UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FRANCISCO MORAZÁN

VICERRECTORIA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

DIRECCIÓN DE POSTGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

TESIS DE MAESTRÍA

SIGNIFICANDO EL PASO AL LÍMITE EN ESTUDIANTES QUE INICIAN CÁLCULO

TESISTA

LICENCIADO MARVIN ROBERTO MENDOZA VALENCIA

ASESOR(A) DE TESIS

DRA. LEONORA DÍAZ MORENO

Tegucigalpa, M.D.C. Marzo 2013

SIGNIFICANDO EL PASO AL LÍMITE EN ESTUDIANTES QUE INICIAN CÁLCULO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FRANCISCO MORAZÁN

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

DIRECCIÓN DE POSTGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

SIGNIFICANDO EL PASO AL LÍMITE EN ESTUDIANTES QUE INICIAN CÁLCULO

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MÁSTER EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

TESISTA

LICENCIADO MARVIN ROBERTO MENDOZA VALENCIA

ASESOR(A) DE TESIS

DRA. LEONORA DÍAZ MORENO

Tegucigalpa, M.D.C. Marzo 2013

M.Sc. **DAVID ORLANDO MARÍN LÓPEZ.**
Rector

M.Sc. **HERMES ALDUVÍN DÍAZ LUNA**
Vicerrector Académico

M.Sc. **RAFAEL BARAHONA LÓPEZ.**
Vicerrector Administrativo

Ph.D. **YENNY AMINDA EGUIGURE TORRES.**
Vicerrectora de Investigación y Postgrado

M.Sc. **GUSTAVO ADOLFO CERRATO PAVÓN.**
Vicerrector del CUED

M.Sc. **CELFA IDALISIS BUESO FLORENTINO**.
Secretaria General

Ph.D. **JENNY MARGOTH ZELAYA MATAMOROS.**
Directora de postgrado

Tegucigalpa, M.D.C. Marzo 2013

Esta tesis fue aceptada y aprobada por la terna examinadora nombrada por la Dirección de Estudios de Postgrado de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, como requisito para optar al grado académico de Master en Matemática Educativa

Tegucigalpa, 5 de marzo 2013

Ph.D. Yenny Aminda Eguigure Torres
Examinador - presidente(a)

Dra. Leonora Díaz Moreno

Examinador(a)

Ph. D. Truman Bitelio Membreño

Examinador

Marvin Roberto Mendoza Valencia
Tesista

DEDICATORIA

Dedico este esfuerzo a:

Mis padres, quienes en todo momento han sido pilares en mi vida y fuente de inspiración.
A tres mujeres importantes en mi vida, tía Vilma gracias por estar allí cuando necesité su apoyo. A la memoria de mis abuelas, Julia Montoya y Cristobalina Pérez fueron las mejores.
A mis hermanos, que siempre han sido mis amigos.
A mis tíos, tías, primos y primas por su amistad, consejos y ayuda para conmigo.

AGRADECIMIENTOS

Mi agradecimiento a Dios porque ha estado conmigo en todo momento, me dio la fuerza necesaria para seguir adelante y me iluminó con su sabiduría para no perder de vista mi norte.
A las autoridades de la U.P.N.F.M en especial a las del Postgrado, al Ph.D. Adalid Gutiérrez, a los demás profesores del postgrado, a los compañeros de la V generación de Maestría en Matemática Educativa de la U.P.N.F.M.
A todas las demás personas, amigos, que estuvieron conmigo en todo momento y me dieron voz de aliento.

Mi especial agradecimiento, admiración y respeto

A la Doctora Leonora Díaz Moreno, quien con su amistad, apoyo y dirección oportuna en este trabajo hicieron realidad un sueño que se había quedado dormido.
Apoyo incondicional que a pesar de sus múltiples tareas académicas le dedicó tiempo, para que este proyecto se pudiera cristalizar.
Jorge, amigazo siempre estuviste para apoyarme a pesar de tu agenda llena.
Gracias por siempre, por formar parte de esta anhelada meta

ÍNDICE

DEDICATORIA **6**

AGRADECIMIENTOS **7**

ÍNDICE DE TABLAS **10**

ÍNDICE DE FIGURAS **11**

INTRODUCCIÓN **18**

CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA **21**

1.1. Delimitación Del Problema 21

1.2. Justificación Del Estudio 23

1.3. Objetivos 26

1.3.1. Objetivo General 26

1.3.2. Objetivos Específicos 26

1.4. Preguntas De Investigación 27

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO **28**

2.1. Algunas Investigaciones Realizadas Del Límite Matemático 28

2.2. Algo De Historia Acerca Del Límite 40

2.2.1. Etapas En La Construcción Histórica Del Límite 40

2.3. Infinito 44

2.4. Paso Al Límite 48

2.5. Representaciones Semióticas 51

2.5.1. Visualización 53

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN **56**

3.1. Tipos De Investigación 56

3.2. Participantes En El Proceso 56

3.3. Etapas Del Proceso 56

3.4. Metodología De Las Sesiones De Trabajo 56

3.5. Metodología Empleada En La Recolección De La Investigación 57

3.5.1. Etapa Diagnóstica 57
3.5.2. Etapa De Ejecución 62
3.6. Diseño De La Secuencia De Actividades 63
3.7. Procedimiento De Análisis 69
CAPÍTULO 4: ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS 70
4.1. Análisis De La Prueba Diagnóstica 70
4.2. Presentación Y Análisis De Las Actividades De La Secuencia 77
4.2.1. Presentación De La Actividad Uno 77
4.2.2. Presentación De La Actividad Dos 89
4.2.3. Presentación De La Actividad Tres 97
4.2.4. Presentación De La Actividad Cuatro 109
4.2.5. Presentación De La Actividad Cinco 118
4.2.6. Presentación De La Actividad Seis 128
4.2.7. Presentación De La Actividad Siete 135
4.2.8. Presentación De La Actividad Ocho 145
4.2.9. Presentación De La Actividad Nueve 152
CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES 161
5.1. Conclusiones 161
5.2. Recomendaciones 164
BIBLIOGRAFÍA 166
GLOSARIO 175
ANEXOS 182
ANEXO N° 1: Prueba Diagnóstica 182
ANEXO N° 2: Actividades Implementadas 186
ANEXO N° 3: Producciones Estudiantiles Por Actividad 195
ANEXO N° 4: Etapas Complementarias De La Evolución Del Límite 233
ANEXO N° 5: Demostración De La No Numerabilidad De IR 242

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla N° 1: Períodos históricos de la evolución del concepto de límite. 38
Tabla N° 2: Diferentes concepciones del paso al límite a lo largo de la historia. 50
Tabla N° 3: Contrastes entre subgrupo de actividades, temática, propósitos y habilidades a desplegar en la prueba diagnóstica. 58
Tabla N° 4: Grupo de actividades de la secuencia desarrollada. 64
Tabla N° 5: Contrastes entre subgrupo de actividades, temática, propósitos y habilidades cognitivas de las mismas. 66
Tabla N° 6: Contrastes entre subgrupo de actividades, temática y tipo de pensamiento matemático. 68
Tabla N° 7: Resultados de los ítems 1-5 de la prueba diagnóstica aplicada. 71
Tabla N° 8: Resultados de ítems 6 y 7 de la prueba diagnóstica. 72
Tabla N° 9: Resultados del ítem 8 de la prueba diagnóstica. 73
Tabla N° 10: Resultado de ítem 9 de la prueba diagnóstica. 74
Tabla N° 11: Resultado de ítem 10 de la prueba diagnóstica. 75
Tabla N° 12: Resultado de ítems 10 y 11 de la prueba diagnóstica. 76
Tabla N° 13: Magnitudes de cuadrados obtenidos por grupo uno en actividad uno. 78
Tabla N° 14: Magnitudes de hexágonos obtenidos por grupo uno en la actividad tres. 99
Tabla N° 15: Magnitudes de los hexágonos obtenidos por grupo tres en actividad tres. 104
Tabla N° 16: Resumen de magnitudes de semicircunferencias calculadas por grupo uno en actividad cinco. 119
Tabla N° 17: Resumen de magnitudes de las semicircunferencias obtenidas por grupo tres en actividad cinco. 123
Tabla N° 18: Cálculo de las longitudes de los lados de la espiral a) realizada por grupo tres en actividad siete. 140

Tabla N° 19: Cálculo de las longitudes de la espiral b) realizada por grupo cuatro en actividad siete.....140

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura N° 1: Ilustración del método exhaustivo con diferentes polígonos para hallar el área del círculo, la longitud de la circunferencia y, como consecuencia, el número pi.....42

Figura N° 2: Ilustración del método exhaustivo con diferentes polígonos entre el registro geométrico y el algebraico.....79

Figura N° 3: Cálculo de la suma de las áreas de los cuadrados obtenidos por grupo uno en actividad uno.....80

