16.3 Caracterización mediante la plausibilidad de $\vee$ en la lógica de plausibilidad generalizada

T64

$cal_{2n}(k,A \vee B)=max(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B))$.

Demostración

i) $cal_{2n}(k,A) \leq cal_{2n}(k,B)$. Implica:

i.1) $max(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B))=cal_{2n}(k,B)$.

i.2) Por T21, $ec(k,B) \leq ec(k,A)$ y

$ecs_{2n}(k,B) \leq ecs_{2n}(k,A)$. Implica,

$min(ec(k,A),ec(k,B))= ec(k,B)$ y

$min(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B))=ecs_{2n}(k,B)$.

Por T42,

$ec(k,A \vee B)=ec(k,B)$ y

$ecs_{2n}(k,A \vee B)=ecs_{2n}(k,B)$.

i.2.1) $cal_{2n}(k,B) \in S_0^{2n}$;

como $ec(k,A \vee B)=ec(k,B)$. Por T14,

$ec(k,A \vee B)=ec(k,B)=1$, por D3

$cal_{2n}(k,A \vee B)=n-1-ecs_{2n}(k,A \vee B)$ y

$cal_{2n}(k,B)=n-1-ecs_{2n}(k,B)$;

como $ecs_{2n}(k,A \vee B)=ecs_{2n}(k,B)$. Implica,

$cal_{2n}(k,A \vee B)=cal_{2n}(k,B)$.

i.2.2) $cal_{2n}(k,B) \in S_1^{2n}$;

como $ec(k,A \vee B)=ec(k,B)$. Por T14,

$ec(k,A \vee B)=ec(k,B)=0.5$, por D3

$cal_{2n}(k,A \vee B)=cal_{2n}(k,B)$.

i.2.3) $cal_{2n}(k,B) \in S_2^{2n}$. Implica:

i.2.3.1) Por T14, $ec(k,B)=0$;

como $ec(k,A \vee B)=ec(k,B)$. Implica,

$ec(k,A \vee B)=ec(k,B)=0$.

Por T15,

$cal_{2n}(k,A \vee B)=n+1+efs_{2n}(k,A \vee B)$ y

$cal_{2n}(k,B)=n+1+efs_{2n}(k,B)$;

i.2.3.2) Por ser $cal_{2n}(k,A) \leq cal_{2n}(k,B)$. Por T38,

$efs_{2n}(k,A) \leq efs_{2n}(k,B)$,

$\max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B))=efs_{2n}(k,B)$, por T42

$efs_{2n}(k,A \vee B)=efs_{2n}(k,B)$.

Por i.2.3.1) y i.2.3.2),

$cal_{2n}(k,A \vee B)=cal_{2n}(k,B)$.

Por i.2.1), i.2.2) y i.2.3,

$cal_{2n}(k,A \vee B)=cal_{2n}(k,B)$.

Por i.1) y i.2),

$cal_{2n}(k,A\vee B)=\max(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B))$.

ii) $cal_{2n}(k,B)\leq cal_{2n}(k,A)$. Implica:

ii.1) $\max(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B))=cal_{2n}(k,A)$.

ii.2) Por T21, $ec(k,A)\leq ec(k,B)$ y

$ecs_{2n}(k,A)\leq ecs_{2n}(k,B)$. Implica,

$\min(ec(k,A),ec(k,B))= ec(k,A)$ y

$\min(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B))=ecs_{2n}(k,A)$.

Por T42,

$ec(k,A\vee B)=ec(k,A)$ y

$ecs_{2n}(k,A\vee B)=ecs_{2n}(k,A)$.

ii.2.1) $cal_{2n}(k,A)\in S_0^{2n}$;

como $ec(k,A\vee B)=ec(k,A)$. Por T14,

$ec(k,A\vee B)=ec(k,A)=1$, por D3

$cal_{2n}(k,A\vee B)=n-1-ecs_{2n}(k,A\vee B)$ y

$cal_{2n}(k,A)=n-1-ecs_{2n}(k,A)$;

como $ecs_{2n}(k,A\vee B)=ecs_{2n}(k,A)$. Implica,

$cal_{2n}(k,A\vee B)=cal_{2n}(k,A)$.

ii.2.2) $cal_{2n}(k,A)\in S_1^{2n}$;

como $ec(k,A\vee B)=ec(k,A)$. Por T14,

$ec(k,A\vee B)=ec(k,A)=0.5$, por D3

$cal_{2n}(k,A\vee B)=cal_{2n}(k,A)$.

ii.2.3) $cal_{2n}(k,A)\in S_2^{2n}$. Implica:

ii.2.3.1) Por T14, $ec(k,A)=0$;

como $ec(k,A\vee B)=ec(k,A)$. Implica,

$ec(k,A\vee B)=ec(k,A)=0$.

Por D3,

$cal_{2n}(k,A\vee B)=n+1+efs_{2n}(k,A\vee B)$ y

$cal_{2n}(k,A)=n+1+efs_{2n}(k,A)$;

ii.2.3.2) Por ser $cal_{2n}(k,B)\leq cal_{2n}(k,A)$. Por T38,

$efs_{2n}(k,B)\leq efs_{2n}(k,A)$,

$max(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B))=efs_{2n}(k,A)$, por T42

$efs_{2n}(k,A\vee B)=efs_{2n}(k,A)$.

Por ii.2.3.1) y ii.2.3.2),

$cal_{2n}(k,A\vee B)=cal_{2n}(k,A)$.

Por ii.2.1), ii.2.2) y ii.2.3),

$cal_{2n}(k,A\vee B)=cal_{2n}(k,A)$.

Por ii.1) y ii.2),

$cal_{2n}(k,A\vee B)=max(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B))$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A\vee B)=max(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B))$.□

3.16.4 Caracterización mediante la plausibilidad de $\rightarrow$ en la lógica de plausibilidad generalizada

T65

$cal_{2n}(k,A\rightarrow B)=max(2n-cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B))$.

Demostración

Por T61, $cal_{2n}(k,A\rightarrow B)=cal_{2n}(k,\neg A\vee B)$; por T64

$=max(cal_{2n}(k,\neg A),cal_{2n}(k,B))$, por T62

$=max(2n-cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B))$.□

3.16.5 Caracterización mediante la plausibilidad de $\leftrightarrow$ en la lógica de plausibilidad generalizada

T66

$cal_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=\min(\max(2n-cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B)),\max(cal_{2n}(k,A),2n-cal_{2n}(k,B)))$.

Demostración

Por T61, $cal_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=cal_{2n}(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$; por T63

$=\min(cal_{2n}(k,A\rightarrow B),cal_{2n}(k,B\rightarrow A))$, por T65

$=\min(\max(2n-cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B)),\max(cal_{2n}(k,A),2n-cal_{2n}(k,B)))$.□

3.16.6 Teorema fundamental de la lógica de plausibilidad generalizada

A través de los últimos cinco teoremas, se logra la caracterización de los conectivos de la lógica de plausibilidad generalizada, lo que es de suma importancia. Pues, la lógica de plausibilidad, como lógica polivalente, según lo señalado en la sección 2.1.2, se fundamenta en dos características esenciales: la definición de sus conectivos y su polivalencia.

La caracterización de los conectivos de la lógica de plausibilidad generalizada, en términos de plausibilidad, permite calcular mecánicamente la plausibilidad funcional. Por esta razón, se agrupan los cinco teoremas en un solo enunciado, a través del siguiente teorema.

T67

a) $cal_{2n}(k,\neg A)=2n-cal_{2n}(k,A)$.
b) $cal_{2n}(k,A\wedge B)=\min(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B))$.
c) $cal_{2n}(k,A\vee B)=\max(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B))$.
d) $cal_{2n}(k,A\rightarrow B)=\max(2n-cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B))$.
e) $cal_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=\min(\max(2n-cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B)),\max(cal_{2n}(k,A),2n-cal_{2n}(k,B)))$.□

3.17 Propiedades al nivel de plausibilidad de los conectivos de la lógica de plausibilidad generalizada

3.17.1 Propiedades al nivel de plausibilidad de $\neg$ en la lógica de plausibilidad generalizada

T68

a) $cal_{2n}(k,\neg(\neg A))=cal_{2n}(k,A)$.

b) $cal_{2n}(k,A)\in S_i^{2n}$ si y sólo si $cal_{2n}(k,\neg A)\in S_{2-i}^{2n}$.

Demostración

a) Por T39, $ec(k,\neg(\neg A))=ec(k,A)$,

$ecs_{2n}(k,\neg(\neg A))=ecs_{2n}(k,A)$ y

$efs_{2n}(k,\neg(\neg A))=efs_{2n}(k,A)$.

Por T16,

$cal_{2n}(k,\neg(\neg A))=cal_{2n}(k,A)$.

b)

i)

i.1) $cal_{2n}(k,A)\in S_0^{2n}$, por T14

$ec(k,A)=1$, por AE1

$ec(k,\neg A)=0$, por T14

$cal_{2n}(k,\neg A)\in S_2^{2n}$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A)\in S_0^{2n}$ implica $cal_{2n}(k,\neg A)\in S_2^{2n}$.

i.2) $cal_{2n}(k,\neg A)\in S_2^{2n}$, por T14

$ec(k,\neg A)=0$, por AE1

$ec(k,A)=1$, por T14

$cal_{2n}(k,A)\in S_0^{2n}$.

Implica,

$cal_{2n}(k,\neg A)\in S_2^{2n}$ implica $cal_{2n}(k,A)\in S_0^{2n}$.

Por i.1) y i.2),

$cal_{2n}(k,A)\in S_0^{2n}$ si y sólo si $cal_{2n}(k,\neg A)\in S_2^{2n}$.

ii)

ii.1) $cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$, por T14

$ec(k,A)=0.5$, por AE1

$ec(k,\neg A)=0.5$, por T14

$cal_{2n}(k,\neg A) \in S_1^{2n}$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$ implica $cal_{2n}(k,\neg A) \in S_1^{2n}$.

ii.2) $cal_{2n}(k,\neg A) \in S_1^{2n}$, por T14

$ec(k,\neg A)=0.5$, por AE1

$ec(k,A)=0.5$, por T14

$cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$.

Implica,

$cal_{2n}(k,\neg A) \in S_1^{2n}$ implica $cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$.

Por ii.1) y ii.2),

$cal_{2n}(k,A) \in S_1^{2n}$ si y sólo si $cal_{2n}(k,\neg A) \in S_1^{2n}$.

iii)

iii.1) $cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$, por T14

$ec(k,A)=0$, por AE1

$ec(k,\neg A)=1$, por T14

$cal_{2n}(k,\neg A) \in S_0^{2n}$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$ implica $cal_{2n}(k,\neg A) \in S_0^{2n}$.

iii.2) $cal_{2n}(k,\neg A) \in S_0^{2n}$, por T14

$ec(k,\neg A)=1$, por AE1

$ec(k,A)=0$, por T14

$cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$.

Implica,

$cal_{2n}(k,\neg A) \in S_0^{2n}$ implica $cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$.

Por iii.1) y iii.2),

$cal_{2n}(k,A) \in S_2^{2n}$ si y sólo si $cal_{2n}(k,\neg A) \in S_0^{2n}$.

Por i), ii) y iii),

$cal_{2n}(k,A) \in S_i^{2n}$ si y sólo si $cal_{2n}(k,\neg A) \in S_{2-i}^{2n}$. □

T69

a) $cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$ si y sólo si $cal_{2n}(k,\neg A)=cal_{2n}(k,\neg B)$.

b) $cal_{2n}(k,A)<cal_{2n}(k,B)$ si y sólo si $cal_{2n}(k,\neg B)<cal_{2n}(k,\neg A)$.

c) $cal_{2n}(k,A)\leq cal_{2n}(k,B)$ si y sólo si $cal_{2n}(k,\neg B)\leq cal_{2n}(k,\neg A)$.

Demostración

a)

i) $cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$;

por T62, $cal_{2n}(k,A)=2n-cal_{2n}(k,\neg A)$ y

$cal_{2n}(k,B)=2n-cal_{2n}(k,\neg B)$. Implica,

$cal_{2n}(k,\neg A)=cal_{2n}(k,\neg B)$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$ implica $cal_{2n}(k,\neg A)=cal_{2n}(k,\neg B)$.

ii) $cal_{2n}(k,\neg A)=cal_{2n}(k,\neg B)$;

por T62, $cal_{2n}(k,\neg A)=2n-cal_{2n}(k, A)$ y

$cal_{2n}(k,\neg B)=2n-cal_{2n}(k,B)$. Implica,

$cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$.

Implica,

$cal_{2n}(k,\neg A)=cal_{2n}(k,\neg B)$ implica $cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$ si y sólo si $cal_{2n}(k,\neg A)=cal_{2n}(k,\neg B)$.

b)

i) $cal_{2n}(k,A)<cal_{2n}(k,B)$;

por T62, $cal_{2n}(k,A)=2n-cal_{2n}(k,\neg A)$ y

$cal_{2n}(k,B)=2n-cal_{2n}(k,\neg B)$. Implica,

$cal_{2n}(k,\neg B)<cal_{2n}(k,\neg A)$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A)<cal_{2n}(k,B)$ implica $cal_{2n}(k,\neg B)=cal_{2n}(k,\neg A)$.

ii) $cal_{2n}(k,\neg B)<cal_{2n}(k,\neg A)$;

por T62, $cal_{2n}(k,\neg A)=2n-cal_{2n}(k, A)$ y

$cal_{2n}(k,\neg B)=2n-cal_{2n}(k,B)$. Implica,

$cal_{2n}(k,A)<cal_{2n}(k,B)$.

Implica,

$cal_{2n}(k,\neg A)<cal_{2n}(k,\neg B)$ implica $cal_{2n}(k,A)<cal_{2n}(k,B)$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,A)<cal_{2n}(k,B)$ si y sólo si $cal_{2n}(k,\neg B)<cal_{2n}(k,\neg A)$.

c) Es consecuencia inmediata de a) y b).□

3.17.2 Propiedades al nivel de plausibilidad de $\wedge$ y $\vee$ en la lógica de plausibilidad generalizada

T70

a.1) $cal_{2n}(k,A\wedge B)=cal_{2n}(k,B\wedge A)$. a.2) $cal_{2n}(k,A\vee B)=cal_{2n}(k,B\vee A)$.

b.1) $cal_{2n}(k,(A\wedge B)\wedge C)=cal_{2n}(k,A\wedge(B\wedge C))$. b.2) $cal_{2n}(k,(A\vee B)\vee C)=cal_{2n}(k,A\vee(B\vee C))$.

c.1) $cal_{2n}(k,A\wedge(B\vee C))=cal_{2n}(k,(A\wedge B)\vee(A\wedge C))$.

c.2) $cal_{2n}(k,A\vee(B\wedge C))=cal_{2n}(k,(A\vee B)\wedge(A\vee C))$.

d.1) $cal_{2n}(k,A\wedge A)=cal_{2n}(k,A)$. d.2) $cal_{2n}(k,A\vee A)=cal_{2n}(k,A)$.

e.1) $cal_{2n}(k,A\wedge(A\vee B))=cal_{2n}(k,A)$. e.2) $cal_{2n}(k,A\vee(A\wedge B))=cal_{2n}(k,A)$.