Figura N° 4: Conclusión mediante registro de lenguaje natural de grupo uno en actividad uno.....81

Figura N° 5: Cálculo del valor de la hipotenusa obtenida por grupo dos en actividad uno.....82

Figura N° 6: Cálculo del valor de la suma de la serie geométrica obtenida por grupo dos en actividad uno.....82

Figura N° 7: Descomposición del cuadrado en triángulos realizada por grupo tres en actividad uno.....84

Figura N° 8: Articulación entre registros geométrico y aritmético presentada por grupo tres en la actividad uno.....84

Figura N° 9: Conclusiones en diferentes registros del grupo cuatro referentes a la actividad uno.....87

Figura N° 10: Patrón de las áreas de las circunferencias observadas por el grupo uno en actividad tres.....90

Figura N° 11: Secuencia de las áreas de las circunferencias presentadas por el grupo uno en actividad dos.....90

Figura N° 12: Suma de las áreas de las infinitas circunferencias construidas obtenidas por grupo uno en actividad dos.....91

Figura N° 13: Circunferencias concéntricas y sus respectivos radios señalados por grupo tres en actividad dos 93
Figura N° 14: Secuencia de las áreas de las circunferencias calculadas por el grupo tres en actividad dos 93
Figura N° 15: Cálculo de la suma de las áreas de las circunferencias obtenida por el grupo tres en la actividad dos 94
Figura N° 16: Conclusiones de la actividad mediante registro verbal presentada por grupo cuatro en actividad dos 95
Figura N° 17: Patrón del área de circunferencias obtenida por el grupo cuatro en la actividad dos 96
Figura N° 18: Descomposición del hexágono en triángulos realizada por el grupo uno en actividad tres 98
Figura N° 19: Cálculo del área de los hexágonos obtenido por el grupo uno en actividad tres 100
Figura N° 20: Conclusiones de la actividad en registro verbal de grupo uno de actividad tres 101
Figura N° 21: Cálculo de la longitud de un lado de un triángulo por semejanza realizada por grupo dos en actividad tres 102
Figura N° 22: Cálculo de la razón y la suma de las áreas de los hexágonos obtenida por grupo dos en actividad tres 103
Figura N° 23: Cálculo de la razón y la suma de las áreas de los hexágonos obtenida por grupo tres en actividad tres 105
Figura N° 24: Conclusión con respecto a las áreas de los hexágonos en lenguaje natural por el grupo tres en actividad tres 105
Figura N° 25: Cálculo de longitudes y áreas de triángulos obtenida por grupo cuatro en actividad tres 106
Figura N° 26: Conclusiones mediante registro verbal del grupo cuatro en actividad tres 107

Figura N° 27: Sucesiones numéricas de las áreas de los triángulos expresada por grupo uno en actividad cuatro 110
Figura N° 28: Cálculo de patrones de las áreas de los triángulos obtenida por grupo uno en actividad cuatro 111
Figura N° 29: Cálculo de la razón y la suma de las áreas de los hexágonos obtenida por grupo uno en actividad cuatro 111
Figura N° 30: Conclusiones mediante registro verbal de grupo uno en actividad cuatro 111
Figura N° 31: Cálculo de las áreas de los triángulos obtenida por grupo dos en actividad cuatro 112
Figura N° 32: Cálculo de la razón y la suma de las áreas de los hexágonos obtenida por grupo dos en actividad cuatro 113
Figura N° 33: Conclusiones mediante registro verbal de grupo dos en actividad cuatro 113
Figura N° 34: Conclusiones mediante registro verbal de grupo tres en actividad cuatro 114
Figura N° 35: Conclusiones en diferentes registros con respecto a la suma de las áreas de los triángulos de grupo cuatro en actividad cuatro 116
Figura N° 36: Cálculo de la suma de áreas de las semicircunferencias obtenida por grupo uno en actividad cinco 120
Figura N° 37: Conclusión mediante registro verbal de la suma de las áreas de las semicircunferencias obtenida por grupo uno en actividad cinco 121
Figura N° 38: Cálculo de las áreas de semicircunferencias obtenidas por grupo dos en actividad cinco 122
Figura N° 39: Cálculo de las razones y áreas de las semicircunferencias obtenida por grupo dos en actividad cinco 122
Figura N° 40: Conclusiones mediante registro verbal de grupo dos en actividad cinco 123
Figura N° 41: Cálculo de la razón y de la suma de las semicircunferencias obtenida por grupo tres en actividad cinco 124
Figura N° 42: Conclusiones mediante registro verbal de grupo tres en actividad cinco 125

Figura N° 43: Semicircunferencias y sus diámetros presentados por grupo cuatro en actividad cinco 126
Figura N° 44: Cálculo de la razón y la suma de las áreas de las semicircunferencias obtenida por grupo cuatro en actividad cinco 126
Figura N° 45: Longitud de los lados de los cuadrados dibujados asignados por grupo uno en actividad seis 129
Figura N° 46: Cálculos aritméticos de las áreas de cuatro cuadrados realizados por grupo uno en actividad seis 129
Figura N° 47: Conclusiones mediante registro verbal por grupo uno de actividad seis 130
Figura N° 48: Conclusión mediante registro verbal por grupo dos de actividad seis 131
Figura N° 49: Cálculo del valor de la longitud del lado del último cuadrado obtenido por grupo tres en actividad seis 132
Figura N° 50: Conclusiones mediante registro verbal de grupo tres en actividad seis 132
Figura N° 51: Elementos asignados a la longitud de cuadrados por grupo cuatro en actividad seis 133
Figura N° 52: Cálculos basados en estrategia algebraica por grupo cuatro en actividad seis 133
Figura N° 53: Conclusiones mediante registro verbal de grupo cuatro en actividad seis 134
Figura N° 54: Cálculo del valor numérico de la primera espiral del grupo uno en actividad siete 136
Figura N° 55: Cálculo del valor numérico de la segunda espiral del grupo uno en actividad siete 136
Figura N° 56: Conclusiones en registro verbal de la primera espiral construida del grupo uno en actividad siete 137
Figura N° 57: Conclusiones en registro verbal de la segunda espiral construida del grupo uno en actividad siete 137
Figura N° 58: Diagrama de la primera espiral del grupo dos en actividad siete 138
Figura N° 59: Diagrama de la segunda espiral del grupo dos en actividad siete 138
Figura N° 60: Cálculo de la longitud de la primera espiral del grupo dos en actividad siete .138

Figura N° 61: Cálculo de la longitud de la segunda espiral del grupo dos en actividad siete 138
Figura N° 62: Conclusiones de la longitud de la primera espiral en registro verbal del grupo dos en actividad siete 139
Figura N° 63: Conclusiones de la longitud de la segunda espiral en registro verbal del grupo dos en actividad siete 139
Figura N° 64: Cálculo de la razón y de la suma de la longitud de la espiral a) construida por grupo tres en actividad siete 141
Figura N° 65: Cálculo de elementos de la primera espiral obtenida por grupo cuatro en actividad siete a) 142
Figura N° 66: Cálculo de elementos de la segunda espiral obtenida por grupo cuatro en actividad siete b) 142
Figura N° 67: Cálculo de la razón de la primera espiral obtenida por grupo cuatro en actividad siete 143
Figura N° 68: Cálculo de la razón de la segunda espiral obtenida por grupo cuatro en actividad siete 143
Figura N° 69: Conclusiones mediante registro verbal del grupo cuatro en actividad siete 143
Figura N° 70: Diagrama del recorrido de la hormiga realizado por grupo uno en actividad ocho 146
Figura N° 71: Cálculo de la distancia recorrida por hormiga por grupo uno en actividad ocho 146
Figura N° 72: Conclusiones mediante registro verbal por grupo uno en actividad ocho 147
Figura N° 73: Conclusiones mediante registro verbal por grupo dos en actividad ocho 148
Figura N° 74: Primera etapa del recorrido de la hormiga dibujada grupo tres en actividad ocho 148
Figura N° 75: Segunda etapa del recorrido de la hormiga dibujada por grupo tres en actividad ocho 149
Figura N° 76: Tercera etapa del recorrido de la hormiga dibujada por grupo tres en actividad ocho 149

Figura N° 77: Conclusiones mediante registro verbal presentadas por grupo tres en actividad ocho 149
Figura N° 78: Cálculo de diferentes magnitudes obtenidas por grupo cuatro en actividad ocho 150
Figura N° 79: Conclusiones realizadas con respecto a la razón de crecimiento del elástico por grupo cuatro en actividad ocho 151
Figura N° 80: Conclusiones mediante registro verbal realizadas por grupo cuatro de actividad ocho 151
Figura N° 81: Diagramas con diferentes magnitudes realizados por grupo uno de actividad nueve 153
Figura N° 82: Diferentes cálculos en registro aritmético obtenidos por grupo uno de actividad nueve 154
Figura N° 83: Cálculo de la distancia que recorren los trenes, obtenida por grupo uno de actividad nueve 154
Figura N° 84: Argumentos mediante registro verbal en torno a la distancia que recorren los móviles presentada por grupo dos en la actividad nueve 155
Figura N° 85: Conclusiones mediante registro verbal presentado por grupo dos en actividad nueve 155
Figura N° 86: Primera etapa del recorrido de los móviles dibujada por grupo tres en actividad nueve 156
Figura N° 87: Segunda etapa de los recorridos de los móviles dibujada por grupo tres en actividad nueve 156
Figura N° 88: Tercera etapa de los recorridos de los móviles dibujada por grupo tres en actividad nueve 157
Figura N° 89: Cuarta etapa de los recorridos de los móviles dibujada por grupo tres en actividad nueve 157
Figura N° 90: Quinta etapa del recorrido de los móviles dibujada por grupo tres en actividad nueve 158

Figura N° 91: Conclusiones mediante registro verbal por grupo tres en actividad nueve 158
Figura N° 92: Relaciones entre las magnitudes de los móviles presentada por grupo cuatro en actividad nueve 159
Figura N° 93: Conclusiones mediante registro verbal de grupo cuatro de actividad nueve ...159

INTRODUCCIÓN

Este estudio de investigación tiene su génesis en el deseo de contribuir con los procesos de enseñanza y de aprendizajes del cálculo, tomando en consideración la problemática que dichos procesos presentan, en lo referente a la construcción del pensamiento matemático superior. Se explora el paso al límite en estudiantes de primer ingreso a la universidad.

Es conocido que la enseñanza del cálculo constituye uno de los mayores desafíos de la educación terciaria actual, ya que su aprendizaje trae ligado dificultades relacionadas con un pensamiento de orden superior, en el cual se encuentran implicados procesos cognitivos tales como: abstracción, análisis, síntesis, visualización entre otros. Más específicamente debe abordar el desplazamiento de un pensamiento algebraico a uno analítico, de usar igualdades a usar aproximaciones. Para Artigue (1995) las dificultades en la enseñanza del cálculo provienen de a) la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo; b) la conceptualización y formalización de la noción de límite en el núcleo de su contenido y su tratamiento en la enseñanza; y, c) la ruptura álgebra / cálculo, la brecha entre el pensamiento analítico y el algebraico. También manifiesta que, en el cálculo, la actividad matemática se apoya en las competencias algebraicas, pero al mismo tiempo se requiere de una ruptura de una cierta cantidad de prácticas para poder acceder al dominio del cálculo. Legrand (1993) es uno de los investigadores que ha incursionado en estudiar acerca de las rupturas antes mencionadas sobre todo lo que involucra el nivel de tratamiento de la igualdad, al igual que el nivel de la forma de razonamientos.

En este estudio se presentan estrategias con que los estudiantes enfrentan el paso al límite, al desarrollar una secuencia de actividades orientada a ese fin, con recurso a distintas representaciones y a la articulación que estas requieren cuando cada una reporta distintas facetas de este objeto matemático. En el marco de un juego de registros se exploran entendimientos y despliegue de habilidades en lo que se refiere a interpretar, articular, visualizar y aplicar el paso al límite, en contextos de geometría sintética, de series geométrica.

Para lograr lo antedicho, se diseñó una secuencia de actividades para su desarrollo por los estudiantes. Estas actividades, por medio del conflicto cognitivo, promueven una construcción de significados para el paso al límite, a la vez que el recurso a la visualización.

El estudio exploró indicios de visualización que utilizan los estudiantes de cálculo I de UNAH-TEC Danlí en el paso al límite. También se observaron las dificultades que presentan los estudiantes al transitar entre registros semióticos y las articulaciones entre los registros que se evidencian en la actividad del paso al límite que utilizaron los estudiantes.
Se describen a continuación los capítulos que configuran el presente texto de tesis de maestría.

El capítulo I "Planteamiento del Problema" hace referencia a los aspectos generales de la investigación, tales como definición y delimitación del problema, justificación, objetivos y preguntas de investigación.

El capítulo II “Marco teórico “presenta los elementos teórico-conceptuales que dan marco a la investigación. Entre ellos la actividad de paso al límite y la evolución histórica de este, así como los juegos de registros y la visualización en la actividad matemática de los estudiantes.

El capítulo III “Metodología de la investigación” describe los aspectos del tipo de investigación, de las características de la población y la selección de la muestra; así como también la estructura de las diferentes actividades que se utilizan a lo largo del estudio.

El capítulo IV “Análisis e interpretación de resultados” toma los datos recabados en las diferentes sesiones de trabajo, levantando una relación entre dichos resultados y los objetivos del estudio.

En el capítulo V “Conclusiones y Recomendaciones”, con base en los objetivos de indagación del estudio y orientada por las preguntas de investigación, se realiza una interpretación de los resultados, obedeciendo a la relación resultados- objetivos.

Cierra el texto con las referencias bibliográficas consultadas en este estudio. Se añade un glosario, luego en anexos se presenta prueba diagnóstica, producciones estudiantiles, tercera y cuarta etapas de la evolución del límite matemático

CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Delimitación Del Problema

Esta investigación se pregunta por los procesos de aprendizaje del paso al límite de estudiantes del curso de **Cálculo I,** de la carrera de Ingeniería Agroindustrial de la Universidad Nacional Autónoma de Honduras (UNAH), en su sede regional de la ciudad de Danlí .La asignatura posee cinco unidades valorativas y cuenta con cinco horas de clases semanales en los períodos regulares (18 a 19 semanas) y con un período intensivo de diez horas semanales (durante nueve semanas). Las actividades desarrolladas en el marco del presente estudio se efectuaron en este período intensivo.

Por muchos años la enseñanza del cálculo se ha realizado de manera tradicional: definiciones, teoremas, ejercicios y problemas, presentando dificultades a maestros y a estudiantes. Sin embargo, la preocupación e inconformidad por la enseñanza tradicional y sus resultados ha originado diversos estudios que han focalizado su atención en uno o más de los vértices del triángulo didáctico, a saber, en la epistemología y deconstrucción de los objetos matemáticos, en diseños de enseñanza, en las prácticas docentes y/o en los procesos de entendimiento estudiantiles.

En particular, una enseñanza tradicional del límite no favorece el desarrollo de significados acerca de la comprensión del contenido y de su aplicabilidad.

Dada la poca interactividad profesor/estudiantes y estudiantes/estudiantes que se genera en ese tipo de enseñanza, la posibilidad de generarse debates en torno a la problemática del límite, se ve reducida, aspecto que poco contribuye para afianzar los significados asociados a este concepto.

Esta situación repercute de modo dramático en las carreras de Ingeniería, en donde es de suma importancia el manejo comprensivo del límite para su posterior aplicación en situaciones problemas, propias a su especificidad. A manera de ejemplo, en el uso de aproximaciones mediante la estimación de errores y en el modelamiento de cálculo de área y volúmenes de sólidos. En el caso de la carrera de **Ingeniería Agroindustrial, de la UNAH-TEC Danlí**, no se da una excepción a estos estragos. Los estudiantes no son capaces de reproducir de manera significativa los conocimientos supuestamente aprendidos y en su mayoría no muestran una apropiación significativa del concepto de límite.

El proyecto de tesis que se presenta pone su atención en la actividad matemática en ***el paso al límite.*** Para ello, se propone una secuencia de actividades que involucran diversos aspectos subyacentes en el paso al límite, con los cuales se busca que el estudiantado pueda acercarse al concepto en mención, de una manera más significativa, centrando el trabajo en el estudiante y en su desempeño, ante situaciones problema que le permitan afrontar desafíos y quiebres cognitivos.

Este proyecto de investigación inicia con las siguientes etapas: a) La primera denominada exploración **de los conocimientos preliminares.** Consistió en prueba diagnóstica diseñada para que los estudiantes reflejaran tanto saberes como habilidades, en torno a álgebra y geometría precedentes a la temática de límite. Los resultados de esta prueba a sirvieron como punto de partida para el diseño de la secuencia de actividades a implementar durante la investigación; b) La segunda, denominada **diseño de actividades de aprendizaje a implementar.** Consistió en una secuencia de actividades tendientes a marcar un itinerario que les permitiera a los estudiantes configurar significados para el paso al límite. La secuencia construida contempló el poner en escena las nociones de infinito potencial e infinito actual subyacentes al paso al límite que se estudian en esta investigación. El conjunto de

actividades diseñadas pretendió el desarrollo de competencias de pensamiento matemático superior en los estudiantes.

Contribuyeron al diseño de las actividades, los estudios experimentales de Cornu (1981,1994); Sierpinska (1985, 1987, 1988); Tall y Schwarzenberger (1978); Hitt y Paez (2001, 2003).