Demostración

a.1) Por T43, $ec(k,A\wedge B)=ec(k,B\wedge A)$,

$ecs_{2n}(k,A\wedge B)=ecs_{2n}(k,B\wedge A)$ y

$efs_{2n}(k,A\wedge B)=efs_{2n}(k,B\wedge A)$.

Por T16,

$cal_{2n}(k,A\wedge B)=cal_{2n}(k,B\wedge A)$.

a.2) Por T43, $ec(k,A\vee B)=ec(k,B\vee A)$,

$ecs_{2n}(k,A\vee B)=ecs_{2n}(k,B\vee A)$ y

$efs_{2n}(k,A\vee B)=efs_{2n}(k,B\vee A)$.

Por T16,

$cal_{2n}(k,A\vee B)=cal_{2n}(k,B\vee A)$.

b.1) Por T44, $ec(k,(A\wedge B)\wedge C)=ec(k,A\wedge(B\wedge C))$,

$ecs_{2n}(k,(A\wedge B)\wedge C)=ecs_{2n}(k,A\wedge(B\wedge C))$ y

$efs_{2n}(k,(A\wedge B)\wedge C)=efs_{2n}(k,A\wedge(B\wedge C))$.

Por T16,

$cal_{2n}(k,(A\wedge B)\wedge C)=cal_{2n}(k,A\wedge(B\wedge C))$.

b.2) Por T44, $ec(k,(A\vee B)\vee C)=ec(k,A\vee(B\vee C))$,

$ecs_{2n}(k,(A\vee B)\vee C)=ecs_{2n}(k,A\vee(B\vee C))$ y

$efs_{2n}(k,(A\vee B)\vee C)=efs_{2n}(k,A\vee(B\vee C))$.

Por T16,

$cal_{2n}(k,(A\vee B)\vee C)=cal_{2n}(k,A\vee(B\vee C))$.

c.1) Por T45, $ec(k,A\wedge(B\vee C)=ec(k,(A\wedge B)\vee(A\wedge C))$,

$ecs_{2n}(k,A\wedge(B\vee C)=ecs_{2n}(k,(A\wedge B)\vee(A\wedge C))$ y

$efs_{2n}(k,A\wedge(B\vee C)=efs_{2n}(k,(A\wedge B)\vee(A\wedge C))$.

Por T16,

$cal_{2n}(k,A\wedge(B\vee C)=cal_{2n}(k,(A\wedge B)\vee(A\wedge C))$.

c.2) Por T45, $ec(k,A\vee(B\wedge C)=ec(k,(A\vee B)\wedge(A\vee C))$,

$ecs_{2n}(k,A\vee(B\wedge C)=ecs_{2n}(k,(A\vee B)\wedge(A\vee C))$ y

$efs_{2n}(k,A\vee(B\wedge C)=efs_{2n}(k,(A\vee B)\wedge(A\vee C))$.

Por T16,

$cal_{2n}(k,A\vee(B\wedge C)=cal_{2n}(k,(A\vee B)\wedge(A\vee C))$.

d.1) Por T46, $ec(k,A\wedge A)=ec(k,A)$,

$ecs_{2n}(k,A\wedge A)=ecs_{2n}(k,A)$ y

$efs_{2n}(k,A\wedge A)=efs_{2n}(k,A)$.

Por T16,

$cal_{2n}(k,A\wedge A)=cal_{2n}(k,A)$.

d.2) Por T46, $ec(k,A\vee A)=ec(k,A)$,

$ecs_{2n}(k,A\vee A)=ecs_{2n}(k,A)$ y

$efs_{2n}(k,A\vee A)=efs_{2n}(k,A)$.

Por T16,

$cal_{2n}(k,A\vee A)=cal_{2n}(k,A)$.

e.1) Por T47, $ec(k,A\wedge(A\vee B))=ec(k,A)$,

$ecs_{2n}(k,A\wedge(A\vee B))=ecs_{2n}(k,A)$ y

$efs_{2n}(k,A\wedge(A\vee B))=efs_{2n}(k,A)$.

Por T16,

$cal_{2n}(k,A\wedge(A\vee B))=cal_{2n}(k,A)$.

e.2) Por T47, $ec(k,A\vee(A\wedge B))=ec(k,A)$,

$ecs_{2n}(k,A\vee(A\wedge B))=ecs_{2n}(k,A)$ y

$efs_{2n}(k,A\vee(A\wedge B))=efs_{2n}(k,A)$.

Por T16,

$cal_{2n}(k,A\wedge(A\vee B))=cal_{2n}(k,A)$.□

T71

a) $cal_{2n}(k,(A_0\wedge\ldots\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge\ldots\wedge A_m))=\min(cal_{2n}(k,A_j):j=0,\ldots,m)$.

b) $cal_{2n}(k,(A_0\vee\ldots\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee\ldots\vee A_m))=\max(cal_{2n}(k,A_j):j=0,\ldots,m)$.

Demostración

Por inducción sobre el número m de conectivos.

a)

i) Por hipótesis de inducción,

si el número de conectivos es menor que m,

entonces se cumple a).

ii) Para m conectivos,

$cal_{2n}(k,(A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))$, por T63

$=\min(cal_{2n}(k,A_0\wedge...\wedge A_i),cal_{2n}(k,A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))$, por hipótesis de inducción

$=\min(\min(cal_{2n}(k,A_j):j=0,...,i),\min(cal_{2n}(k,A_j):j=i+1,...,m)$, por T37

$=\min((cal_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,(A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))=\min(cal_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

b)

i) Por hipótesis de inducción,

si el número de conectivos es menor que m,

entonces se cumple b).

ii) Para m conectivos,

$cal_{2n}(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))$, por T64

$=\max(cal_{2n}(k,A_0\vee...\vee A_i),cal_{2n}(k,A_{i+1}\vee...\vee A_m))$, por hipótesis de inducción

$=\max(\max(cal_{2n}(k,A_j):j=0,...,i),\max(cal_{2n}(k,A_j):j=i+1,...,m)$, por T37

$=\max((cal_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

Por i) y ii),

$cal_{2n}(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))=\max(cal_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.□

T72

a) $cal_{2n}(k,A_0\wedge...\wedge A_m)=cal_{2n}(k,(A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))$.

b) $cal_{2n}(k,A_0\vee...\vee A_m)=cal_{2n}(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))$.

Demostración

a) Por D8, $A_0\wedge...\wedge A_m=A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m)$;

por D3, cal_{2n} es función. Implica,

$cal_{2n}(k,A_0\wedge...\wedge A_m)=cal_{2n}(k,(A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))$.

b) Por D8, $A_0\vee...\vee A_m =(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m)$;

por D3, cal_{2n} es función. Implica,

$cal_{2n}(k,A_0\vee...\vee A_m)=cal_{2n}(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))$.□

T73

a) $cal_{2n}(k,A_0\wedge...\wedge A_m)=\min(cal_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

b) $cal_{2n}(k,A_0\vee...\vee A_m)=\max(cal_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

Demostración

a) $cal_{2n}(k,A_0\wedge...\wedge A_m)$, por T72

$=cal_{2n}(k,(A_0\wedge...\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge...\wedge A_m))$, por T71

$=\min(cal_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.

b) $cal_{2n}(k,A_0\vee...\vee A_m)$, por T72

$=cal_{2n}(k,(A_0\vee...\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee...\vee A_m))$, por T71

$=\max(cal_{2n}(k,A_j):j=0,...,m)$.□

3.17.3 Propiedad al nivel de plausibilidad de → en la lógica de plausibilidad generalizada

T74

$cal_{2n}(k,A\rightarrow B)=cal_{2n}(k,\neg B\rightarrow\neg A)$.

Demostración

Por T55, $ec(k,A\rightarrow B)=ec(k,\neg B\rightarrow\neg A)$,

$ecs_{2n}(k,A\rightarrow B)=ecs_{2n}(k,\neg B\rightarrow\neg A)$ y

$efs_{2n}(k,A\rightarrow B)=efs_{2n}(k,\neg B\rightarrow\neg A)$.

Por T16,

$cal_{2n}(k,A\rightarrow B)=cal_{2n}(k,\neg B\rightarrow\neg A)$.□

3.17.4 Propiedades al nivel de plausibilidad de ↔ en la lógica de plausibilidad generalizada

T75

a) $cal_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=cal_{2n}(k,B\leftrightarrow A)$.

b) $cal_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=cal_{2n}(k,(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B))$.

Demostración

a) Por T57, $ec(k,A\leftrightarrow B)=ec(k,B\leftrightarrow A)$,

$ecs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=ecs_{2n}(k,B\leftrightarrow A)$ y

$efs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=efs_{2n}(k,B\leftrightarrow A)$.

Por T16,

$cal_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=cal_{2n}(k,B\leftrightarrow A)$.

b) $cal_{2n}(k,A\leftrightarrow B)$, por T66

$=\min(\max(2n-cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B)),\max(cal_{2n}(k,A),2n-cal_{2n}(k,B)))$, por T36

$=\max(\min(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B)),\min(2n-cal_{2n}(k,A),2n-cal_{2n}(k,B)))$, por T62

$=\max(\min(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B)),\min(cal_{2n}(k,\neg A),cal_{2n}(k,\neg A)))$, por T63

$=\max(cal_{2n}(k,A\wedge B),cal_{2n}(k,\neg A\wedge\neg B))$, por T64

$=cal_{2n}(k,(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B))$.

Implica,

$cal_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=cal_{2n}(k,(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B))$.□

3.17.5 Cuantificación al nivel de plausibilidad en la lógica de plausibilidad generalizada

T76

a) $cal_{2n}(k,\forall xAx)=cal_{2n}(k,Ax_0\wedge...\wedge Ax_m)$.

b) $cal_{2n}(k,\exists xAx)=cal_{2n}(k,Ax_0\vee...\vee Ax_m)$.

Demostración

a) Por D9, $\forall xAx=Ax_0\wedge...\wedge Ax_m$;

por D3, cal_{2n} es función. Implica,

$cal_{2n}(k,\forall xAx)=cal_{2n}(k,Ax_0\wedge...\wedge Ax_m)$.

a) Por D9, $\exists xAx = Ax_0\vee...\vee Ax_m$;

por D3, cal_{2n} es función. Implica,,

$cal_{2n}(k,\exists xAx)=cal_{2n}(k,Ax_0\vee...\vee Ax_m)$.□

3.18 Equivalencia en la lógica de plausibilidad generalizada

La función cal_{2n} no es inyectiva: por T61, $cal_{2n}(k,A\wedge B)=cal_{2n}(k,\neg(\neg A\vee\neg B))$; pero, $A\wedge B\neq\neg(\neg A\vee\neg B)$. Por tanto, $cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$ no implica, en general, A=B. No obstante, $cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$ determina un tipo de relación entre ambas afirmaciones: A y B son equivalentes, y se representa por $A\equiv_{2n}B$. En términos más precisos,

D10

$A\equiv_{2n}B$ si y sólo si $cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$.

El siguiente teorema demuestra que $\equiv_{2n}$ es una relación de equivalencia sobre F, siendo F, tal como se señala en 3.3, el conjunto de afirmaciones.

T77

a) $A\equiv_{2n}A$ (reflexiva).
b) $A\equiv_{2n}B$ implica $B\equiv_{2n}A$ (simétrica).
c) $A\equiv_{2n}B$ y $B\equiv_{2n}C$ implica $A\equiv_{2n}C$ (transitiva).

Demostración

a) Por D3, cal_{2n} es función; implica
$cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,A)$, por D10
$A\equiv_{2n}A$.

b) $A\equiv_{2n}B$, por D10
$cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$,
$cal_{2n}(k,B)=cal_{2n}(k,A)$, por D10
$B\equiv_{2n}A$.

c) $A\equiv_{2n}B$ y $B\equiv_{2n}C$, por D10
$cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$ y
$cal_{2n}(k,B)=cal_{2n}(k,C)$.
Implica,
$cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,C)$, por D10
$A\equiv_{2n}C$.□

T78

$ec(k,A)=ec(k,B)$
$ecs_{2n}(k,A)=ecs_{2n}(k,B)$
$efs_{2n}(k,A)=efs_{2n}(k,B)$.
Implica,
$A\equiv_{2n}B$.

Demostración
$ec(k,A)=ec(k,B)$
$ecs_{2n}(k,A)=ecs_{2n}(k,B)$
$efs_{2n}(k,A)=efs_{2n}(k,B)$.
Por T16,
$cal_{2n}(k,A)=cal_{2n}(k,B)$, por D10
$A\equiv_{2n}B$.□

Este teorema es una reformulación de T16 en términos de equivalencia. A continuación se reformulan otros teoremas más.

3.18.1 Leyes de De Morgan

T79

a) $A \wedge B \equiv_{2n} \neg(\neg A \vee \neg B)$.

b) $A \vee B \equiv_{2n} \neg(\neg A \wedge \neg B)$.

Demostración

a) Por T61, $cal_{2n}(k, A \wedge B) = cal_{2n}(k, \neg(\neg A \vee \neg B))$.

Por D10,

$A \wedge B \equiv_{2n} \neg(\neg A \vee \neg B)$.

b) Por T61, $cal_{2n}(k, A \vee B) = cal_{2n}(k, \neg(\neg A \wedge \neg B))$.

Por D10,

$A \vee B \equiv_{2n} \neg(\neg A \wedge \neg B)$.□

3.18.2 Propiedades de implicación y coimplicación

T80

a) $A \rightarrow B \equiv_{2n} \neg A \vee B$.

b) $A \leftrightarrow B \equiv_{2n} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$.

Demostración

a) Por T61, $cal_{2n}(k, A \rightarrow B) = cal_{2n}(k, \neg A \vee B)$.

Por D10,

$A \rightarrow B \equiv_{2n} \neg A \vee B$.

b) Por T61, $cal_{2n}(k, A \leftrightarrow B) = cal_{2n}(k, (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$.

Por D10,

$A \leftrightarrow B \equiv_{2n} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$.□

3.18.3 Propiedad de doble negación

T81

$A \equiv_{2n} \neg(\neg A)$.

Demostración

Por T68, $cal_{2n}(k,A) = cal_{2n}(k,\neg(\neg A))$.

Por D10,

$A \equiv_{2n} \neg(\neg A)$.□

3.18.4 Propiedades de equivalencia de $\wedge$ y $\vee$

T82

a) Conmutativa	
a.1) $A \wedge B \equiv_{2n} B \wedge A$.	a.2) $A \vee B \equiv_{2n} B \vee A$.
b) Asociativa	
b.1) $(A \wedge B) \wedge C \equiv_{2n} A \wedge (B \wedge C)$.	b.2) $(A \vee B) \vee C \equiv_{2n} A \vee (B \vee C)$.
c) Distributiva	
c.1) $A \wedge (B \vee C)) \equiv_{2n} (A \wedge B) \vee (A \wedge C))$.	c.2) $A \vee (B \wedge C) \equiv_{2n} (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
d) Idempotencia	
d.1) $A \wedge A \equiv_{2n} A$.	d.2) $A \vee A \equiv_{2n} A$.
e) Absorción	
e.1) $A \wedge (A \vee B) \equiv_{2n} A$.	e.2) $A \vee (A \wedge B) \equiv_{2n} A$.

Demostración

Por T70,

a.1) $cal_{2n}(k,A\wedge B)=cal_{2n}(k,B\wedge A)$. a.2) $cal_{2n}(k,A\vee B)=cal_{2n}(k,B\vee A)$.

b.1) $cal_{2n}(k,(A\wedge B)\wedge C)=cal_{2n}(k,A\wedge(B\wedge C))$. b.2) $cal_{2n}(k,(A\vee B)\vee C)=cal_{2n}(k,A\vee(B\vee C))$.

c.1) $cal_{2n}(k,A\wedge(B\vee C))=cal_{2n}(k,(A\wedge B)\vee(A\wedge C))$.

c.2) $cal_{2n}(k,A\vee(B\wedge C))=cal_{2n}(k,(A\vee B)\wedge(A\vee C))$.

d.1) $cal_{2n}(k,A\wedge A)=cal_{2n}(k,A)$. d.2) $cal_{2n}(k,A\vee A)=cal_{2n}(k,A)$.

e.1) $cal_{2n}(k,A\wedge(A\vee B))=cal_{2n}(k,A)$. e.2) $cal_{2n}(k,A\vee(A\wedge B))=cal_{2n}(k,A)$.

Por D10,

a.1) $A\wedge B\equiv_{2n}B\wedge A$. a.2) $A\vee B\equiv_{2n}B\vee A$.

b.1) $(A\wedge B)\wedge C\equiv_{2n}A\wedge(B\wedge C)$. b.2) $(A\vee B)\vee C\equiv_{2n}A\vee(B\vee C)$.

c.1) $A\wedge(B\vee C))\equiv_{2n}(A\wedge B)\vee(A\wedge C))$. c.2) $A\vee(B\wedge C)\equiv_{2n}(A\vee B)\wedge(A\vee C)$.

d.1) $A\wedge A\equiv_{2n}A$. d.2) $A\vee A\equiv_{2n}A$.

e.1) $A\wedge(A\vee B)\equiv_{2n}A$. e.2) $A\vee(A\wedge B)\equiv_{2n}A$.□

T83

a) $A_0\wedge\ldots\wedge A_m\equiv_{2n}(A_0\wedge\ldots\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge\ldots\wedge A_m)$.

b) $A_0\vee\ldots\vee A_m\equiv_{2n}(A_0\vee\ldots\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee\ldots\vee A_m)$.

Demostración

a) Por T72, $cal_{2n}(k,A_0\wedge\ldots\wedge A_m)$

$=cal_{2n}(k,(A_0\wedge\ldots\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge\ldots\wedge A_m))$.

Por D10,

$A_0\wedge\ldots\wedge A_m\equiv_{2n}(A_0\wedge\ldots\wedge A_i)\wedge(A_{i+1}\wedge\ldots\wedge A_m)$.

b) Por T72, $cal_{2n}(k,A_0\vee\ldots\vee A_m)$

$=cal_{2n}(k,(A_0\vee\ldots\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee\ldots\vee A_m))$.

Por D10,

$A_0\vee\ldots\vee A_m\equiv_{2n}(A_0\vee\ldots\vee A_i)\vee(A_{i+1}\vee\ldots\vee A_m)$.□

3.18.5 Propiedad de transposición de →

T84

$A \rightarrow B \equiv_{2n} \neg B \rightarrow \neg A$.

Demostración

Por T74, $cal_{2n}(k, A \rightarrow B) = cal_{2n}(k, \neg B \rightarrow \neg A)$.

Por D10,

$A \rightarrow B \equiv_{2n} \neg B \rightarrow \neg A$.□

3.18.6 Propiedades de equivalencia de ↔

T85

a) $A \leftrightarrow B \equiv_{2n} B \leftrightarrow A$.

b) $A \leftrightarrow B \equiv_{2n} (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.

Demostración

a) Por T75, $cal_{2n}(k, A \leftrightarrow B) = cal_{2n}(k, B \leftrightarrow A)$.

Por D10,

$A \leftrightarrow B \equiv_{2n} B \leftrightarrow A$.

b) Por T75, $cal_{2n}(k, A \leftrightarrow B) = cal_{2n}(k, (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$.

Por D10,

$A \leftrightarrow B \equiv_{2n} (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.□

3.18.7 Teorema de remplazamiento

T86

En una afirmación, si se sustituye una o más afirmaciones que la forman por otras equivalentes. Entonces, la afirmación que resulta es equivalente a la dada.

Demostración

Si una o más afirmaciones que son parte de otra dada, son remplazadas por afirmaciones equivalentes, por D10, los valores de cal_{2n} de la afirmación que resulta y la dada coinciden. Por D10, ambas afirmaciones son equivalentes.□

3.18.8 Propiedades de equivalencia de ∀ y de ∃

T87

a) $\forall xAx \equiv_{2n} Ax_0 \wedge \ldots \wedge Ax_m$.

b) $\exists x \equiv_{2n} Ax_0 \vee \ldots \vee Ax_m$.

Demostración

a) Por T76, $cal_{2n}(k,\forall xAx)=cal_{2n}(k,Ax_0 \wedge \ldots \wedge Ax_m)$.

Por D10,

$\forall xAx \equiv_{2n} Ax_0 \wedge \ldots \wedge Ax_m$.

b) Por T76, $cal_{2n}(k,\exists xAx)=cal_{2n}(k,Ax_0 \vee \ldots \vee Ax_m)$.

Por D10,

$\exists x \equiv_{2n} Ax_0 \vee \ldots \vee Ax_m$.□

La equivalencia desempeña un papel fundamental en la lógica de plausibilidad generalizada, porque sus propiedades al representar distintas maneras de enlazar afirmaciones mediante conectivos sin que varíe su estado de plausibilidad, constituyen un marco de referencia en el proceso de decisión, para establecer relaciones entre las afirmaciones que caracterizan una decisión.

3.19 Alcance de la lógica de plausibilidad generalizada

En la sección 2.1.2, se señala que la lógica polivalente está determinada por su polivalencia y la definición de sus conectivos. En tal sentido, en el caso de la lógica de plausibilidad generalizada resulta el siguiente teorema.

T88

Para cada número natural n>1, la lógica de plausibilidad generalizada determina una lógica de plausibilidad polivalente finita, LP_{2n}, tal que P_{2n} es el conjunto de estados de plausibilidad.

Demostración

i) Por D1, $P_{2n}=\{0, 1, ..., 2n\}$ es el conjunto de estados de plausibilidad.

ii) Por T67,

   a) $cal_{2n}(k,\neg A)=2n-cal_{2n}(k,A)$.

   b) $cal_{2n}(k,A\wedge B)=\min(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B))$.

   c) $cal_{2n}(k,A\vee B)=\max(cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B))$.

   d) $cal_{2n}(k,A\rightarrow B)=\max(2n-cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B))$.

   e) $cal_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=\min(\max(2n-cal_{2n}(k,A),cal_{2n}(k,B)),\max(cal_{2n}(k,A),2n-cal_{2n}(k,B)))$.

Por i) y ii),

Para cada número natural n>1, la lógica de plausibilidad generalizada determina una lógica de plausibilidad polivalente finita, LP_{2n}, 2n+1-valente.□

A su vez, el teorema T88 da lugar a la siguiente definición.

D11

La lógica LP_{2n}, que asegura T88, es la lógica de plausibilidad 2n+1-valente.

Así, la lógica de plausibilidad generalizada es una familia infinita de lógicas polivalentes finitas, tal como precisa el siguiente teorema.

T89

La lógica de plausibilidad generalizada determina una familia infinita numerable de lógicas polivalentes finitas.

Demostración

i) Para cada número natural n>1, por T88, LP_{2n} es una lógica polivalente finita.

ii) Se considera $f:\{LP_{2n}: n\in N \text{ y } n>1\}\rightarrow N$ tal que,

$f(LP_{2n})=$

$2k-2$, si $n=2k$

$2k-1$, si $n=2k+1$.

Implica:

ii.1) f es función:

$LP_{2n}=LP_{2m}$,

$P_{2n}=P_{2m}$, por D1

$n=m$.

ii.1.1) Para $n=m=2k$,

$f(LP_{2n})=2k-2$ y

$f(LP_{2m})=2k-2$.

Implica,

$f(LP_{2n})=f(LP_{2m})$.

ii.1.2) Para $n=m=2k+1$,

$f(LP_{2n})=2k-1$ y

$f(LP_{2m})=2k-1$.

Implica,

$f(LP_{2n})=f(LP_{2m})$.

Por ii.1.1) y ii.1.2).

$f(LP_{2n})=f(LP_{2m})$.

Implica,

$LP_{2n}=LP_{2m}$ implica $f(LP_{2n})=f(LP_{2m})$.

ii.2) Dominio de f:

Claramente el dominio de f es

$\{LP_{2n}: n \in N \text{ y } n>1\}$.

ii.3) f es inyectiva:

$f(LP_{2n})=f(LP_{2m})$. Implica:

ii.3.1) Para $n=2k$,

$f(LP_{2n})=2k-2$ y

$f(LP_{2m})=2k-2$,

$m=2k$.

Implica,

$n=m$, por D1

$P_{2n}=P_{2m}$,

$LP_{2n}=LP_{2m}$.

ii.3.2) Para $n=2k+1$,

$f(LP_{2n})=2k-1$ y

$f(LP_{2m})=2k-1$,

$m=2k+1$.

Implica,

$n=m$, por D1

$P_{2n}=P_{2m}$,

$LP_{2n}=LP_{2m}$.

Por ii.3.1) y ii.3.2),

$LP_{2n}=LP_{2m}$.

Implica,

$f(LP_{2n})=f(LP_{2m})$ implica

$LP_{2n}=LP_{2m}$.

ii.2.3.2) f es sobreyectiva:

Para cada $n \in N$ implica:

ii.4.1) Para $n=2p$, existe $LP_{2(p+1)}$ tal que

$f(LP_{2(p+1)})=2p=n$.

ii.4.2) Para $n=2p+1$, existe $LP_{2(2p+3)}$ tal que

$f(LP_{2(2p+3)})=2p+1=n$.

Por ii.4.1) y ii.4.2),

existe LP_{2q} tal que $f(LP_{2q})=n$.

Por ii.1), ii.2), ii.3) y ii.4),

$f:\{LP_{2n}: n\in N \text{ y } n>1\}\rightarrow N$ es una aplicación biyectiva.

Implica,

$\text{card}\{LP_{2n}: n\in N \text{ y } n>1\}=\aleph_0$.

Por i) y ii),

La lógica de plausibilidad generalizada determina una familia infinita numerable de lógicas polivalentes finitas, $\{LP_{2n}: n\in N \text{ y } n>1\}$, o en otros símbolos $\{LP_{2n}\}_{n=2}^{\infty}$. □

De acuerdo a D11 y T89, resulta la siguiente definición.

D12

La familia infinita numerable de lógicas polivalentes finitas $\{LP_{2n}\}_{n=2}^{\infty}$, que asegura T89, es la familia infinita de lógicas de plausibilidad.

A continuación se presenta la tabla de plausibilidad (tabla de verdad) de dos de ellas, las de polivalencia más baja de la familia $\{LP_{2n}\}_{n=2}^{\infty}$.

3.20 Tablas de plausibilidad de las lógicas LP_4 y LP_6

T90

La tabla de plausibilidad de LP_4 es

A	B	¬A	A∧B	A∨B	A→B	A↔B
0	0	4	0	0	4	4
0	1	4	0	1	4	3
0	2	4	0	2	4	2
0	3	4	0	3	4	1
0	4	4	0	4	4	0
1	0	3	0	1	3	3
1	1	3	1	1	3	3
1	2	3	1	2	3	2
1	3	3	1	3	3	1
1	4	3	1	4	4	1
2	0	2	0	2	2	2
2	1	2	1	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2
2	3	2	2	3	3	2
2	4	2	2	4	4	2
3	0	1	0	3	1	1
3	1	1	1	3	1	1
3	2	1	2	3	2	2
3	3	1	3	3	3	3
3	4	1	3	4	4	3
4	0	0	0	4	0	0
4	1	0	1	4	1	1
4	2	0	2	4	2	2
4	3	0	3	4	3	3
4	4	0	4	4	4	4

Demostración

Es consecuencia inmediata de T67, para n=2.□

Este resultado confirma lo que se adelanta en la sección 3.2, la lógica LP_4 es, precisamente, la lógica de plausibilidad, porque sus tablas de plausibilidad coinciden (véase la sección 2.6).

T91

La tabla de plausibilidad de LP_6 es

A	B	¬A	A∧B	A∨B	A→B	A↔B
0	0	6	0	0	6	6
0	1	6	0	1	6	5
0	2	6	0	2	6	4
0	3	6	0	3	6	3
0	4	6	0	4	6	2
0	5	6	0	5	6	1
0	6	6	0	6	6	0
1	0	5	0	1	5	5
1	1	5	1	1	5	5
1	2	5	1	2	5	4
1	3	5	1	3	5	3
1	4	5	1	4	5	2
1	5	5	1	5	5	1
1	6	5	1	6	6	1
2	0	4	0	2	4	4
2	1	4	1	2	4	4
2	2	4	2	2	4	4
2	3	4	2	3	4	3

2	4	4	2	4	4	2
2	5	4	2	5	5	1
2	6	4	2	6	6	2
3	0	3	0	3	3	3
3	1	3	1	3	3	3
3	2	3	2	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3
3	4	3	3	4	4	3
3	5	3	3	5	5	3
3	6	3	3	6	6	3
4	0	2	0	4	2	2
4	1	2	1	4	2	2
4	2	2	2	4	2	2
4	3	2	3	4	3	3
4	4	2	4	4	4	4
4	5	2	4	5	5	4
4	6	2	4	6	6	4
5	0	1	0	5	1	1
5	1	1	1	5	1	1
5	2	1	2	5	2	2
5	3	1	3	5	3	3
5	4	1	4	5	4	4
5	5	1	5	5	5	5
5	6	1	5	6	6	6
6	0	0	0	6	0	0
6	1	0	1	6	1	1

6	2	0	2	6	2	2
6	3	0	3	6	3	3
6	4	0	4	6	4	4
6	5	0	5	6	5	5
6	6	0	6	6	6	6

Demostración

Es consecuencia inmediata de T67, para n=3.□

En los apéndices C y D se presentan las tablas de plausibilidad de las lógicas LP_8 y LP_{10}, que conjuntamente con LP_4 y LP_6, éstas presentadas en los dos últimos teoremas, T90 y T91, constituyen las cuatro lógicas de polivalencia más baja de la familia de lógicas de plausibilidad, $\{LP_{2n}\}_{n=2}^{\infty}$.

3.21 Sobre la lógica de plausibilidad generalizada como formalización de la decisión racional

3.21.1 Relación entre la lógica de plausibilidad generalizada y la decisión racional

Se trata de mostrar que la decisión racional fundamenta, al nivel de lógica de plausibilidad generalizada, la teoría de plausibilidad y en qué sentido ésta apoya a aquélla.

a) En primer lugar, se prueba que los conectivos $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ se pueden expresar en función de los otros dos conectivos, $\neg$ y $\wedge$.

   i) Al nivel de evidencia, el conectivo $\vee$ se puede expresar en función de los conectivos $\neg$ y $\wedge$:

      Por AE3,

      $ec(k,A\vee B)=ec(k,\neg(\neg A\wedge\neg B))$

$ecs_{2n}(k,A\vee B)=ecs_{2n}(k,\neg(\neg A\wedge\neg B))$

$efs_{2n}(k,A\vee B)=efs_{2n}(k,\neg(\neg A\wedge\neg B))$.