1.2. Justificación Del Estudio

Barallobes, Chemello, Crippa y Hanfling (2000), llaman la atención al problema de que la actividad matemática muchas veces, en el contexto escolar, no logra ser efectiva en los tipos de cuestiones en que se supone que ella debería promover el aprendizaje, limitándose, entonces, a promover el dominio formal de las técnicas y de los argumentos que la justificarían.

A ello no escapa la enseñanza del límite en cursos de iniciación al cálculo puesto que la enseñanza tradicional difundida en la mayoría de nuestras universidades se ha enfatizado en el saber formal y no en la comprensión significativa de este objeto matemático.

La enseñanza del concepto del límite ha descansado, tradicionalmente en dar énfasis aspectos algebraicos, de tipo algorítmico-procedimental; desarrollada a partir de la definición formal de límite, con ejemplos y algunas veces con contra ejemplos frecuentemente con funciones de tipo polinomial y en algunos casos, funciones de tipo racional o trigonométricas, relativamente sencillas. Diversidad de factores estarían concurriendo con el empleo de este tipo de modelo pedagógico seguido en la enseñanza.

Durante décadas se vienen desarrollando investigaciones en Análisis para distinguir causas de la no apropiación de los conceptos medulares del Cálculo. En el estado del arte descrito en apartados posteriores se presentan investigaciones al respecto. De manera particular Sierpinska (1985), Artigue (1995, 1998) y Cornu (1991) apuntan a la importancia de que los estudiantes logren articular los conceptos, poniendo en evidencia obstáculos propios del concepto y obstáculos relacionados con la didáctica.

Son numerosos los obstáculos que antes y después de la enseñanza manifiestan los alumnos respecto al concepto de paso al límite. Cornu (1983) en particular identifica: obstáculos epistemológicos obstáculos didácticos, obstáculos cognitivos.

Este autor expresa que existe una creencia generalizada sobre la simplicidad del proceso de enseñanza: el estudiantado grabaría lo que se le transmite quizás con alguna pérdida de información. En general esto no es así, puesto que los estudiantes construyen conocimientos que resultan no adecuados o erróneos. Vrancken, Gregorini, Engler, Müller y Hecklein (2009), sostienen que los conocimientos no se almacenan unos encima de otros. Para estas autoras, un aprendizaje significativo implica rupturas cognitivas y acomodaciones. La construcción del conocimiento no es un proceso continuo, surge de desequilibrios, rupturas de conocimientos anteriores y reconstrucciones. Desde la perspectiva de las autoras se puede afirmar, que todo aprendizaje significativo supone una construcción que se realiza a través de procesos complejos que llevan a estructurar un conocimiento nuevo. Según estas investigadoras, aún prevalece la tendencia a la enseñanza del cálculo de tipo algorítmica y algebraica. Sostienen que ante la emergencia de errores en el registro algebraico, no se les explica a los estudiantes las causas de sus errores. Y apelan a que se hace necesario utilizar diferentes representaciones para abordar los problemas de manera más eficiente. A modo de ejemplo, de utilizar un registro gráfico, en lugar de

usarlo como apoyo para comprender un error, éste se usa de manera muy limitada y en desconexión a lo algebraico.

Por su parte, Tall (1992), en el contexto de un estudio sobre el concepto de límite de una función en alumnos universitarios- propone presentarles situaciones que provoquen conflicto cognitivo originando un desequilibrio que los conduzca a la superación de obstáculos epistemológicos que presenta este concepto. Este autor hace énfasis que se debe favorecer la integración de las tres representaciones sobre el límite funcional, gráfico, numérico y simbólico.

Esta tesis intenta dar cuenta de los desempeños que presentan los estudiantes al transitar entre registros así como también detectar el acercamiento de los estudiantes hacia los infinitos tanto el potencial como el actual que les permita dar el paso al límite en contextos de geometría sintética y haciendo uso del recurso de la visualización. Entendiendo para esto, como acercamiento al infinito potencial y actual al hecho que los estudiantes logren develar en su accionar la caracterización de los infinitos involucrados y reconocer esta importancia para dar el paso al límite.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

La investigación se propone caracterizar actividades estudiantiles que entran en escena cuando los estudiantes trabajan con geometría sintética, en situaciones que involucran procesos infinitos para propiciar el paso al límite.

1.3.2. Objetivos Específicos

1. Reconocer las habilidades de pensamiento matemático que los estudiantes ponen en escena en las actividades de paso al límite.
2. Describir las estrategias estudiantiles ante una secuencia de actividades orientada a poner en escena el paso al límite, en contextos de geometría sintética y de series geométricas.
3. Describir las articulaciones de registros que muestran las producciones de los estudiantes cuando realizan actividades de paso al límite.
4. Analizar la visualización que ponen en escena los estudiantes, al trabajar con actividades que involucran el paso al límite.

1.4. Preguntas De Investigación

Este estudio intenta dar respuesta a las siguientes preguntas:

¿Qué habilidades o competencias de pensamiento matemático se deben promover en los estudiantes para acercarse al paso al límite?

¿Qué actividades pueden conducir a la construcción de significados para el paso al límite a los estudiantes?

¿Cómo contribuyen juegos de registros de representación, a la construcción de significados para el paso al límite entre los estudiantes?

¿Qué estrategias muestran los estudiantes al enfrentarse al paso al límite?

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

2.1. Algunas Investigaciones Realizadas Del Límite Matemático

En este apartado se presentan investigaciones con distinta naturaleza, según su enfoque sea cognitivo, histórico-epistemológico, didáctico o sociocultural. Todas ellas abordan la problemática de la enseñanza del límite matemático y los desafíos que este presenta para ser construido significativamente tanto por la comunidad matemática, como por docentes y estudiantes. Uno de estos estudios es el proyecto de Investigación desarrollado por Chávez en el Instituto Tecnológico de Zapatepec de México, a partir de 1996. El autor encontró que la mayoría de estudiantes participantes en el estudio ostentan diversas dificultades. En particular los estudiantes presentan dificultades para decidir si el límite valora el comportamiento de una función en un punto o cerca de un punto, para entender que la determinación de un límite es algo más que un proceso de sustitución, y, para manipular algebraicamente funciones cuyos límites se desean determinar. En el marco de dificultades asociadas con: la comprensión del concepto de variable; la distinción entre variable dependiente e independiente; la comprensión del concepto de función y los subconceptos de dominio y rango; las gráficas de funciones; el tránsito entre diferentes sistemas semióticos de representación, por ejemplo, del gráfico al numérico, del numérico al algebraico, del algebraico al gráfico, del verbal al algebraico.

En su investigación Sierpinska (1985) realizó investigaciones con estudiantes de nivel medio y universitario en Canadá, encontró obstáculos para el estudio de la noción de límite. En una primera categoría de obstáculos que denominó “Horror Infiniti" clasifica los aspectos relativos al concepto del infinito en sí, al problema del paso al límite donde se rechaza el estatus de operación matemática. También en esta categoría se contemplan obstáculos referidos al razonamientos con falta de rigor,

excesivo rigor o falso rigor, como la inducción incompleta, obstáculos de tipo algebraico , uso de los mismos métodos para cantidades finitas como para cantidades infinitas, la transferencia de propiedades de los términos de una sucesión convergente a su límite y el obstáculo que asocia el paso al límite como un movimiento físico o aproximación indefinida, mientras que la noción de límite en la teoría formal se concibe en una faceta estática. En un segundo grupo, están los obstáculos relativos al concepto de función, en un tercer grupo están los obstáculos relativos a la concepción geométrica de la noción de límite. En cuarto lugar se refiere a obstáculos lógicos, en particular al uso adecuado de los cuantificadores, que a juicio de Sierpinska (1985), no surge como una necesidad natural para resolver los problemas propuestos. Por último, plantea el obstáculo referido al símbolo de la operación de paso al límite.

Por su parte Artigue (1998), reporta resultados de investigaciones realizadas con estudiantes de secundaria y de primer año universitario en cursos de pre cálculo y cálculo. En ambos casos en sus investigaciones, da cuenta de las dificultades que presentan los estudiantes en el campo conceptual del cálculo, específicamente en lo que a límite se refiere.

En su trabajo la investigadora menciona la complejidad lógica de la definición formal para los estudiantes de la manera que tradicionalmente se aborda en los cursos de análisis.

Ante esta situación, Artigue (1998), propone una reformulación de la manera de enseñar el límite. Esto implica que se necesita invertir la dirección del proceso función que va de la variable x a la imagen f(x). En los cursos que preceden al cálculo, la investigadora releva el hecho que se parte de variable independiente para obtener la variable dependiente y añade que, sin embargo, en la definición formal del límite se

procede a la inversa, hecho que no resulta coherente desde el punto de vista cognitivo ni didáctico para los estudiantes.

En trabajos de índole cognitivo, Tall y Vinner (1981) y Vinner (1991) estudiaron la enseñanza y el aprendizaje del límite con base en su noción de imagen conceptual. Levantan explicaciones, desde sus categorías de ***Concept Image y Concept Definition*** -imagen del concepto y definición del concepto- acerca de cómo los estudiantes abordan el estudio del límite. Tall y Vinner (1981) denominan imagen conceptual a toda la estructura cognitiva en la mente de una persona asociada a un concepto dado: todas las figuras mentales (pueden ser y representaciones visuales, impresiones o experiencias asociadas al concepto) propiedades y procesos asociados, conscientes o inconscientes. Entienden a la definición del concepto "como" dos células distintas que permiten hacer análisis sutiles de las diferentes formas de emplear las ideas de imagen y de definición.

Como la definición del concepto se sustenta en palabras que pueden ser escritas o habladas, Vinner (op.cit., 1991) consideró a las ideas de imagen y de definición, como parte integral de la imagen del concepto total en el cerebro / mente. Cuando una parte de la imagen conceptual o de la definición conceptual de una persona es confrontada simultáneamente con otra contradictoria, se genera un conflicto cognitivo. En una de sus investigaciones, Vinner reporta cómo los estudiantes fueron capaces de dar justificaciones correctas para el cálculo de algunos límites, aún brindando una definición conceptual incorrecta.

Tall (1992) resalta la importancia de enseñar procesos más que productos y propone un acercamiento construido con base a raíces cognitivas: conceptos familiares para los estudiantes que a la vez brinden una base para el desarrollo formal posterior. La definición de límite tal cual se presenta hoy en los cursos tradicionales de cálculo está

alejada de las experiencias previas de los estudiantes, y en general de sus imágenes conceptuales según este investigador.

Tall (1980) presenta nuevos aportes para comprender la problemática al estudiar la relación entre los conceptos de límite y de infinito. Se detiene en la construcción de los conceptos de infinito potencial y de infinito actual entendiéndose estos como la posibilidad de ir más lejos, es decir continuación indefinida y como la toma de conciencia simultánea de todos los elementos de un conjunto respectivamente. Para este autor en este proceso de comprensión de los infinitos se manifiestan conflictos cognitivos.

Añade Tall (1980) que la maduración de estos procesos de configuración de la noción de infinito es individual. Se debe evocar paulatinamente al acercamiento entre dos nociones de infinito, una noción primaria, que el estudiantado evoca desde su contexto cultural y otra noción secundaria, promovida por la escuela, de modo que puedan conducir a las nociones de estos. Desde la doble perspectiva que presenta Tall (1980) el concepto de infinito no precisa ser globalmente coherente y puede presentar conflictos en los estudiantes que solo serán percibidos si se evocan simultáneamente.

Otra investigación de índole cognitiva para explicar las dificultades que se presentan en la enseñanza del concepto de límite, fue realizada por Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schmwingendorf, K., Thomas, K., y Vidakovic, D en 1996 quienes recurren a la teoría *APOS* (actions, processes, objects, schemas). Desde el punto de vista de la teoría APOE, la construcción del conocimiento matemático pasa por tres etapas básicas:

Acción: “Una acción es una transformación de un objeto, el cual es percibido por el individuo, hasta cierto punto, como algo externo” (Asiala, et al., 1996); es decir, cuando es una reacción a estímulos, “los cuales pueden ser físicos o mentales. Una acción puede consistir en una simple respuesta o en una secuencia de respuestas. En cada caso el efecto es transformar en forma física o mental uno o varios objetos” (Dubinsky, 1997, pág. 96).

Proceso: “Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo... En contraste con una acción, el individuo percibe el proceso como algo interno, y bajo su control, en lugar de algo que se hace como respuesta a señales externas” (Dubinsky, 1996).

“Nos referimos a la construcción de un proceso desde una acción como una interiorización. Una vez que un individuo tiene construido un proceso, varias cosas son posibles. Por ejemplo, dos o más procesos pueden ser coordinados para obtener un nuevo proceso” (Dubinsky, 1997, pág. 96).

Objeto: “Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto. En el curso de la realización de una acción o un proceso sobre un objeto, suele ser necesario desencapsular y regresar el objeto al proceso del cual se obtuvo con el fin de usar sus propiedades al manipularlo” (Dubinsky, 1996, pág.96).

Esquema: “un esquema para una parte específica de las matemáticas se define como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas. Cuando un sujeto se encuentra frente a un problema específico en el ámbito de las matemáticas, evoca un esquema para tratarlo.

De acuerdo a los autores citados, se pone en juego aquellos conceptos de los que dispone en ese momento y utiliza relaciones entre esos conceptos. Ante una misma situación diferentes estudiantes utilizan los mismos conceptos y diferentes relaciones entre ellos. El tipo de relaciones que cada sujeto establece entre los conceptos que utiliza, así como el tipo de construcción del concepto que muestra, dependen de su conocimiento matemático.

A través de las acciones, procesos, objetos y esquemas la construcción del conocimiento matemático se lleva a cabo. “Las acciones son transformaciones de objetos que se efectúan como respuesta a un estímulo que es percibido por el individuo como algo hasta cierto punto externo. Una acción es interiorizada en un proceso en el cual la transformación es controlada de forma conciente por el individuo… El proceso es encapsulado en un objeto a través de acciones repetitivas y una reflexión sobre él” (Dubinsky, 1997, pág. 98).

En resumen “las acciones son construidas por respuestas repetitivas a un estímulo; los procesos son construidos ya sea al interiorizar acciones o al transformar procesos existentes; los objetos son construidos al encapsular los procesos; y, en la desencapsulación de un objeto, los únicos procesos que un individuo puede obtener son los procesos que fueron encapsulados para construir este objeto” (Dubinsky, 1997).

Los investigadores, proponen para la definición formal de límite con la teoría APOE el esquema formado por dos procesos coordinados (cuando $x \to a$, $f(x) \to L$) se reconstruye para obtener el proceso si $0 < |x - a| < \partial$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Éste, que es a su vez un proceso mental consistente en ir de la hipótesis a la tesis, es encapsulado en un objeto que permite construir un esquema en un segundo nivel (para todo ε Positivo, existe un ∂ positivo tal que si $0 < |x - a| < \partial$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$). Esta breve descripción de lo que los autores denominan "descomposición genética" del concepto de límite explica la manera en que lo conceptualizan, como un proceso dinámico, diferenciándose en este sentido de la concepción tradicional. En esta investigación se plantea que uno de los grandes obstáculos en el aprendizaje del concepto es la consideración de que el límite no se alcanza nunca, ya que es visto como un proceso de aproximación (aquí subyace la noción de infinito potencial) y no como un objeto en sí mismo. Esto último para los investigadores significa poder seguir aproximándose tan cerca del punto como fuese posible y no lograr dar el paso de capturar el límite.

Hitt (2003) aborda el conflicto de la doble perspectiva del infinito con un énfasis particular en la dimensión epistemológica. Este investigador reporta parte de una investigación sobre los conceptos de función, límite y continuidad. En ella, se hace referencia especialmente al concepto de límite y se discute sobre la complejidad del concepto de infinito desde su doble perspectiva, potencial y actual.

En Cornu (1986) se reportan otros obstáculos epistemológicos que no provienen estrictamente de la noción de límite matemático pero que están relacionados. Tal es caso de la idea de que una suma infinita debe ser infinita, la idea de que toda convergencia es monótona y otras ideas creadas por las concepciones espontáneas o por el empleo coloquial de la palabra 'límite' (generalmente como algo que no se

puede alcanzar, aproximación sin sobrepasar o simplemente quedarse alejado, o incluso semejanza sin ninguna idea de variación, como en 'este azul tiende a violeta').

Cornu (1991) afirma que la noción de límite fue introducida en la comunidad matemática para resolver tres tipos de problemas: a) geométricos (cálculo de áreas con método de exhaución, por ejemplo), b) convergencia de suma de series; y, c) diferenciación o razones de cambios del orden de cero (relación entre dos cantidades que simultáneamente tienden a cero).

Este investigador identifica, en relación a estos problemas, cuatro grandes obstáculos epistemológicos:

1. La falta de vínculo entre el aspecto geométrico y el numérico (haciendo especial referencia a problemas clásicos de la matemática griega).
2. La noción de las cantidades infinitamente pequeñas o infinitamente grandes.
3. Los aspectos metafísicos de la noción de límite vinculados con los del infinito.
4. El debate sobre si el límite es o no alcanzado.

En el primer obstáculo mencionado, Cornu hace referencia a que los intentos de resolver los desafíos geométricos se hacían mediante sus herramientas de tipo geométricas exclusivamente, de este modo geometría y aritmética eran concebidas para desarrollar sus propios desafíos.