En consecuencia, la evidencia de $A\vee B$ coincide con la de $\neg(\neg A\wedge\neg B)$. Por tanto, el conectivo $\vee$ se expresa en función de los conectivos $\neg$ y $\wedge$.

ii) El conectivo $\rightarrow$, al nivel de evidencia, se puede expresar en función de los conectivos $\neg$ y $\wedge$:

Por AE4,

$ec(k,A\rightarrow B)=ec(k,\neg A\vee B)$

$ecs_{2n}(k,A\rightarrow B)=ecs_{2n}(k,\neg A\vee B)$

$efs_{2n}(k,A\rightarrow B)=efs_{2n}(k,\neg A\vee B)$;

por AE3,

$ec(k,\neg A\vee B)=ec(k,\neg(\neg(\neg A)\wedge\neg B))$

$ecs_{2n}(k,\neg A\vee B)=ecs_{2n}(k,\neg(\neg (\neg A)\wedge\neg B))$

$efs_{2n}(k,\neg A\vee B)=efs_{2n}(k,\neg(\neg(\neg A)\wedge\neg B))$.

Implica,

$ec(k,A\rightarrow B)=ec(k,\neg(\neg(\neg A)\wedge\neg B))$

$ecs_{2n}(k,A\rightarrow B)=ecs_{2n}(k,\neg(\neg (\neg A)\wedge\neg B))$

$efs_{2n}(k,A\rightarrow B)=efs_{2n}(k,\neg(\neg(\neg A)\wedge\neg B))$.

Por tanto, el conectivo $\rightarrow$ se puede expresar en función de los conectivos $\neg$ y $\wedge$.

iii) En términos de evidencia, el conectivo $\leftrightarrow$ se puede expresar en función de los conectivos $\neg$ y $\wedge$:

Por AE5,

$ec(k,A\leftrightarrow B)=ec(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$

$ecs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=ecs_{2n}(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$

$efs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=efs_{2n}(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$;

por AE2,

$ec(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))=max(ec(k,A\rightarrow B),ec(k,B\rightarrow A))$

$ecs_{2n}(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))=max(esc_{2n}(k,A\rightarrow B),ecs_{2n}(k,B\rightarrow A))$

$efs_{2n}(k,(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))=\min(efs_{2n}(k,A\rightarrow B),efs_{2n}(k,B\rightarrow A))$.

Implica,

$ec(k,A\leftrightarrow B)=\max(ec(k,A\rightarrow B),ec(k,B\rightarrow A))$

$ecs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=\max(esc_{2n}(k,A\rightarrow B),ecs_{2n}(k,B\rightarrow A))$

$efs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=\min(efs_{2n}(k,A\rightarrow B),efs_{2n}(k,B\rightarrow A))$;

por ii),

$ec(k,A\rightarrow B)=ec(k,\neg(\neg(\neg A)\wedge\neg B))$

$ecs_{2n}(k,A\rightarrow B)=ecs_{2n}(k,\neg(\neg (\neg A)\wedge\neg B))$

$efs_{2n}(k,A\rightarrow B)=efs_{2n}(k,\neg(\neg(\neg A)\wedge\neg B))$.

Implica,

$ec(k,A\leftrightarrow B)=\max(ec(k,\neg(\neg(\neg A)\wedge\neg B)), ec(k,\neg(\neg(\neg B)\wedge\neg A)))$

$ecs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=\max(esc_{2n}(k,\neg(\neg(\neg A)\wedge\neg B)),\neg(\neg(\neg B)\wedge\neg A)))$

$efs_{2n}(k,A\leftrightarrow B)=\min(efs_{2n}(k,\neg(\neg(\neg A)\wedge\neg B)),\neg(\neg(\neg B)\wedge\neg A)))$.

Por i), ii) y iii), los conectivos $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ están caracterizados en función de los otros dos conectivos, $\neg$ y $\wedge$.

b) En segundo lugar, se trata de ver que la caracterización del conectivo $\neg$, al nivel de evidencia, corresponde a criterios puramente lógicos, en el sentido siguiente.

i) Se muestra que $ec(k,\neg A)=1-ec(k,A)$, obedece a criterios lógicos:

i.1) Si $ec(k,A)=1$, por D2, se sabe que existe evidencia en contra; entonces, se asegura que para $\neg A$, al ser la negación de A, se sabe que no existe evidencia en contra; entonces, por D2, $ec(k,\neg A)=0$. Implica, $ec(k,\neg A)=1-ec(k,A)$.

i.2) Si $ec(k,A)=0.5$, por D2, no se sabe si existe o no evidencia en contra; entonces, tampoco se sabe si existe o no evidencia en contra para $\neg A$; entonces, por D2, $ec(k,\neg A)=0.5$. Implica, $ec(k,\neg A)=1-ec(k,A)$.

i.3) Si $ec(k,A)=0$, por D2, se sabe que no existe evidencia en contra; entonces para $\neg A$, al ser la negación de A, se sabe que existe evidencia en contra; entonces, por D2, $ec(k,\neg A)=1$. Implica, $ec(k,\neg A)=1-ec(k,A)$.

Por i.1), i.2) y i.3), que $ec(k,\neg A)=1-ec(k,A)$ se debe a criterios lógicos.

ii) Por D2, $efs_{2n}(k,A)$, representa el grado de evidencia a favor de A, mientras que $ecs_{2n}(k,\neg A)$ el de evidencia en contra de $\neg A$; entonces, al ser $\neg A$ la negación de A, $ecs_{2n}(k,\neg A)=efs_{2n}(k,A)$.

iii) Por D2, $ecs_{2n}(k,A)$ representa el grado de evidencia en contra de A, mientras que $efs_{2n}(k,\neg A)$ el de evidencia a favor de $\neg A$; entonces, al ser $\neg A$ la negación de A, $efs_{2n}(k,\neg A)=ecs_{2n}(k,A)$.

iv) Por AE1,

$ec(k,\neg A)=1-ec(k,A)$

$ecs_{2n}(k,\neg A)=efs_{2n}(k,A)$

$efs_{2n}(k,\neg A)=ecs_{2n}(k,A)$.

Por i), ii) iii) y iv), la caracterización del conectivo lógico $\neg$, al nivel de evidencia, obedece a criterios puramente lógicos.

c) Ahora, se muestra que la caracterización del conectivo $\wedge$ se fundamenta en la decisión racional.

La evidencia de la conjunción de dos proposiciones $A\wedge B$, está determinada por AE2,

$ec(k,A\wedge B)=\max(ec(k,A),ec(k,B))$

$ecs_{2n}(k,A\wedge B)=\max(ecs_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B))$

$efs_{2n}(k,A\wedge B)=\min(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B))$.

Esto prueba que el conectivo lógico $\wedge$, mediante su caracterización a través de la evidencia, está determinado por un algoritmo maximin: el máximo de la evidencia en contra y el mínimo de la evidencia a favor. A su vez, como se muestra en la sección 2.3.3, un algoritmo maximin caracteriza la decisión racional. Por tanto, la decisión racional fundamenta el conectivo $\wedge$.

Finalmente, por b) la caracterización de $\neg$ corresponde a criterios puramente lógicos; mientras que por c), la decisión racional fundamenta el conectivo $\wedge$. Y por a), los conectivos $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$

están caracterizados, al nivel de evidencia, en función de los otros dos conectivos, $\neg$ y $\wedge$. Por tanto, se concluye que los conectivos lógicos de la lógica de plausibilidad generalizada están fundamentados en la decisión racional.

Y como se señala en la sección 2.1.2, según Dalla (1976:103), una lógica polivalente una vez fijada su polivalencia, está determinada por sus operadores lógicos. Como consecuencia, por ser la lógica de plausibilidad generalizada, por T89, una familia de lógicas polivalentes, está determinada por sus conectivos lógicos. Por tanto, la decisión racional fundamenta la lógica de plausibilidad generalizada y por ende, la teoría de plausibilidad. A su vez, como ésta determina la plausibilidad de una decisión, es decir, su grado de aceptación; entonces, en este sentido, la teoría de plausibilidad apoya decisiones racionales.

3.21.2 La lógica de plausibilidad generalizada como lógica de inclusión

Tal como se concluye en 3.21.1, la lógica de plausibilidad generalizada se fundamenta en la decisión racional y ésta, por 2.4.2, se sabe que impone una lógica de inclusión y que es necesario contar con postulados sobre la conjunción, para lograr la inclusión del otro. Pero tal como se muestra en 3.21.1, la lógica de plausibilidad generalizada se articula en la conjunción; y por 3.12, el conectivo $\wedge$ está determinado axiomáticamente por AE2,

$ec(k,A\wedge B)=\max(ec(k,A),ec(k,B))$

$ecs_{2n}(k,A\wedge B)=\max(esc_{2n}(k,A),ecs_{2n}(k,B))$

$efs_{2n}(k,A\wedge B)=\min(efs_{2n}(k,A),efs_{2n}(k,B))$.

En este sentido, la lógica de plausibilidad generalizada es una lógica de inclusión; por T89, la lógica de plausibilidad generalizada es una familia infinita de lógicas polivalentes, que apoya razonamientos no monotónicos. Por tanto, la lógica de plausibilidad generalizada es una lógica de inclusión polivalente que apoya razonamientos no monotónicos. Y, de acuerdo a 2.4.2, éstas son las condiciones que la decisión racional impone a la lógica. Pero sobre todo, por 3.21.1, la

decisión racional fundamenta la lógica de plausibilidad generalizada y a su vez, la teoría de plausibilidad a través de la lógica de plausibilidad generalizada apoya decisiones racionales.

Por tanto, la lógica de plausibilidad generalizada, como familia infinita numerable de lógicas polivalentes finitas, construida en esta investigación, constituye la formalización de la decisión racional, alcanzando así un objetivo importante en el nivel pedagógico, donde la pedagogía se entiende como formación. Pues, como se afirma en 2.4.3, aportar a la decisión racional es aportar a la pedagogía como formación, porque la decisión racional al permitir distintos puntos de vista, impone la inclusión del otro, y por el paso de los otros al nosotros se interesa la pedagogía, al formar en verse a sí mismo como otro de los otros y a los otros como posibilidad de sí mismo.

4. Conclusiones

La lógica de plausibilidad generalizada se construye a partir de la teoría de plausibilidad; se generaliza la lógica de plausibilidad al nivel de polivalencia; la polivalencia de la lógica de plausibilidad generalizada es representada por $P_{2n}=\{0, 1, ..., 2n\}$, conjunto de estados de plausibilidad de cardinalidad 2n+1, que al ser impar permite que las regiones de plausibilidad $S_0^{2n}=\{0, 1, ..., n-1\}$, $S_1^{2n}=\{n\}$ y $S_2^{2n}=\{n+1, n+2, ..., 2n\}$ sean simétricas: por el teorema T10, S_0^{2n} y S_2^{2n} son simétricas entre sí y S_1^{2n} lo es consigo misma. Las funciones numéricas ec, ef, ecs_{2n} y efs_{2n}, de acuerdo a la definición D2, representan la evidencia: ec, la evidencia en contra y ef, la evidencia a favor; y el grado de evidencia en contra y a favor lo representan las funciones ecs_{2n} y efs_{2n}, respectivamente. Mientras que, según la definición D3, la función cal_{2n} representa la plausibilidad, definida en términos de ec, ecs_{2n} y efs_{2n}.

La clasificación de la plausibilidad mediante las regiones de plausibilidad S_0^{2n}, S_1^{2n} y S_2^{2n}, por el teorema T14, depende exclusivamente de la función ec. Además, los valores de la evidencia en contra, es decir, los de la función ec, de acuerdo a la definición D2, dan nombre a S_0^{2n}, S_1^{2n} y S_2^{2n}: región de rechazo, de indeterminación y región de aceptación, respectivamente, tal como las define D4. Dentro de cada región de plausibilidad, el teorema T15 asegura que, el estado de plausibilidad de una afirmación está determinado por las funciones ecs_{2n} y efs_{2n}: ecs_{2n} define el estado de plausibilidad en la región de rechazo, mientras que efs_{2n} lo define en la región de aceptación. Sin embargo, en la región de indeterminación, lo define la propia región, que a su vez está caracterizada por la función ec, tal como se señala, por T14.

Al contar con esta representación funcional de la evidencia y la plausibilidad, se establecen los axiomas de la lógica de plausibilidad generalizada, que fundamentan, esencialmente, los conectivos lógicos en función de la evidencia, respetando los axiomas de la lógica de plausibilidad, en el sentido que ésta es un caso particular de aquélla. A partir de los axiomas, se caracterizan los conectivos al nivel de plausibilidad, quedando así construida la lógica de

plausibilidad generalizada. Ésta cumple una serie de teoremas, en particular propiedades de la lógica clásica; como son, al nivel de equivalencia lógica, las leyes de De Morgan y el teorema de remplazamiento, entre otras.

Aunque aquí se han mencionado ciertos resultados relacionados con la lógica de plausibilidad generalizada, se destacan de sobremanera los siguientes:

La lógica de plausibilidad generalizada es, por el teorema T89, una familia infinita numerable de lógicas polivalentes finitas, $\left\{LP_{2n}\right\}_{n=2}^{\infty}$. Ahora bien, LP_{2n} es la lógica de plausibilidad 2n+1-valente. En particular, LP_4 es la lógica de plausibilidad pentavalente, cuya tabla de plausibilidad es la misma que caracteriza a la lógica de plausibilidad, es decir, ambas lógicas coinciden, tal como se concluye en 3.20. Significa que la lógica de plausibilidad, única lógica con que contaba la teoría de plausibilidad previo a esta investigación, es tan solo una lógica entre las infinitas lógicas polivalentes que constituyen la lógica construida, la lógica de plausibilidad generalizada. Por tanto, se confirma así la tesis planteada en esta investigación: La lógica de plausibilidad se puede generalizar al nivel de polivalencia.

La lógica de plausibilidad generalizada, como familia infinita numerable de lógicas polivalentes finitas, $\left\{LP_{2n}\right\}_{n=2}^{\infty}$, está determinada por sus conectivos lógicos; éstos se fundamentan en la decisión racional, mediante la conjunción; y el conectivo $\wedge$ está caracterizado por un algoritmo maximin, de acuerdo a lo señalado en 3.21.1 para concluir, y tal como se adelantaba en 2.9: La decisión racional fundamenta la lógica de plausibilidad generalizada.

La lógica de plausibilidad generalizada, como familia infinita numerable de lógicas polivalentes finitas, $\left\{LP_{2n}\right\}_{n=2}^{\infty}$, tal como se señala en 3.21.2, constituye la formalización de la decisión racional; así, el haber construido la lógica de plausibilidad generalizada y establecido su vinculación con la decisión racional, supone alcanzar un objetivo importante al nivel

pedagógico, al afirmar en 2.4.3 que, aportar a la decisión racional es aportar a la pedagogía como formación.

Como consecuencia de esta formalización de la decisión racional, la lógica de plausibilidad generalizada, como familia infinita numerable de lógicas polivalentes finitas, $\left\{LP_{2n}\right\}_{n=2}^{\infty}$, tal como se afirma en 3.21.2, es una lógica de inclusión polivalente que apoya razonamientos no monotónicos.