Con respecto a investigaciones orientadas a un enfoque didáctico, Bokhari y Yushau (2006) plantean una reformulación de la definición formal de límite, que suele enseñarse en los cursos introductorios de Cálculo, y proponen una similar a la presentada por Tall (1992). Esta definición es:

Para un ε>0 dado, un número y = L es denominado aproximación local (L-ε) de una función f en un punto a si existe un intervalo P que contiene al punto a tal que: si x ϵ P (x ≠a) ⇀|f(x) – L| < ε.

Los autores proponen interpretar una aproximación local (L, ε) de una función f en un punto dado a, como una aproximación constante de f por L cerca de a. L es límite de una función en un punto a si para todo ε, y = L es una aproximación local (L, ε) de f en a. Se trata de una definición que presenta una noción topológica: aproximación local (L-ε), para la que exista una zona intervalar de centro a en el eje horizontal, tal que las imágenes f(x) y L tengan una cercanía mayor a cualquier valor infinitesimal. Recurre a las metáforas de aproximaciones locales y cercanías infinitesimales.

Entre las investigaciones de tipo histórico del límite, Blázquez y Ortega (2002, 2006) revisan la evolución del concepto de límite desde la época clásica hasta la formulación métrica de Weierstrass, a saber:

El límite de la función f(x) cuando x se aproxima hacia a será L si y solo sí para todo ε > 0 existe un δ > 0 tal quesi0 < |x - a| < δ, entonces |f(x) - L| < ε

Entendiendo que esta definición métrica formal presenta dificultades de entendimiento para la mayoría de los estudiantes, los autores desarrollan una definición alternativa, inspirada en la presentada por D'Alembert. La denominan aproximación óptima:

> "El límite de la función f en x = a es L si para cualquier aproximación K de L, K ≠ L, existe una aproximación H de a, H ≠ a, tal que las imágenes de todos los puntos que están más cerca de a que H están más próximas a L que a K". Blázquez, S. y Ortega, T. (2006, pp. 195)

Esta definición, a criterio de los autores, basados en sus investigaciones con los estudiantes, les resulta menos formal y menos rigurosa que la definición formal a la vez que más comprensiva. Se dinamiza la faceta dinámica del concepto de límite en términos de aproximación. Recurre a la metáfora de cercanía como distancias pequeñas, matemáticamente de órdenes infinitesimales como $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$.

Tanto Bokhari y Yushau (2006) como Blázquez y Ortega (2002, 2006) recurren a metáforas corporales de cercanías infinitesimales, añadiendo los primeros la metáfora topológica de aproximaciones locales. En ambos casos se chequean cercanías, manteniendo el carácter estático de la concepción weirtrassiana e invisibilizando la noción de "acercarse" de los orígenes del concepto de límite. No obstante, al recurrir a cercanías favorecen las evocaciones estudiantiles de sus experiencias espaciales y de desplazamiento, las que les ayudarán en sus procesos de significación del concepto.

Molfino (2010) realiza un trabajo de investigación centrado en la institucionalización del límite. La misma se centra específicamente en responder por qué se enseña límite de funciones de la forma en que se hace actualmente. Para ello fue necesario dejar de considerar al conocimiento matemático –en este caso el concepto de límite- como un saber preexistente al sujeto que aprende y con un lugar predeterminado en un cuerpo de conocimientos socialmente legitimados, para comenzar a considerar las prácticas que le dieron origen y promovieron su desarrollo y difusión.

La investigación de Molfino (2010) menciona el ámbito científico y las prácticas que este contempla: las actividades de medir, modelar, aproximar, calcular, buscar explicaciones de fenómenos específicos, elaborar conjeturas y justificarlas o refutarlas, enunciar definiciones y axiomas, constituyen las prácticas de referencia desarrolladas por matemáticos o grupos de matemáticos en torno a un concepto, propias de cada etapa en la evolución del concepto de límite en el ámbito científico.

En la Tabla N° 1, se presentan las etapas que hace alusión la autora.

Tabla N° 1: Períodos históricos de la evolución del concepto de límite.

Etapa	Período	Características principales	Ambiente en que se desarrolla el concepto	Móviles
I	Grecia Antigua	Rigurosidad en demostraciones.	Geométrico-estático. En demostraciones por exhaución.	Determinación de áreas y volúmenes de cuerpos y figuras concretas.
II	Renacimiento hasta S. XVII	Métodos infinitesimales. Trabajo intuitivo con poca fundamentación.	Geométrico – dinámico	Estudio del movimiento. Resolución de problemas concretos.
III	2ª mitad S. XVII y S. XVIII	Transformación de fundamentos del análisis infinitesimal	Analítico	
IV	S. XIX y principios S. XX	Aritmetización del análisis	Algebraico – analítico	
V	S. XX	Generalización del concepto a otros contextos		

Elaboración con base a Molfino (2010, p.89)

Por su parte Leston (2008, 2011) presenta estudios sobre las ideas intuitivas asociadas al concepto de infinito, generadas en situaciones no escolares. En ambos estudios, su objetivo fue detectar la forma en que dichas ideas surgen y cómo se comportan como parte del modelo que el estudiantado forma para el infinito, afectando la construcción del infinito matemático. Ambas investigaciones mencionan el divorcio existente entre el discurso del contexto social y el discurso escolar en relación a la noción del infinito, dificultad que incide en la construcción de infinito de manera natural y articulada. En estas investigaciones de Leston se hace referencia a la dificultad que presenta la diferenciación de los infinitos potencial y actual. Asimismo destaca la importancia de

la comprensión del infinito en su doble faceta como construcción previa para dar paso al límite.

Entre los estudios de carácter sociocultural, Díaz, L. (1999) reporta como obstáculo sociocultural a su aprendizaje, a la estructura de la representación cotidiana de límite. Resultado del cruce de dos ejes categoriales, los ejes de dipolos "evolución/involución" y "dentro de las normas/fuera de las normas" de connotaciones positivo-negativa respectivamente, la autora, con base en los discursos estudiantiles, establece cuatro mundos posibles a los que el estudiantado asocia la noción cotidiana de límite. Una mayoría adscribe al mundo de "lo que no puedo hacer" "cuando llegamos a una situación límite (…) ya no puede ser revertida" y por ende de debe "evitar llegar a ella". Eludirán traspasar un límite que los expone a riesgos vitales, fungiendo esta representación como un obstáculo al aprendizaje, requiriéndose un diálogo del aula con ella. Así, se cuenta con variados estudios en torno a la problemática del paso al límite.

Se aprecia que éstos se centran principalmente en el ámbito conceptual, en las dificultades para calcular límites y en la detección de obstáculos socioculturales asociados al concepto.

En el caso del presente estudio, se pretende aportar a la dimensión didáctica, mediante el uso de diferentes recursos, tales como la visualización, el tránsito entre registros y la geometría sintética.

2.2. Algo De Historia Acerca Del Límite

2.2.1. Etapas En La Construcción Histórica Del Límite

Los Elementos de Euclides es una de las primeras evidencias de escritos antiguos, que revelan la utilización de procesos que hoy en día los reconocemos como procesos de límites, los cuales los encontramos desarrollados en la parte de las matemáticas que denominamos Análisis, al seno de la cual encontramos, a su vez, el Cálculo Diferencial.

Para Ferrante (2009), la evolución del concepto de límite -desde la matemática griega hasta el siglo XIX se desplegó por la necesidad de expresar y formalizar la noción. Esta noción se utiliza de forma implícita hasta que Weierstrass, en el siglo XIX, logra formalizar la definición de límite, generando por una parte, la validación de algunos resultados ya obtenidos, tales como acercamientos y aproximación (D´Alembert, Newton, Leibnitz, entre otros) y, por otra, para demostrar resultados más generales, tales como el cálculo de área.

2.2.1.1. Primera Etapa: Desde Eudoxo de Cnido (S. IV a.C.) hasta el siglo XVII

Para Ferrante (2009) este período se caracteriza por la introducción y la utilización de los métodos infinitesimales iniciando con los griegos, mediante el uso geométrico hasta las notables aportaciones de Newton y Leibniz. En esta etapa, aparece una idea muy intuitiva del proceso del paso al límite. No existe definición del concepto de límite, ya que ni siquiera se ha explicitado el concepto de función, pero sí aparece implícito en algunos métodos orientados, básicamente, a resolver problemas específicos, a saber: a) Con la fórmula del espacio en función del tiempo, calcular la velocidad y aceleración instantánea; recíprocamente, dada la aceleración o velocidad obtener la fórmula del espacio, b) cálculo de la tangente a una curva. En óptica es

necesario conocer la normal a una curva y en el estudio del movimiento la dirección de la tangente. Aparecen problemas de definición de tangentes en general cuando se originan nuevas curvas, pues la definición de tangente como recta que toca en un sólo punto o deja a un lado la curva, sólo sirve para algunas cónicas c) estudio y análisis de máximos y mínimos de curvas, relacionado con el movimiento de los planetas, el movimiento de proyectiles, entre otros; y, d) cálculo de áreas limitadas por curvas, volúmenes acotados por superficies, longitudes de curvas, centros de gravedad y atracción gravitatoria,

Este período cuenta con importantes aportes, entre los cuales destaca el método de exhaución y por la naturaleza de esta investigación se desarrolla este apartado a continuación.