Sobre el sistema axiomático, seis axiomas fundamentan la lógica de plausibilidad generalizada, al nivel de evidencia, formulados en términos de las funciones ec, ef, ecs_{2n}, efs_{2n} y cal_{2n}; y tal como se señala en la sección 3.13, son, esencialmente, una generalización de los axiomas de la lógica de plausibilidad.

Establecida la polivalencia, la lógica de plausibilidad generalizada está determinada por la caracterización de los conectivos al nivel de plausibilidad, mediante el teorema fundamental de plausibilidad, T67; éste determina, por comprensión, la tabla de plausibilidad de cada una de las infinitas lógicas que conforman la lógica de plausibilidad generalizada. Esto supone alcanzar uno de los objetivos más importantes de la investigación, porque dicho teorema permite calcular mecánicamente la plausibilidad funcional.

Aunque aquí si bien se han señalado unos pocos resultados de la investigación, y que sin duda están entre los más importantes, el desarrollo de la lógica de plausibilidad generalizada lo constituyen 12 definiciones, 6 axiomas y 241 propiedades; éstas últimas organizadas en 91 teoremas y 6 lemas. Este número considerable de propiedades, descubiertas y demostradas, de la lógica de plausibilidad generalizada, muestra el nivel de desarrollo alcanzado en este estudio; particularmente, si tenemos en cuenta que las propiedades de la lógica de plausibilidad generalizada, como lógica polivalente, tal como se concluye en 2.1.2, también lo son de la lógica bivalente.

Por tanto, de acuerdo a los resultados aquí expuestos, los objetivos de la investigación son ampliamente satisfechos, que para la lógica de plausibilidad supone redefinir los estados de plausibilidad, para aumentar su polivalencia, fundamentarla axiomáticamente y caracterizar los conectivos, esto es, construir la lógica de plausibilidad generalizada, y desarrollarla, vinculándola con la decisión racional.

Al respecto, cabe destacar el haber logrado la construcción de una familia infinita de lógicas polivalentes finitas, al generalizar la lógica de plausibilidad; cuando, en un principio, pudiera haberse obtenido tan solo un reducido número de ellas, como respuesta a aumentar la polivalencia de la lógica de plausibilidad. Igualmente importante, el formalizar la decisión racional a partir de la lógica de plausibilidad generalizada, en un intento de vincular ambas. Unido a estas propiedades, el ser una lógica de inclusión polivalente que apoya razonamientos no monotónicos, muestra la gran riqueza de la lógica de plausibilidad generalizada y, por tanto, de la teoría de plausibilidad.

Al contar con este nivel de desarrollo la teoría de plausibilidad, en posteriores investigaciones cabe estudiar, tal como recomienda Lukasiewicz (1975g:137) para las lógicas polivalentes, distintas posibilidades de aplicación de la teoría; especialmente en software educativo, al fundamentar ya CSCL, software educativo colaborativo. También para posteriores estudios, tanto teóricos como de aplicación, la teoría de plausibilidad podría ser considerada como alternativa, al ser una familia infinita de lógicas polivalentes finitas, frente a la lógica difusa; ésta, una lógica de polivalencia infinita, que con tanto éxito se ha estado aplicando, como se afirma en 2.1.2, no sólo en software sino también en hardware.

5. Bibliografía

Agudelo, Martín (1999). Hacia un procesamiento adecuado de la justicia: una propuesta de enseñanza del derecho procesal para la sociedad del nuevo milenio (I)
Revista Internauta de Práctica Jurídica No. 3, septiembre-diciembre, 1999
Disponible en http://www.uv.es/~ripj/3mart.htm
Consulta domingo 20 de agosto de 2006.

Agüero, Ulises (1987). A theory of plausibility for computer architecture designs. Disertación doctoral no publicada. University of Southwestern Louisiana, Louisiana, EE. UU.

Agüero, Ulises (1988). La plausibilidad de los diseños de sistemas computacionales. Tecnología en Marcha, [Vol. 9, No. 2].

Agüero, Ulises and Dasgupta, Subrata (1987). A plausibility-driven approach to computer architecture design. Comunications of the ACM. [Vol. 30, No. 11].

Alekxandrov, A. D. (1985). Geometrías no euclidianas. En: La matemática: su contenido, métodos y significado 3 (6a. ed., 123-227). Traducción A. Ruiz. Alianza Editorial, S. A., Madrid.

Aliseda, Atocha (2005). Lógica: el problema de la demarcación. En: Representación y logicidad (1-7). Editorial Fénix Editora, Sevilla, España.
Disponible en
http://br.geocities.com/fapespcleime/Resources/Conferences/SimposioRepresentacionyLogicidad2005.pdf#search=%22Marek%20y%20Truszczynski%20(1993)%20no-monotonica%22
Consulta: sábado 07 de octubre de 2006

Alonso, Enrique (2002). Lógica y computabilidad.
Disponible en
http://logicae.usal.es/mambo/index.php?option=com_summalogicaexxi&menu_task=Biblioteca&task=no_task&cmd=detallar&param_1=41
Consulta: sábado 03 de noviembre de 2006 en la biblioteca digital Summa Logicae.

Astorga, Alcides (1997). Conjuntos aproximados: teoría y aplicaciones en bases de conocimiento y análisis de datos. Tesis de maestría no publicada. Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica.

Bacon, Francis (1984) Novum organum: aforismos sobre la interpretación de la naturaleza y el reino del hombre. Traducción C. Litrán. Ediciones Orbis, S.A., Barcelona.

Barceló, Axel Arturo (2005). Representación formal y (los límites de la) logicidad. En: Representación y logicidad (9-17). Editorial Fénix Editora, Sevilla, España.
Disponible en
http://br.geocities.com/fapespcleime/Resources/Conferences/SimposioRepresentacionyLogicidad2005.pdf#search=%22Marek%20y%20Truszczynski%20(1993)%20no-monotonica%22
Consulta: sábado 07 de octubre de 2006

Bentham, J. (1973). Fragmento sobre el gobierno. Traducción J. Larios. Aguilar, Madrid. (Trabajo original publicado en 1776).

Boyer, Carl B. (1986). Historia de la matemática. Traducción M. Martínez. Alianza Editorial, Madrid.

Braüner, Torben (2005). Natural deduction for first-order hybrid logic (173–198). Language and Information, No. 14.

Disponible en http://www.springerlink.com/content/u5321k56285ql857/fulltext.pdf Consulta: domingo 29 de octubre de 2006 en la base de datos Springer.

Copi, Irving M. (1987). Lógica simbólica. Traducción de Andrés Sestier. Editorial Continental, S. A., México, D. F.

CREADISA (1993). VirtualMeetings. Reference manual.

Dalla, María Luisa (1976). Lógica. Traducción de José M.ª Valderas. Editorial Labor, S. A., Barcelona.

Deaño, Alfredo (1975a). Introducción a la lógica formal: la lógica de predicados. Alianza Editorial, Madrid.

Deaño, Alfredo (1975b). Presentación. En: A. Deaño (compilador y traductor), Estudios de lógica y filosofía (41-42). Editorial Revista de Occidente, S. A., Madrid.

Deaño, Alfredo (1978). Introducción a la lógica formal. Alianza Editorial, Madrid.

Dworkin, Ronald (1997). Cómo el derecho se parece a la literatura. En: La decisión judicial: el debate Hart – Dworkin (143-180). Traducción J. M. Pombo. Siglo del Hombre Editores, Bogotá.

Efímov, N. V. (1984). Geometría superior. Traducción de J. J. Tolosa y Yu. P. Murzín. Editorial Mir, Moscú.

Enderton, Herbert B. (1977). Elements of set theory. Academic Press, New York.

Fernández, Ángel Nepomuceno (2005a). Aplicación de tablas semánticas al estudio de algunas lógicas no clásicas.
Disponible en
http://logicae.usal.es/mambo/index.php?option=com_summalogicaexxi&menu_task=Biblioteca&task=no_task&cmd=detallar&param_1=60
Consulta: sábado 03 de noviembre de 2006 en la biblioteca digital Summa Logicae.

Fernández, Angel Nepomuceno (2005b). Sistemas lógicos. En: Representación y logicidad (85-112). Editorial Fénix Editora, Sevilla, España.
Disponible en
http://br.geocities.com/fapespcleime/Resources/Conferences/SimposioRepresentacionyLogicidad2005.pdf#search=%22Marek%20y%20Truszczynski%20(1993)%20no-monotonica%22
Consulta: sábado 07 de octubre de 2006

Galilei, Galileo (1984). El ensayador. Traducción J. M. Revuelta. Sarpe, Madrid.

Garrido, Manuel (1983). Lógica simbólica. Editorial Tecnos, S. A., Madrid.

Gómez, J. C. (1989). Consideraciones prácticas sobre la teoría de plausibilidad. Centro de Investigaciones en Computación, Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica.

Gómez, Vicente (1988). Desarrollo plausible de pruebas de correctitud de programas. Centro de Investigaciones en Computación, Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica.

Hart, H. L. A. (1997). Postscriptum. En: La decisión judicial: el debate Hart – Dworkin (89-141). Traducción M. Holguín. Siglo del Hombre Editores, Bogotá.

Hilbert, David (1944). Fundamentos de la geometría. En: Obras completas de Euclides (1-41). Traducción J. D. García. Universidad Nacional Autónoma de México.

Hooton, Alan R., Agüero, Ulises & Dasgupta, Subrata (1988). An exercise in plausibility-driven design. IEEE Computer Society Press, [Vol. 21, No. 7]. Disponible en http://uv.unitec.edu/ftp/sistemas/logica/An%20Exercise%20in%20Plausibility-Driven%20Design.pdf
Consulta: domingo 29 de octubre de 2006

Husserl (1987). El espíritu común (gemeingeist). Thémata. Revista de filosofía de la Universidad de Sevilla. [No. 4].

Koyré, Alexandre (1978a). Galileo y la revolución científica del siglo XVII. En: Estudios de historia del pensamiento científico. Siglo veintiuno editores, México.

Koyré, Alexandre (1978b). Los orígenes de la ciencia moderna. Una interpretación nueva. En: Estudios de historia del pensamiento científico. Siglo veintiuno editores, México.

Larios, Julián (1973). Prólogo. En: Fragmento sobre el gobierno (IX-XXIII). Traducción J. Larios. Aguilar, Madrid.

Lukasiewicz, Jan (1975a). Lección de despedida pronunciada por el profesor Lukasiewicz en el Aula Magna de la Universidad de Varsovia el 7 de Mayo de 1918. En: A. Deaño (compilador y traductor), Estudios de lógica y filosofía (37-40). Editorial Revista de Occidente, S. A., Madrid.

Lukasiewicz, Jan (1975b). Sobre la lógica trivalente. En: A. Deaño (compilador y traductor), Estudios de lógica y filosofía (41-42). Editorial Revista de Occidente, S. A., Madrid.

Lukasiewicz, J. (1975c). Sobre el determinismo. En: A. Deaño (compilador y traductor), Estudios de lógica y filosofía (43-60). Editorial Revista de Occidente, S. A., Madrid.

Lukasiewicz, Jan (1975d). Observaciones filosóficas sobre los sistemas polivalentes de lógica proposicional. En: A. Deaño (compilador y traductor), Estudios de lógica y filosofía (61-86). Editorial Revista de Occidente, S. A., Madrid.

Lukasiewicz, Jan (1975e). Para la historia de la lógica de proposiciones. En: A. Deaño (compilador y traductor), Estudios de lógica y filosofía (87-107). Editorial Revista de Occidente, S. A., Madrid.

Lukasiewicz, Jan (1975f). Logística y filosofía. En: A. Deaño (compilador y traductor), Estudios de lógica y filosofía (109-126). Editorial Revista de Occidente, S. A., Madrid.

Lukasiewicz, Jan (1975g). En defensa de la lógica. En: A. Deaño (compilador y traductor), Estudios de lógica y filosofía (127-139). Editorial Revista de Occidente, S. A., Madrid.

Lukasiewicz, Jan (1977). El problema de decisión. En: La silogística de Aristóteles: desde el punto de vista de la lógica formal (2a. ed., 88-111). Traducción de J. Fernández. Editorial Tecnos, S. A., Madrid.

Manzano, María (2003). Teoría de modelos.
Disponible en

http://logicae.usal.es/mambo/index.php?option=com_summalogicaexxi&menu_task=Biblioteca&task=no_task&cmd=detallar&param_1=358
Consulta: sábado 03 de noviembre de 2006 en la biblioteca digital Summa Logicae.

Manzano, María (2005). ¿Qué es esa cosa llamada lógica? En: Representación y logicidad (19-36). Editorial Fénix Editora, Sevilla, España.
Disponible en
http://br.geocities.com/fapespcleime/Resources/Conferences/SimposioRepresentacionyLogicidad2005.pdf#search=%22Marek%20y%20Truszczynski%20(1993)%20no-monotonica%22
Consulta: sábado 07 de octubre de 2006

Marraund, Huberto (1999). Introducción a la teoría de los sistemas deductivos.
Disponible en
http://logicae.usal.es/mambo/index.php?option=com_summalogicaexxi&menu_task=Biblioteca&task=no_task&cmd=detallar&param_1=110
Consulta: sábado 03 de noviembre de 2006 en la biblioteca digital Summa Logicae.

Morado, Raymundo (2004). Problemas filosóficos de la lógica no monotónica.
Disponible en
http://www.filosoficas.unam.mx/~morado/Cursos/3FdelaL/Probs_0716.htm#_ftnref11
Consulta: domingo 08 de octubre de 2006
(Publicado como: Morado, Raymundo (2004). "Problemas filosóficos de las lógicas nomonotónicas". En Raúl Orayen y Alberto Moretti (eds.), Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía, vol. 27. Madrid: Ed. Trotta y Consejo Superior de Investigaciones Científicas, pp. 313-344.)

Morado, Raymundo (2005a). Propiedades estructurales en lógicas monotónicas y no-monotónicas.

Disponible en
http://www.smm.org.mx/SMMP/html/modules/Publicaciones/AM/Cm/35/artExp10.pdf#search=%22logica%20no-monotonica%22
Consulta: Sábado 07de octubre de 2006

Morado, Raymundo (2005b). La representación de las inferencias no monotónicas. En: Representación y logicidad (37-49). Editorial Fénix Editora, Sevilla, España.
Disponible en
http://br.geocities.com/fapespcleime/Resources/Conferences/SimposioRepresentacionyLogicidad2005.pdf#search=%22Marek%20y%20Truszczynski%20(1993)%20no-monotonica%22
Consulta: sábado 07 de octubre de 2006

Morado, Raymundo & Savion, Leah (2002). Problemas filosóficos de la lógica no monotónica.
Disponible en http://www.filosoficas.unam.mx/~morado/pubs.htm
Consulta: domingo 08 de octubre de 2006
(Publicado en: 2002 International Conference on Artificial Intelligence (IC-AI'02), volumen II, CSREA Press, pp. 791-797.)