Díaz, M. (2009), señala que **el método de exhaución** es atribuido a **Eudoxo**, aunque el uso más conocido lo hizo **Arquímedes** en la esfera y el cilindro y en la cuadratura de la parábola. Este método principalmente se aplicaba al cálculo de áreas de diferentes figuras, volúmenes de cuerpos, longitudes de curvas, tangentes a las curvas, etc. La exhaución consistía en aproximar la figura por otras en las que se pueda medir la correspondiente magnitud, de manera que ésta vaya acercándose a la magnitud buscada. Por ejemplo para estimar la superficie del círculo se inscriben y circunscriben polígonos regulares de n lados cuya superficie se conoce (en definitiva es la de n triángulos isósceles) luego se duplica el número de lados de los polígonos inscriptos y circunscriptos hasta que la diferencia queda exhausta. Arquímedes halló la superficie del círculo con este método llegando a polígonos de noventa y seis lados.

En este método empleado por los griegos, se menciona a Antifonte (430 a. C.), quien realizó varios intentos en determinar el área del círculo inscribiendo en él un mayor número de triángulos, cada vez más pequeños, hasta que su área se agotara. El

ejemplo más conocido de este método es el del cálculo de la longitud de una circunferencia realizado por Arquímedes. Básicamente empleó los siguientes procedimientos, a saber: a) el método de agotamiento, inscribiendo polígonos regulares en una circunferencia de radio unitario; y, b) El método de compresión, circunscribiendo polígonos a la circunferencia. De este modo, al aumentar el número de lados de los polígonos, las figuras tenderán a acercarse a la forma de la circunferencia, intentos que conllevaron a Arquímedes a obtener una medida bastante precisa y cercana del número π.

Para Ferrante (2009), el método de exhaución se encuentra descrito y explicado a profundidad en el Método, un libro de Arquímedes. A este método se le considera que brindó los aportes que sentaron las bases de los conceptos que en el siglo XVII para que posteriormente Isaac Newton y a Leibniz unificar el cálculo diferencial con el integral.

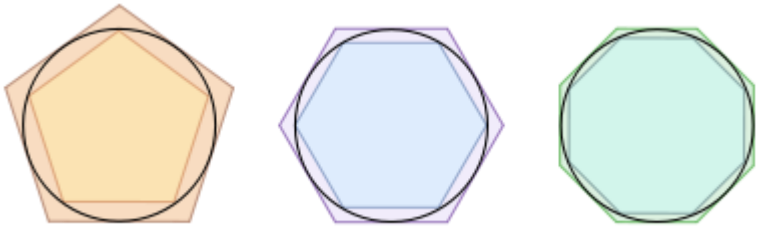


***Figura N° 1: Ilustración del método exhaustivo con diferentes polígonos para hallar el área del círculo, la longitud de la circunferencia y, como consecuencia, el* número pi**

Fuente: Díaz, M. (2009, pag.19)

A manera de ejemplo, Antifón, cree resolver uno de los problemas clásicos de la geometría griega" **la cuadratura del círculo**", que lo describe así: si se va inscribiendo un polígono regular (triángulo o cuadrado) luego, se duplican progresivamente los

Lados de este primer polígono con lo que se disminuye con cada operación la superficie de los segmentos circulares exteriores a los polígonos.
Continuando el proceso, al cabo de un número muy grande (pero finito) de operaciones de este tipo, se obtendría un contorno poligonal que denomina la circunferencia. Antifón pensaba que por el procedimiento descrito, el área del círculo se agotaría, obteniendo un polígono inscrito cuyos lados a causa de su pequeñez coincidirían con la circunferencia.

Consideró la posibilidad de construir un cuadrado equivalente a un polígono cualquiera, ese cuadrado sería equivalente en área al círculo. Y de esa forma se podría cuadrar el círculo.

Otro tratamiento de este problema, lo expone Rey (1962), quien lo refiere como el polígono que llega a ser idéntico a la circunferencia. Advierte que dicha propuesta confunde aproximación finita con aproximación creciente pero al infinito. Más aún, refiere que "esta concepción es matemáticamente incorrecta, pues significa hacer coincidir un punto geométrico (sin dimensión) con un segmento que sí tiene magnitud" (pág.128).

2.3. Infinito

Para Medina (2001) el trabajo con infinitos se viene refiriendo, en la actividad matemática, como lo ilustran los matemáticos Oresme (1323-1382) y Calculator (s.d) quienes fueron de los primeros para los que se cuenta con evidencia del trabajo con sumas infinitas. Este tema, polémico entre matemáticos de la edad media, se formaliza con las series infinitas que realiza el matemático inglés Wallis (1616-1703).

Mucho más tarde, el matemático francés Cauchy (1789-1857) reconoció tratamientos diferentes, de lo infinito con respecto a lo finito, relevando la importancia de instituir razonamientos para lo infinito en su propio mérito.

En el siglo XVII se introdujo lo que se podría llamar la concepción moderna, al considerar que a lo finito y a lo infinito regidos por leyes y preceptos diferentes. Esta distinción entre lo infinito y lo finito se la debemos al matemático inglés Wallis, quien introdujo además el símbolo que conocemos del infinito. No hay evidencias escritas que comprueben que le motivó a Wallis la idea de m (mil) como un número muy grande para luego introducir a la lemniscata como el símbolo del infinito y que Wallis asociara a recorrer los puntos de una recta sin llegar al final. (Medina, 2001).

Según Ortíz (1994) Aristóteles (384 a.C-322 a.C.) distingue entre el infinito potencial y el actual. Al infinito potencial lo entiende como un proceso de crecimiento sin final o de subdivisión sin final y ve el infinito actual como una totalidad completa. Esta acepción tributa a su concepción de lo potencial y que es lo opuesto a aquello que está en acto.

La noción de infinito potencial de Aristóteles es la primera noción de infinito que se centra en la operación reiterativa e ilimitada, es decir, en la recursividad interminable,

por muy grande que sea un número natural siempre podemos concebir uno mayor, y uno mayor que este último y así sucesivamente.

Por su parte, la noción de infinito actual de Aristóteles comprende la noción de infinito como totalidad. Se asocia a su concepción de la existencia real del ser, opuesta a la potencia. Esta noción de infinito actual se visualiza hoy en la recta real al dividir un segmento de longitud l de ella, en un número infinito de puntos. De este modo, en el segmento de longitud finita, se actualizan infinitos puntos.

Ambas concepciones de Aristóteles para el infinito se encuentran a la base actual implica lo que hoy día se conoce como los infinitesimales, cantidades infinitamente pequeñas y cantidades infinitamente grandes, soportes heurísticos para la posterior formalización del cálculo infinitesimal.

Ortíz (1994) menciona que en 1600, Galileo (1564-1642) rechazó la idea del infinito pues la consideró paradójica y que atentaba contra su razón. Galileo observó que los puntos de dos segmentos de recta de diferente longitud, podían hacerse corresponder biunívocamente, es decir, el infinito permitía que la parte contuviera el mismo número de puntos que el todo, lo que no era contradictorio con las ostensividades con las que trabajaba.

Galileo ilustra también esta idea con el conjunto de los números cuadrados perfectos: estos constituyen una parte del conjunto de los números naturales, sin embargo cada número natural es la raíz cuadrada de un único número natural. En ambos casos, vistos desde hoy, el operar de Galileo considera la biyección con que Cantor matematiza el infinito.

Por su parte Medina (2001) se refiere a Cantor (1845-1918), destacando el hecho que este rechazó la distinción aristotélica entre infinito actual e infinito potencial, ya que para él todo infinito potencial presupone la existencia de un infinito actual. Para este matemático según este autor, era insuficiente tener un conjunto en el cual no se pueden enumerar todos sus elementos sin tener conciencia de la totalidad de los mismos. Esta idea de conocer la cantidad o tamaño de los elementos de un conjunto, Cantor formaliza con la matemática de los transfinitos.

Cantor crea una "aritmética de los números transfinitos". Así dota de contenido matemático al concepto de infinito actual, poniendo "los cimientos de la teoría de conjuntos abstractos, contribuyendo además, de forma importante, a fundamentar el cálculo diferencial y el continuo de los números reales". (Dauben, 1990, pág.280).