Mostowski, Andrzej, Robinson, Raphael M. & Tarski, Alfred (1971). Undecidability and essential undecidability in arithmetic. En: L. E. J. Brouwer, E. W. Beth & A. Heyting (Eds.), Studies in logic and the foundations of mathematics (37-74). North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Mouffe, Chantal (1988). El liberalismo norteamericano y sus críticos: Rawls, Taylor, Sandel, Walter
Estudios. filosofía-historia-letras. Invierno 1988
Disponible en http://biblioteca.itam.mx/estudios/estudio/letras15/trad1/sec_1.html

Consulta domingo 20 de agosto de 2006.

Nozick, Robert (1988). Anarquía, estado y utopía. Traducción R. Tamayo. Fondo de Cultura Económica, México, D. F. (Trabajo original publicado en 1974).

Núñez, Giannina (1999). Toma de decisiones en grupo para juegos educativos colaborativos. Tesis de maestría no publicada. Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica.

Núñez, Giannina, Agüero, Ulises & Olivares, César (1998). Group decision-making for collaborative educational games.
Disponible en
http://scholar.google.com/scholar?hl=es&lr=&q=cache:YVByU0OIMUcJ:criwg.di.fc.ul.pt/criwg98/artigo10.pdf+related:YVByU0OIMUcJ:scholar.google.com/
Consulta domingo 3 de septiembre 2006.
(Publicado en: Proceedings of CRIWG'98 Fourth CYTED-RITOS International Workshop on Groupware. pp. 143-155, Búzios, Rio de Janeiro, Brasil, September 9-11, 1998.)

Ocampo, Alicia (2007). Transdisciplinariedad y otredad intergenérica para una cultura incluyente con el «ens patiens». Cihuatl, [Mayo 2007, No. 3].
Disponible en
http://carreragdlmujer.com/cihuatl/Cihuatl3.pdf
Consulta: domingo 02 de marzo de 2008

Olivares, César (1996). Fundamentos lógicos y políticas para un modelo de votación en grupos grandes basado en la teoría de plausibilidad. Tesis de maestría no publicada. Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica.

Palau, Gladys (2001). La noción abstracta de consecuencia lógica. Disponible en http://logicae.usal.es/mambo/index.php?option=com_summalogicaexxi&menu_task=Biblioteca&task=no_task&cmd=detallar&param_1=19 Consulta: sábado 03 de noviembre de 2006 en la biblioteca digital Summa Logicae.

Pereyra, Sebastián, Toscano, Ariel & Jones, Daniel (2002). Individualismo metodológico y ciencias sociales: argumentos críticos sobre la teoría de la elección racional. En: F. L. Schuster (compilador) Filosofía y métodos de las ciencias sociales (93-130). Manantial, Buenos Aires.

Rawls, John (1997). Teoría de la justicia. Traducción de M. D. González, 2ª. ed. Fondo de Cultura Económica, México. (Trabajo original publicado en 1971).

Rawls, John (2002). La justicia como equidad: una reformulación. Traducción de A. de Francisco. Ediciones Paidós Ibérica, S. A., Barcelona. (Trabajo original publicado en 2001).

Rodríguez, César (1997). Teoría del derecho y decisión judicial: entorno al debate entre H. L. A. Hart y R. Dworkin. En: P. A. Bulloch & J. Raz (Eds.) La decisión judicial: el debate Hart – Dworkin (15-88). Siglo del Hombre Editores, Bogotá.

Rodríguez, Manuel (1999). Teoría de plausibilidad. En: Formalización de la teoría de plausibilidad y del grafo de plausibilidad (4-79). Tesis de maestría no publicada. Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica.

Rodríguez, Manuel & Castro, Leví Astul (1999). Conclusiones y recomendaciones. En: Formalización de la teoría de plausibilidad y del grafo de plausibilidad (103-106). Tesis de maestría no publicada. Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica.

Sánchez, Lydia & Campos, Manuel (2003). Lógica y ciencia.
Disponible en
http://logicae.usal.es/mambo/index.php?option=com_summalogicaexxi&menu_task=Biblioteca&task=no_task&cmd=detallar&param_1=51
Consulta: sábado 03 de noviembre de 2006 en la biblioteca digital Summa Logicae.

Saussure, Ferdinand de (s.f.). Curso de lingüística general. Traducción M. Armiño, 2ª. ed. Ediciones Nuevomar, S.A. de C.V., México, D.F.

Soler, Fernando (2005). Razonamiento por defecto mediante δ-resolución. En: Representación y logicidad (85-112). Editorial Fénix Editora, Sevilla, España.
Disponible en
http://br.geocities.com/fapespcleime/Resources/Conferences/SimposioRepresentacionyLogicidad2005.pdf#search=%22Marek%20y%20Truszczynski%20(1993)%20no-monotonica%22
Consulta: sábado 07 de octubre de 2006

Tarski, Alfred (1971a). A general methodo in proofs of undecidability. En: L. E. J. Brouwer, E. W. Beth & A. Heyting (Eds.), Studies in logic and the foundations of mathematics (1-35). North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Tarski, Alfred (1971b). Undecidability of the elementary theory of groups. En: L. E. J. Brouwer, E. W. Beth & A. Heyting (Eds.), Studies in logic and the foundations of mathematics (75-87). North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Tarski, Alfred (1977). Sobre el cálculo proposicional. En: T. R. Bachiller y J. R. Fuentes (Trads.), Introducción a la lógica y a la metodología de las ciencias deductivas (41-79). Editorial Espasa-Calpe, S. A., Madrid.

Vargas, Germán (1997). ¡Eliminar la crueldad!: Un horizonte liberal para construir la justicia. Santafé de Bogotá, abril de 1997.
(Publicado en: Franciscanum: revista de las ciencias del espíritu, Vol. 38, Nº 113-114, 1996, pp. 239-268)

Vargas, Germán (2003a). Filosofía, pedagogía, tecnología: Investigaciones de epistemología de la pedagogía y filosofía de la educación. Alejandría Libros, Bogotá, D.C., Colombia.

Vargas, Germán (2003b). Fenomenología del ser y del lenguaje. Alejandría Libros, Bogotá, D.C., Colombia.

Vargas, Germán (2007). Constitución del sujeto y constitución subjetiva de mundo. De los límites de la detrascendentalización. En G. Vargas (Ed.), Formación y subjetividad (11-27). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Vargas, Germán & Cárdenas, Luz Gloria (2005). Retórica, poética y formación: De las pasiones al entimema. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Velarde, Julián (1994). Ingeniería del conocimiento y conocimiento ordinario. Anales del Seminario de metafísica Metafísica, [No. 28]. Editorial Complutense, Madrid.
Disponible en
http://www.ucm.es/BUCM/revistas/fsl/15756866/articulos/ASEM9494110299A.PDF#search=%22Velarde%20Lombra%C3%B1a%20logica%22
Consulta: domingo 08 de octubre de 2006

Velásquez, G. (s.f.). ¿Pórque y cómo innovar en las pequeñas y medianas empresas centroamericanas?
Disponible en
http://www.conicit.go.cr/recursos/documentos/innovar_pymes.shtml
Consulta: domingo 22 de octubre de 2006

Velilla, Ricardo (1974). Saussure y Chomsky: introducción a su lingüística. Editorial Cincel, S. A., Madrid.

Whitehead, Alfred North & Russell, Bertrand (1963). Principia mathematica (Vol. 1) (2a. ed.). Cambridge.

Zadeh, Lotfi A. (1965). Fuzzy sets. Information and control, [No. 8].
Disponible en http://www-bisc.cs.berkeley.edu/zadeh/papers/Fuzzy%20Sets-1965.pdf
Consulta: jueves 07 de diciembre de 2006

Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-III. Information Sciences, [No. 9].
Disponible en
http://www-bisc.cs.berkeley.edu/zadeh/papers/The%20Concept%20of%20a%20Linguistic%20Variable%20and%20its%20Applications%20to%20Approximate%20Reasoning%20III-1975.pdf
Consulta: jueves 07 de diciembre de 2006

Zadeh, Lotfi A. (1994). Fuzzy logic, neural networks, and soft computing. Communications of the ACM, [Vol. 37, No. 3].
Disponible en
http://www-bisc.cs.berkeley.edu/zadeh/papers/Toward%20a%20generalized%20theory%20of%20uncertainty%20(GTU)--an%20outline-2005.pdf
Consulta: jueves 07 de diciembre de 2006

Zadeh, Lotfi A. (2005). Toward a generalized theory of uncertainty (GTU)—an outline. Information Sciences, [No. 172].
Disponible en
http://www-bisc.cs.berkeley.edu/zadeh/papers/Toward%20a%20generalized%20theory%20of%20uncertainty%20(GTU)--an%20outline-2005.pdf
Consulta: jueves 07 de diciembre de 2006

Apéndice A

Elementos del lenguaje de teoría de conjuntos

A continuación se introducen ciertos elementos del lenguaje de teoría de conjuntos que son empleados en esta investigación; se presentan en su forma usual y que, en lo esencial, coinciden con Enderton (1977).

Axioma de extensionalidad

Dos conjuntos con los mismos elementos son iguales. En símbolos: $\forall a(a\in A\leftrightarrow a\in B)\rightarrow A=B$.

Subconjunto

Un conjunto A es subconjunto de otro conjunto B, se escribe $A\subseteq B$, si todo elemento de A pertenece a B. En símbolos: $\forall a(a\in A\rightarrow a\in B)\rightarrow A\subseteq B$.

Conjunto de partes

El conjunto de partes de un conjunto A, se escribe P(A), es el que tiene como elementos los subconjuntos de A. En símbolos: $P(A)=\{a: a\subseteq A\}$.

Intersección de conjuntos

El conjunto A intersección B, se escribe $A\cap B$, es el que tiene como elementos los de A que pertenecen a B. En símbolos: $A\cap B=\{a: a\in A \text{ y } a\in B\}$.

Conjunto unión

El conjunto unión de un conjunto A, se escribe $\bigcup A$, es el que tiene como elementos los elementos de los elementos de A. En símbolos: $\bigcup A=\{x: \text{existe } a\in A \text{ y } x\in a\}$. En particular, $\bigcup\{A, B\}=A\cup B=\{a: a\in A \text{ o } a\in B\}$; $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\bigcup\{A_1, A_2, ..., A_n\}=A_1\cup A_2\cup \ldots \cup A_n$.

Producto cartesiano

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B, se escribe $A\times B$, es el conjunto que tiene como elementos los pares ordenados cuya primer coordenada es un elemento de A y la segunda es un elemento de B. En símbolos: $A\times B=\{(a, b): a\in A \text{ y } b\in B\}$.

Función entre conjuntos

F es una función de un conjunto A en otro B, se escribe $F:A\rightarrow B$, cuyo dominio es $\text{dom}F=\{a: (a, b)\in F\}$ y su rango es $\text{ran}F=\{b: (a, b)\in F\}\subseteq B$; y, a cada $a\in \text{dom}F$ le corresponde un único $b\in \text{ran}F$ tal que $(a, b)\in F$ (se escribe $F(a)=b$). Más brevemente, F es una función de A en B, si $\forall a, b\in \text{dom}F=A$, $a=b$ implica $F(a)=F(b)$. En particular:

a) F es inyectiva, si a cada elemento del rango le corresponde un único elemento del dominio. En símbolos: $\forall a, b\in \text{ran}F$, $F(a)=F(b)$ implica $a=b$.

b) F es sobreyectiva o sobre, si $\text{ran}F=B$, es decir, a cada elemento de B le corresponde al menos un elemento del dominio de F. En símbolos, $\forall b\in B\ \exists a\in \text{dom}F=A$ tal que $F(a)=b$.

Relación de equivalencia

R es una relación de equivalencia sobre un conjunto A, si $R\subseteq A\times A$ y cumple:

i) R es reflexiva sobre A: para cada $a\in A$, $(a, a)\in R$.

ii) R es simétrica: para cualesquiera $a, b\in A$, $(a, b)\in R$ implica $(b, a)\in R$.

iii) R es transitiva: para cualesquiera $a, b, c\in A$, $(a, b)\in R$ y $(b, c)\in R$ implica $(a, c)\in R$.

También se suele simbolizar $(a, b)\in R$ por aRb; en este caso, no se considera $R\subseteq A\times A$. Además, a la relación de equivalencia R están asociados dos conceptos:

a) La clase de equivalencia de $a\in A$, se escribe $[a]_R$, es el conjunto cuyos elementos son los de A relacionados con a. En símbolos: $[a]_R=\{b: b\in A \text{ y } (a, b)\in R\}$.

b) El conjunto cociente, se escribe A/R, es el conjunto de las clases de equivalencia. En símbolos: $A/R=\{[a]_R: a\in A\}$.

Partición

Un conjunto P es una partición de un conjunto A, si sus elementos son subconjuntos de A, distintos del vacío y disjuntos cuya unión es A. En símbolos:

i) $P \subseteq P(A)$.

ii) $\forall p \in P$, $p \neq \emptyset$.

iii) $\forall p, q \in P$, $p \neq q$ implica $p \cap q = \emptyset$.

iv) $\bigcup P = A$.

Familia infinita numerable

$\{A_i\}_{i \in I} = \{A_i : i \in I\}$ es una familia infinita numerable, si $\text{car}\{A_i\}_{i \in I} = \text{car}N = \aleph_0$, es decir, si existe una función $F: \{A_i : i \in I\} \rightarrow N$ biyectiva, siendo N el conjunto de los naturales. En este caso, la familia $\{A_i\}_{i \in I}$ se suele representar por $\{A_n\}_{n=n_0}^{\infty}$.

Apéndice B

Lemas sobre números reales

En 3.8 se enuncian seis lemas sobre números reales; aquí, en este apéndice, se presentan los enunciados con sus respectivas demostraciones.

a) Cinco lemas sobre números reales

Cualesquiera números reales p, q y r cumplen las siguientes propiedades.

L1

a) $1-\max(1-p,1-q)=\min(p,q)$.

b) $1-\min(1-p,1-q)=\max(p,q)$.

Demostración

a)

ii) $p\leq q$. Implica:

i.1) $-q\leq -p$,

$1-q\leq 1-p$,

$\max(1-p,1-q)=1-p$,

$1-\max(1-p,1-q)=1-(1-p)$,

$1-\max(1-p,1-q)=p$.

i.2) $\min(p,q)=p$.

Por i.1) y i.2),

$1-\max(1-p,1-q)=\min(p,q)$.

ii) $q\leq p$. Implica:

ii.1) $-p\leq -q$,

$1-p\leq 1-q$,

max(1-p,1-q)=1-q,

1-max(1-p,1-q)=1-(1-q),

1-max(1-p,1-q)=q.

ii.2) min(p,q)=q.

Por ii.1) y ii.2),

1-max(1-p,1-q)=min(p,q).

Por i) y ii),

1-max(1-p,1-q)=min(p,q).

b)

i) p≤q. Implica:

i.1) -q≤-p,

1-q≤1-p,

min(1-p,1-q)=1-q,

1-min(1-p,1-q)=1-(1-q),

1-min(1-p,1-q)=q.

i.2) max(p,q)=q.

Por ii.1) y ii.2),

1-min(1-p,1-q)=max(p,q).

ii) q≤p. Implica:

ii.1) -p≤-q,

1-p≤1-q,

min(1-p,1-q)=1-p,

1-min(1-p,1-c)=1-(1-p),

1-min(1-p,1-q)=p.

ii.2) max(p,q)=p.

Por ii.1) y ii.2),

1–min(1-p,1-q)=max(p,q).

Por i) y ii),

1-min(1-p,1-q)=max(p,q).□

L2

a) max(max(p,q),r)=max(p,max(q,r)).

b) min(min(p,q),r)=min(p,min(q,r)).

Demostración

a)

a) $p \leq q \leq r$. Implica:

i.1) max(max(p,q),r)
=max(q,r)=r.

i.2) max(p,max(q,r))
=max(p,r)=r.

Por i.1) y i.2),
max(max(p,q),r)
=max(p,max(q,r)).

ii) $p \leq r \leq q$. Implica:

ii.1) max(max(p,q),r)
=max(q,r)=q.

ii.2) max(p,max(q,r))
=max(p,q)=q.

Por ii.1) y ii.2),
max(max(p,q),r)
=max(p,max(q,r)).

iii) $r \leq p \leq q$. Implica:

iii.1) max(max(p,q),r)
=max(q,r)=q.

iii.2) max(p,max(q,r))
=max(p,q)=q.

Por iii.1) y iii.2),

max(max(p,q),r)

=max(p,max(q,r)).

iv) $q \leq p \leq r$. Implica:

iv.1) max(max(p,q),r)

=max(p,r)=r.

iv.2) max(p,max(q,r))

=max(p,r)=r.

Por iv.1) y iv.2),

max(max(p,q),r)

=max(p,max(q,r)).

v) $q \leq r \leq p$. Implica:

v.1) max(max(p,q),r)

=max(p,r)=p.

v.2) max(p,max(q,r))

=max(p,r)=p.

Por v.1) y v.2),

max(max(p,q),r)

=max(p,max(q,r)).

vi) $r \leq q \leq p$. Implica:

vi.1) max(max(p,q),r)

=max(p,r)=p.

vi.2) max(p,max(q,r))

=max(p,q)=p.

Por vi.1) y vi.2),

max(max(p,q),r)

=max(p,max(q,r)).

Por i), ii), iii),iv), v) y vi),

max(max(p,q),r)

=max(p,max(q,r)).

b)

i) $p \leq q \leq r$. Implica:

i.1) $\min(\min(p,q),r)$
$=\min(p,r)=p$.

i.2) $\min(p,\min(q,r))$
$=\min(p,q)=p$.

Por i.1) y i.2),
$\min(\min(p,q),r)$
$=\min(p,\min(q,r))$.

ii) $p \leq r \leq q$. Implica:

ii.1) $\min(\min(p,q),r)$
$=\min(p,r)=p$.

ii.2) $\min(p,\min(q,r))$
$=\min(p,r)=p$.

Por ii.1) y ii.2),
$\min(\min(p,q),r)$
$=\min(p,\min(q,r))$.

iii) $r \leq p \leq q$. Implica:

iii.1) $\min(\min(p,q),r)$
$=\min(p,r)=r$.

iii.2) $\min(p,\min(q,r))$
$=\min(p,r)=r$.

Por iii.1) y iii.2),
$\min(\min(p,q),r)$
$=\min(p,\min(q,r))$.

iv) $q \leq p \leq r$. Implica:

iv.1) $\min(\min(p,q),r)$
$=\min(q,r)=q$.

iv.2) $\min(p,\min(q,r))$

=min(p,q)=q.

Por iv.1) y iv.2),

min(min(p,q),r)

=min(p,min(q,r)).

v) $q \leq r \leq p$. Implica:

v.1) min(min(p,q),r)

=min(q,r)=q.

v.2) min(p,min(q,r))

=min(p,q)=q.

Por v.1) y v.2),

min(min(p,q),r)

=min(p,min(q,r)).

vi) $r \leq q \leq p$. Implica:

vi.1) min(min(p,q),r)

=min(q,r)=r.

vi.2) min(p,min(q,r))

=min(p,r)=r.

Por vi.1) y vi.2),

min(min(p,q),r)

=min(p,min(q,r)).

Por i), ii), iii), iv), v) y vi),

min(min(p,q),r)

=min(p,min(q,r)).□

L3

a) max(p,min(q,r))=min(max(p,q),max(p,r)).

b) min(p,max(q,r))=max(min(p,q),min(p,r)).

Demostración

a)

i) $p \leq q \leq r$. Implica:

i.1) $\min(q,r)=q$ y

$p \leq q$. Implica,

$\max(p,\min(q,r))=q$.

i.2) $\max(p,q)=q$,

$\max(p,r)=r$ y

$q \leq r$. Implica,

$\min(\max(p,q),\max(p,r))=q$.

Por i.1) y i.2),

$\max(p,\min(q,r))$

$=\min(\max(p,q),\max(p,r))$.

ii) $p \leq r \leq q$. Implica:

ii.1) $\min(q,r)=r$ y

$p \leq r$. Implica,

$\max(p,\min(q,r))=r$.

ii.2) $\max(p,q)=q$,

$\max(p,r)=r$ y

$r \leq q$. Implica,

$\min(\max(p,q),\max(p,r)=r$.

Por ii.1) y ii.2),

$\max(p,\min(q,r))$

$=\min(\max(p,q),\max(p,r))$.

iii) $q \leq p \leq r$. Implica:

iii.1) $\min(q,r)=q$ y

$q \leq p$. Implica,

$\max(p,\min(q,r))=p$.

iii.2) $\max(p,q)=p$,

$\max(p,r)=r$ y

$p \leq r$. Implica,

$\min(\max(p,q),\max(p,r))=p$.

Por iii.1) y iii.2),

$\max(p,\min(q,r))$

$=\min(\max(p,q),\max(p,r))$.

iv) $q \leq r \leq p$. Implica:

iv.1) $\min(q,r)=q$ y

$q \leq p$. Implica,

$\max(p,\min(q,r))=p$.

iv.2) $\max(p,q)=p$ y

$\max(p,r)=p$. Implica,

$\min(\max(p,q),\max(p,r))=p$.

Por iv.1) y iv.2),

$\max(p,\min(q,r))$

$=\min(\max(p,q),\max(p,r))$.

v) $r \leq p \leq q$. Implica:

v.1) $\min(q,r)=r$ y

$r \leq p$. Implica,

$\max(p,\min(q,r))=p$.

v.2) $\max(p,q)=q$,

$\max(p,r)=p$ y

$p \leq q$. Implica,

$\min(\max(p,q),\max(p,r))=p$.

Por v.1) y v.2),

$\max(p,\min(q,r))$

$=\min(\max(p,q),\max(p,r))$.

vi) $r \leq q \leq p$. Implica:

vi.1) $\min(q,r)=r$ y

$r \leq p$. Implica,

max(p,min(q,r))=p.

vi.2) max(p,q)=p y

max(p,r)=p. Implica,

min(max(p,q),max(p,r))=p.

Por vi.1) y vi.2),

max(p,min(q,r))

=min(max(p,q),max(p,r)).

Por i), ii), iii), iv), v) y vi),

max(p,min(q,r))

=min(max(p,q),max(p,r)).

b)

i) p≤q≤r. Implica:

i.1) max(q,r)=r y

p≤r. Implica,

min(p,max(q,r))=p.

i.2) min(p,q)=p y

min(p,r)=p. Implica,

max(min(p,q),min(p,r))=p.

Por i.1) y i.2)

min(p,max(q,r))

=max(min(p,q),min(p,r)).

ii) p≤r≤q. Implica:

ii.1) max(q,r)=q y

p≤q. Implica,

min(p,max(q,r))=p.

ii.2) min(p,q)=p y

min(p,r)=p. Implica,

max(min(p,q),min(p,r))=p.

Por ii.1) y ii.2),

min(p,max(q,r))

=max(min(p,q),min(p,r)).

$q \leq p \leq r$. Implica:

iii.1) max(q,r)=r y

$p \leq r$. Implica,

min(p,max(q,r))=p.

iii.2) min(p,q)=q,

min(p,r)=p y $q \leq p$. Implica,

max(min(p,q),min(p,r))=p.

Por iii.1) y iii.2),

min(p,max(q,r))

=max(min(p,q),min(p,r)).

iv) $q \leq r \leq p$. Implica:

iv.1) max(q,r)=r y

$r \leq p$. Implica,

min(p,max(q,r))=r.

iv.2) min(p,q)=q,

min(p,r)=r y $q \leq r$. Implica,

max(min(p,q),min(p,r))=r.

Por iv.1) y iv.2),

min(p,max(q,r))

=max(min(p,q),min(p,r)).

v) $r \leq p \leq q$. Implica:

v.1) max(q,r)=q y

$p \leq q$. Implica,

min(p,max(q,r))=p.

v.2) min(p,q)=p,

min(p,r)=r y $r \leq p$. Implica,

max(min(p,q),min(p,r))=p.

Por v.1) y v.2),

min(p,max(q,r))

=max(min(p,q),min(p,r)).

vi) $r \leq q \leq p$. Implica:

vi.1) max(q,r)=q y

$q \leq p$. Implica,

min(p,max(q,r))=q.

vi.2) min(p,q)=q,

min(p,r)=r y

$r \leq q$. Implica,

max(min(p,q),min(p,r))=q.

Por vi.1) y vi.2),

min(p,max(q,r))

=max(min(p,q),min(p,r)).

Por i), ii), iii), iv), v) y vi),

min(p,max(q,r))

=max(min(p,q),min(p,r)).□

L4

a) max(min(p,r-q),min(r-p,q))=min(max(p,q),max(r-p,r-q)).

b) min(max(p,r-q),max(r-p,q))=max(min(p,q),min(r-p,r-q)).

Demostración

a)

i) $p \leq q$ y $p+q \leq r$. Implica:

i.1)

i.1.1)

i.1.1.1) $p \leq r-q$,

min(p,r-q)=p.

i.1.1.2) $q \leq r-p$,

$\min(r-p,q)=q$.

Por i.1.1.1) y i.1.1.2),

$\max(\min(p,r-q),\min(r-p,q))$

$=\max(p,q)$.

i.1.2) $\max(p,q)=q$.

Por i.1.1) y i.1.2),

$\max(\min(p,r-q),\min(r-p,q))$

$=q$.

i.2)

i.2.1)

i.2.1.1) $\max(p,q)=q$.

i.2.1.2) $-q \leq -p$,

$r-q \leq r-p$,

$\max(r-p,r-q)=r-p$.

Por i.2.1.1) y i.2.1.2),

$\min(\max(p,q),\max(r-p,r-q))$

$=\min(r-p,q)$.

i.2.2) $q \leq r-p$,

$\min(r-p,q)=q$.

Por i.2.1) y i.2.2),

$\min(\max(p,q),\max(r-p,r-q))$

$=q$.

Por i.1) y i.2),

$\max(\min(p,r-q),\min(r-p,q))$

$=\min(\max(p,q),\max(r-p,r-q))$.

ii) $p \leq q$ y $r \leq p+q$. Implica:

ii.1)

ii.1.1)

ii.1.1.1) $r-q \leq p$,

$\max(p,r-q)=r-q$.

ii.1.1.2) $r-p \leq q$,

$\min(r-p,q)=r-p$.

Por ii.1.1.1) y ii.1.1.2),

$\max(\min(p,r-q),\min(r-p,q))$

$=\max(r-p,r-q)$.

ii.1.2) $-q \leq -p$,

$r-q \leq r-p$,

$\max(r-p,r-q)= r-p$.

Por ii.1.1) y ii.1.2),

$\max(\min(p,r-q),\min(r-p,q))$

$=r-p$.

ii.2)

ii.2.1)

ii.2.1.1) $\max(p,q)=q$.

ii.2.1.2) $-q \leq -p$,

$r-q \leq r-p$,

$\max(r-p,r-q)=r-p$.

Por ii.2.1.1) y ii.2.1.2),

$\min(\max(p,q),\max(r-p,r-q))$

$=\min(r-p,q)$.

ii.2.2) $r-p \leq q$,

$\min(r-p,q)=r-p$.

Por ii.2.1) y ii.2.2),

$\min(\max(p,q),\max(r-p,r-q))$

$=r-p$.

Por ii.1) y ii.2),

$\max(\min(p,r-q),\min(r-p,q))$

$=\min(\max(p,q),\max(r-p,r-q))$.

iii) $q\leq p$ y $p+q\leq r$. Implica:

iii.1)

iii.1.1)

iii.1.1.1) $p\leq r-q$,

$\min(p,r-q)=p$.

iii.1.1.2) $q\leq r-p$,

$\min(r-p,q)=q$.

Por iii.1.1.1) y iii.1.1.2),

$\max(\min(p,r-q),\min(r-p,q))$

$=\max(p,q)$.

iii.1.2) $\max(p,q)=p$.

Por iii.1.1) y iii.1.2),

$\max(\min(p,r-q),\min(r-p,q))$

$=p$.

iii.2)

iii.2.1)

iii.2.1.1) $\max(p,q)=p$.

iii.2.1.2) $-p\leq -q$,

$r-p\leq r-q$,

$\max(r-p,r-q)=r-q$.

Por iii.2.1.1) y iii.2.1.2),

$\min(\max(p,q),\max(r-p,r-q))$

$=\min(p,r-q)$.

iii.2.2) $p\leq r-q$,

$\min(p,r-q)=p$.

Por iii.2.1) y iii.2.2),

$\min(\max(p,q),\max(r-p,r-q))$

$=p$.

Por iii.1) y iii.2),

max(min(p,r-q),min(r-p,q))

=min(max(p,q),max(r-p,r-q)).

iv) $q \leq p$ y $r \leq p+q$. Implica:

iv.1)

iv.1.1)

iv.1.1.1) $r-q \leq p$,

min(p,r-q)=r-q.

iv.1.1.2) $r-p \leq q$,

min(r-p,q)=r-p.

Por iv.1.1.1) y iv.1.1.2),

max(min(p,r-q),min(r-p,q))

=max(r-p,r-q).

iv.1.2) $-p \leq -q$,

$r-p \leq r-q$,

max(r-p,r-q)=r-q.

Por iv.1.1) y iv.1.2),

max(min(p,r-q),min(r-p,q))

=r-q.

iv.2)

iv.2.1)

iv.2.1.1) max(p,q)=p.

iv.2.1.2) $-p \leq -q$,

$r-p \leq r-q$,

max(r-p,r-q)=r-q.

Por ii.2.1.1) y ii.2.1.2),

min(max(p,q),max(r-p,r-q))

=min(p,r-q).

iv.2.2) $r-q \leq p$,

min(p,r-q)=r-q.

Por iv.2.1) y iv.2.2),

min(max(p,q),max(r-p,r-q))

=r-q.

Por iv.1) y iv.2),

max(min(p,r-q),min(r-p,q))

=min(max(p,q),max(r-p,r-q)).

Por i), ii), iii) y iv),

max(min(p,r-q),min(r-p,q))

=min(max(p,q),max(r-p,r-q)).

b)

i) $p \leq q$ y $p+q \leq r$. Implica:

i.1)

i.1.1)

i.1.1.1) $p \leq r-q$,

max(p,r-q)=r-q.

i.1.1.2) $q \leq r-p$,

max(r-p,q)=r-p.

Por i.1.1.1) y i.1.1.2),

min(max(p,r-q),max(r-p,q))

=min(r-p,r-q).

i.1.2) $-q \leq -p$,

$r-q \leq r-p$,

min(r-p,r-q)= r-q.

Por i.1.1) y i.1.2),

min(max(p,r-q),max(r-p,q))

=r-q.

i.2)

i.2.1)

i.2.1.1) $\min(p,q)=p$.

i.2.1.2) $-q\leq -p$,

$r-q\leq r-p$,

$\min(r-p,r-q)=r-q$.

Por i.2.1.1) y i.2.1.2),

$\max(\min(p,q),\min(r-p,r-q))$

$=\max(p,r-q)$.

i.2.2) $p\leq r-q$,

$\max(p,r-q)=r-q$.

Por i.2.1) y i.2.2),

$\max(\min(p,q),\min(r-p,r-q))$

$=r-q$.

Por i.1) y i.2),

$\min(\max(p,r-q),\max(r-p,q))$

$=\max(\min(p,q),\min(r-p,r-q))$.

ii) $p\leq q$ y $r\leq p+q$. Implica:

ii.1)

ii.1.1)

ii.1.1.1) $r-q\leq p$,

$\max(p,r-q)=p$.

ii.1.1.2) $r-p\leq q$,

$\max(r-p,q)=q$.

Por ii.1.1.1) y ii.1.1.2),

$\min(\max(p,r-q),\max(r-p,q))$

$=\min(p,q)$.

ii.1.2) $\min(p,q)=p$.

Por ii.1.1) y ii.1.2),

$\min(\max(p,r-q),\max(r-p,q))$

$=p$.

ii.2)

ii.2.1)

ii.2.1.1) $\min(p,q)=p$.

ii.2.1.2) $-q\leq -p$,

$r-q\leq r-p$,

$\min(r-p,r-q)=r-q$.

Por ii.2.1.1) y ii.2.1.2),

$\max(\min(p,q),\min(r-p,r-q))$

$=\max(p,r-q)$.

ii.2.2) $r-q\leq p$,

$\max(p,r-q)=p$.

Por ii.2.1) y ii.2.2),

$\max(\min(p,q),\min(r-p,r-q))$

$=p$.

Por ii.1) y ii.2),

$\min(\max(p,r-q),\max(r-p,q))$

$=\max(\min(p,q),\min(r-p,r-q))$.

iii) $q\leq p$ y $p+q\leq r$. Implica:

iii.1)

iii.1.1)

iii.1.1.1) $p\leq r-q$,

$\max(p,r-q)=r-q$.

iii.1.1.2) $q\leq r-p$,

$\max(r-p,q)=r-p$.

Por iii.1.1.1) y iii.1.1.2),

$\min(\max(p,r-q),\max(r-p,q))$

$=\min(r-p,r-q)$.

iii.1.2) $-p\leq -q$,

$r-p\leq r-q$,

min(r-p,r-q)=r-p.

Por iii.1.1) y iii.1.2),

min(max(p,r-q),max(r-p,q))

=r-p.

iii.2)

iii.2.1)

iii.2.1.1) min(p,q)=q.

iii.2.1.2) -p≤-q,

r-p≤r-q,

min(r-p,r-q)=r-p.

Por iii.2.1.1) y iii.2.1.2),

max(min(p,q),min(r-p,r-q))

=max(r-p,q).

iii.2.2) q≤r-p,

max(r-p,q)=r-p.

Por iii.2.1) y iii.2.2),

max(min(p,q),min(r-p,r-q))

=r-p.

Por iii.1) y iii.2),

min(max(p,r-q),max(r-p,q))

=max(min(p,q),min(r-p,r-q)).

iv) q≤p y r≤p+q. Implica:

iv.1)

iv.1.1)

iv.1.1.1) r-q≤p,

max(p,r-q)=p.

iv.1.1.2) r-p≤q,

max(r-p,q)=q.

Por iv.1.1.1) y iv.1.1.2),

min(max(p,r-q),max(r-p,q))
=min(p,q).

iv.1.2) min(p,q)=q.
Por iv.1.1) y iv.1.2),
min(max(p,r-q),max(r-p,q))
=q.

iv.2)

iv.2.1)

iv.2.1.1) min(p,q)=q.

iv.2.1.2) -p≤-q,
r-p≤r-q,
min(r-p,r-q)=r-p.
Por ii.2.1.1) y ii.2.1.2),
max(min(p,q),min(r-p,r-q))
=max(r-p,q).

iv.2.2) r-p≤q,
max(r-p,q)=q.
Por iv.2.1) y iv.2.2),
max(min(p,q),min(r-p,r-q))
=q.
Por iv.1) y iv.2),
min(max(p,r-q),max(r-p,q))
=max(min(p,q),min(r-p,r-q)).
Por i), ii), iii) y iv),
min(max(p,r-q),max(r-p,q))
=max(min(p,q),min(r-p,r-q)).□

L5

a) max(p,min(p,q))=p.

b) min(p,max(p,q))=p.

Demostración

a)

i) $p \leq q$. Implica,

max(p,min(p,q))

=max(p,p)=p.

ii) $q \leq p$. Implica,

max(p,min(p,q))

=max(p,q)=p.

Por i) y ii),

max(p,min(p,q))=p.

b)

i) $p \leq q$. Implica,

min(p,max(p,q))

=min(p,q)=p.

ii) $q \leq p$. Implica,

min(p,max(p,q))

=min(p,q)=p.

Por i) y ii),

min(p,max(p,q))=p.□

b) Un lema más sobre números reales

Cualesquiera números reales $p_0, ..., p_m$, cumplen las siguientes propiedades.

L6

a) $\max(\max(p_0,...,p_i),\max(p_{i+1},...,p_m))=\max(p_0,...,p_m)$.

b) $\min(\min(p_0,...,p_i),\min(p_{i+1},...,p_m))=\min(p_0,...,p_m)$.

Demostración

a) Sea $p=\max(p_0,...,p_i)$ y

$q=\max(p_{i+1},...,p_m)$,

$p_j \leq p$ para $j=0,...,i$, y

$p_j \leq q$ para $j=i+1,...,m$, tal que

$p,q \in \{p_0,...,p_m\}$. Implica:

Para $p \leq q$:

i.1) $\max(\max(p_0,...,p_i),\max(p_{i+1},...,p_m))$

$=\max(p,q)$

$=q$.

i.2) $p_j \leq q$ para $j=0,...,m$,

$\max(p_0,...,p_m)$

$=q$.

Por i.1) y i.2),

$\max(\max(p_0,...,p_i),\max(p_{i+1},...,p_m))$

$=\max(p_0,...,p_m)$.

ii) Para $q \leq p$:

ii.1) $\max(\max(p_0,...,p_i(,\max(p_{i+1},...,p_m))$

$=\max(p,q)$

$=p$.

ii.2) $p_j \leq p$ para $j=0,...,m$,

$\max(p_0,...,p_m)$

$=p$.

Por ii.1) y ii.2),

$\max(\max(p_0,...,p_i),\max(p_{i+1},...,p_m))$

$=\max(p_0,...,p_m)$.

Por i) y ii),

$\max(\max(p_0,...,p_i),\max(p_{i+1},...,p_m))$

$=\max(p_0,...,p_m)$.

b) Sea $p=\min(p_0,...,p_i)$ y

$q=\min(p_{i+1},...,p_m)$,

$p\leq p_j$ para $j=0,...,i$, y

$q\leq p_j$ para $j=i+1,...,m$, tal que

$p,q\in\{p_0,...,p_m\}$. Implica:

i) Para $p\leq q$:

i.1) $\min(\min(p_0,...,p_i),\min(p_{i+1},...,p_m))$

$=\min(p,q)$

$=p$.

i.2) $p\leq p_j$ para $j=0,...,m$,

$\min(p_0,...,p_m)$

$=p$.

Por i.1) y i.2),

$\min(\min(p_0,...,p_i),\min(p_{i+1},...,p_m))$

$=\min(p_0,...,p_m)$.

ii) Para $q\leq p$:

ii.1) $\min(\min(p_0,...,p_i),\min(p_{i+1},...,p_m))$

$=\min(p,q)$

$=q$.

ii.2) $q\leq p_j$ para $j=0,...,m$,

$\min(p_0,...,p_m)$

$=q$.

Por ii.1) y ii.2),

$\min(\min(p_0,...,p_i),\min(p_{i+1},...,p_m))$

$=\min(p_0,...,p_m)$.

Por i) y ii),

$\min(\min(p_0,...,p_i),\min(p_{i+1},...,p_m))$

$=\min(p_0,...,p_m)$.□

Apéndice C

Tabla de plausibilidad de LP_8

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	8	0	0	8	8
0	0	8	0	1	8	7
0	2	8	0	2	8	6
0	3	8	0	3	8	5
0	4	8	0	4	8	4
0	5	8	0	5	8	3
0	6	8	0	6	8	2
0	7	8	0	7	8	1
0	0	8	0	8	8	0
1	0	7	0	1	7	7
1	1	7	1	1	7	7
1	2	7	1	2	7	6
1	3	7	1	3	7	5
1	4	7	1	4	7	4
1	5	7	1	5	7	3
1	6	7	1	6	7	2
1	7	7	1	7	7	1
1	8	7	1	8	8	1
2	0	6	0	2	6	6
2	1	6	1	2	6	6
2	2	6	2	2	6	6
2	3	6	2	3	6	5
2	4	6	2	4	6	4
2	5	6	2	5	6	3

2	6	6	2	6	6	2
2	7	6	2	7	7	2
2	8	6	2	8	8	2
3	0	5	0	3	5	8
3	1	5	1	3	5	7
3	2	5	2	3	5	6
3	3	5	3	3	5	5
3	4	5	3	4	5	4
3	5	5	3	5	5	3
3	6	5	3	6	6	3
3	7	5	3	7	7	3
3	8	5	3	8	8	3
4	0	4	0	4	4	4
4	1	4	1	4	4	4
4	2	4	2	4	4	4
4	3	4	3	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4
4	5	4	4	5	5	4
4	6	4	4	6	6	4
4	7	4	4	7	7	4
4	8	4	4	8	8	4
5	0	3	0	5	4	4
5	1	3	1	5	4	4
5	2	3	2	5	4	4
5	3	3	3	5	4	4
5	4	3	4	5	4	4
5	5	3	5	5	5	5
5	6	3	5	6	6	5
5	7	3	5	7	7	5

5	8	3	5	8	8	5
6	0	2	0	6	2	2
6	1	2	1	6	2	2
6	2	2	2	6	2	2
6	3	2	3	6	3	3
6	4	2	4	6	4	4
6	5	2	5	6	5	5
6	6	2	6	6	6	6
6	7	2	6	7	7	6
6	8	2	6	8	8	6
7	0	1	0	7	1	1
7	1	1	1	7	1	1
7	2	1	2	7	2	2
7	3	1	3	7	3	3
7	4	1	4	7	4	4
7	5	1	5	7	5	5
7	6	1	6	7	6	6
7	7	1	7	7	7	7
7	8	1	7	8	8	7
8	0	0	0	8	8	1
8	1	0	1	8	8	1
8	2	0	2	8	8	2
8	3	0	3	8	8	3
8	4	0	4	8	8	4
8	5	0	5	8	8	5
8	6	0	6	8	8	6
8	7	0	7	8	8	7
8	8	0	8	8	8	8

Apéndice D

Tabla de plausibilidad de LP_{10}

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	10	0	0	10	10
0	1	10	0	1	10	9
0	2	10	0	2	10	8
0	3	10	0	3	10	7
0	4	10	0	4	10	6
0	5	10	0	5	10	5
0	6	10	0	6	10	4
0	7	10	0	7	10	3
0	8	10	0	8	10	2
0	9	10	0	9	10	1
0	10	10	0	10	10	0
1	0	9	0	1	9	9
1	1	9	1	1	9	9
1	2	9	1	2	9	8
1	3	9	1	3	9	7
1	4	9	1	4	9	6
1	5	9	1	5	9	5
1	6	9	1	6	9	4
1	7	9	1	7	9	3
1	8	9	1	8	9	2
1	9	9	1	9	9	1
1	10	9	1	10	9	1

2	0	8	0	2	8	8
2	1	8	1	2	8	8
2	2	8	2	2	8	8
2	3	8	2	3	8	7
2	4	8	2	4	8	6
2	5	8	2	5	8	5
2	6	8	2	6	8	4
2	7	8	2	7	8	3
2	8	8	2	8	8	2
2	9	8	2	9	9	2
2	10	8	2	10	10	2
3	0	7	0	7	7	7
3	1	7	1	7	7	7
3	2	7	2	7	7	7
3	3	7	3	7	7	7
3	4	7	3	7	7	6
3	5	7	3	7	7	5
3	6	7	3	7	7	4
3	7	7	3	7	7	3
3	8	7	3	8	8	3
3	9	7	3	9	9	3
3	10	7	3	10	10	3
4	0	6	0	4	6	6
4	1	6	1	4	6	6
4	2	6	2	4	6	6
4	3	6	3	4	6	6

4	4	6	4	4	6	6
4	5	6	4	5	6	5
4	6	6	4	6	6	4
4	7	6	4	7	7	4
4	8	6	4	8	8	4
4	9	6	4	9	9	4
4	10	6	4	10	10	4
5	0	5	0	5	5	5
5	1	5	1	5	5	5
5	2	5	2	5	5	5
5	3	5	3	5	5	5
5	4	5	4	5	5	5
5	5	5	5	5	5	5
5	6	5	5	6	6	5
5	7	5	5	7	7	5
5	8	5	5	8	8	5
5	9	5	5	9	9	5
5	10	5	5	10	10	5
6	0	4	0	6	4	4
6	1	4	1	6	4	4
6	2	4	2	6	4	4
6	3	4	3	6	4	4
6	4	4	4	6	4	4
6	5	4	5	6	5	5
6	6	4	6	6	6	6
6	7	4	6	7	7	6

6	8	4	6	8	8	6
6	9	4	6	9	9	6
6	10	4	6	10	10	6
7	0	3	0	7	3	3
7	1	3	1	7	3	3
7	2	3	2	7	3	3
7	3	3	3	7	3	3
7	4	3	4	7	4	4
7	5	3	5	7	5	5
7	6	3	6	7	6	6
7	7	3	7	7	7	7
7	8	3	7	8	8	7
7	9	3	7	9	9	7
7	10	3	7	10	10	7
8	0	2	0	8	2	2
8	1	2	1	8	2	2
8	2	2	2	8	2	2
8	3	2	3	8	3	3
8	4	2	4	8	4	4
8	5	2	5	8	5	5
8	6	2	6	8	6	6
8	7	2	7	8	7	7
8	8	2	8	8	8	8
8	9	2	8	9	9	8
8	10	2	8	10	10	8
9	0	1	0	9	1	1

9	1	1	1	9	1	1
9	2	1	2	9	2	2
9	3	1	3	9	3	3
9	4	1	4	9	4	4
9	5	1	5	9	5	5
9	6	1	6	9	6	6
9	7	1	7	9	7	7
9	8	1	8	9	8	8
9	9	1	9	9	9	9
9	10	1	9	10	10	9
10	0	0	0	10	0	0
10	1	0	1	10	1	1
10	2	0	2	10	2	2
10	3	0	3	10	3	3
10	4	0	4	10	4	4
10	5	0	5	10	5	5
10	6	0	6	10	6	6
10	7	0	7	10	7	7
10	8	0	8	10	8	8
10	9	0	9	10	9	9
10	10	0	10	10	10	10