Para Dauben (1990) Cantor presenta con rigor matemático una noción de infinito diferenciada en el sentido de que hay conjuntos infinitos de distinto tamaño. Esto es, se tendrán unos infinitos mayores que otros. De manera intuitiva, si se considera los números múltiplos de 12 y los números naturales, ambos son infinitos, aunque "parece" que el primero es 12 veces más pequeño que el segundo, sin embargo, ambos son infinitamente grandes.

En términos lógicos se puede decir que el segundo conjunto de números está contenido en el primer conjunto y basándonos en el postulado de Euclides, que establece que el todo es mayor que las partes, ambos infinitos deberían ser distintos, pero Cantor establecerá para ambos el mismo tamaño.

Además en Dauben, (1990) también se menciona que Cantor denomina tamaño de un conjunto a su cardinal. En el ejemplo anterior el cardinal de ambos conjuntos es el mismo, esto es porque se trata de un mismo infinito. Cantor establece una

correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los múltiplos de 12, de manera que estos conjuntos son equipotentes, es decir que tienen el mismo número cardinal. Precisa que un conjunto es infinito cuando se pueda establecer una correspondencia biunívoca entre él y una parte propia de él. De la misma forma se pueden hacer corresponder los puntos de una semicircunferencia con los puntos de una semirecta. (**Ver anexo cinco**).

Siguiendo a Dauben (1990) se menciona de manera anecdótica a Cantor quien se preguntó si era posible establecer una correspondencia biyectiva entre los números reales y los racionales. Cantor demostró que no es posible y con ello se prueba que ello es inviable (**demostración en anexo cinco**). La demostración muestra que en efecto el conjunto de los reales no es numerable, mientras que el conjunto de los racionales si lo es, por lo que los cardinales de ambos conjuntos son diferentes, estos conjuntos no son equipotentes.

Cantor "bautiza" estos diferentes infinitos o "tamaños" de los conjuntos como cardinalidades o "números" transfinitos. Cada vez que trabajamos con todo un conjunto de cardinalidad igual o mayor que la de los naturales, tendremos un infinito completo, un infinito "actualizado", entre las manos.

En este estudio de horizonte didáctico, se consideran las acepciones operacionales para los infinitos actual y potencial como sigue. Por infinito potencial se comprende el conjunto que se le pueden agregar elementos de manera indefinida, y por infinito actual al conjunto de la totalidad de los elementos que se puede formar al continuar agregando elementos de manera indefinida. Esta doble perspectiva de lo infinito es requerida para dar el paso al límite.

2.4. Paso Al Límite

En este apartado se inicia con elementos sustantivos de la importancia del método de exhaución y su aporte a la concepción moderna del límite matemático. En este trabajo de investigación también se mencionaron en apartados anteriores las diferentes etapas de la evolución del cálculo, en particular del límite matemático. La distancia entre el límite y paso al límite es diminuta pero a la vez importante. En esta investigación se comprenderá como" paso al límite" al proceso que antecede a la obtención del número real o lo que se denomina límite. Para culminar este apartado se presenta un cuadro sinóptico que reseña las características de cada etapa histórica con respecto a la visión del paso al límite.

Díaz, M. (2009) reflexiona en relación a la trascendencia del método de exhaución y su aporte al concepto de límite. Desde esta perspectiva se mención los rasgos esenciales del concepto actual de límite. Estos son: a) la tendencia que se mantiene a lo largo de un proceso infinito a la manera del infinito potencial, b) percatarse de que la tendencia se mantiene hasta el infinito y que esta que no se puede desviar ni detener ni mucho menos regresar. Esto es, la diferencia entre las magnitudes que se comparan, debe ser siempre menor que cualquier magnitud fija de antemano c) la concepción del infinito actual, es decir admitir el proceso infinito terminado, esto es concebirlo como un todo a pesar que no se pueda realizar completamente el proceso; y, d) la situación límite del proceso infinito se la conoce como el paso al límite.

De acuerdo a lo mencionado por Díaz, M. (2009), es notorio percatarse que el método de exhaución, cubre los dos primeros rasgos esenciales del concepto actual de límite que se mencionaron en los párrafos anteriores, aportados por los matemáticos griegos de la época de Eudoxo (406-355 a.C.).

Estos matemáticos probaron con base al método de exhaución de la validez de algunos resultados, por ejemplo como los polígonos inscritos agotan el área del círculo. En relación al segundo aspecto, estos matemáticos pudieron confirmar que el principio de Eudoxo se cumpliera, es decir que la diferencia entre las áreas de los polígonos y la del círculo, fuese tan pequeña como se quisiera. La manera de validarlos resultados de la exhaución, los griegos realizaban por reducción al absurdo. Por lo antedicho, se puede deducir que los griegos evadieron la situación límite de los procesos infinitos.

Los matemáticos griegos no pudieron abstraer la noción del infinito, que exige poder concebir al infinito como un proceso infinito culminado, que se le conoce como infinito actual. Esta imposibilidad obstaculizó que pudieran distinguir entre aproximación finita y aproximación creciente al infinito, toda vez que se les presentaba uno de los desafíos de su época que era la cuadratura del círculo. La concepción aceptada entre los griegos de infinito como algo que no tiene fin o infinito potencial y la no aceptación del infinito actual, no les permitió distinguir entre aproximación finita y aproximación creciente al infinito, toda vez que se les presentaba uno de los desafíos de su época que era la cuadratura del círculo.

En la Tabla N° 2 se muestra el cuadro resumen del paso al límite.

Tabla N° 2: Diferentes concepciones del paso al límite a lo largo de la historia.

Etapa	Centralizado	Método
Concepción geométrica Eudoxo-Euclides	El paso al límite no posee la categoría de operación matemática. La exhaución es el centro de atención	De carácter riguroso privilegiando la doble reducción al absurdo
Concepción geométrica Euclides	El paso al límite basado en aproximaciones sucesivas. Se encuentra apoyado en los hallazgos de intuición y conocimientos de mecánica	De carácter heurístico riguroso oculto en el método mecánico con resultados obtenidos por exhaución
Concepción geométrica heurística de aproximación finita Cavalieri-Kepler	El paso al límite no es operación, pero está implícita en la heurística de buscar aproximaciones	Focalizado en la intuición geométrica, en el libre uso del infinito y en cálculos numéricos
Concepción algebraica finitista Fermat	El paso al límite es una operación que consiste en aplicar números a las variables y discriminar unos con respecto a otros	Apoyado en la búsqueda de fórmulas de equivalencias
Concepción algorítmica algebraica Euler	El paso al límite implícito cuando se considera tomar cantidades infinitamente pequeñas como cero	Apoyado en fórmulas y algoritmos más que en demostraciones

Elaboración con base en Medina (2001, pág. 27)

En esta investigación se han considerado fundamento teórico, los apartados de Representaciones Semióticas y Visualización que se presentan a continuación.

2.5. Representaciones Semióticas

Duval (1999) entiende por semiótica, a la ciencia de los modos de producción, funcionamiento y recepción de los diferentes sistemas de signos de comunicación en los individuos o colectividades y por representaciones semióticas a las producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, formula algebraica, grafico, figura geométrica, etc.) que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias reglas y significancia. Es decir, el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas visibles o accesibles a los demás.

Según Duval (1999), se tiene acceso al conocimiento matemático a través de distintas representaciones. Este investigador distingue entre representaciones semióticas y mentales. "Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica...) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales; es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. Las representaciones semióticas estarían, pues, subordinadas por entero a las representaciones mentales y no cumplirían más que funciones de comunicación" (Duval, 1999, pág.14).

Con respecto al segundo grupo de representaciones, Duval señala que: "Las representaciones mentales cubren al conjunto de imágenes y, globalmente, a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre lo que está asociado." (Duval, 1999, pág.15).

"Las representaciones semióticas no solamente son necesarias para fines de comunicación, sino que son igualmente esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento." (o.p.cit., pág.16).

Para Duval (1999), los objetos matemáticos se refieren a signo, concepto que aparece en la actividad matemática y del que se conocen sus propiedades, operaciones, teoremas, entre otros; por ejemplo, los números enteros, las funciones, los límites, los polinomios, las matrices. Estos objetos matemáticos a su vez tienen diferentes registros de representación, tales como: Gráfico o geométrico, numérico, analítico o algebraico, pictórico, lenguaje natural, entre los cuales puede ocurrir la actividad llamada **tratamiento**. Esta actividad comprende acciones o manipulaciones sobre un objeto que pueden ser operaciones, procedimientos de tipo aritmético, gráfico, en registro natural, entre otros, sobre ese objeto al interior del registro. Si por el contrario se realizan acciones entre un registro y otro se realiza **conversión**.

Otros conceptos importantes para Duval son **la semiosis, la noesis y la congruencia**. Con respecto al primero, el autor señala que la **semiosis**, es la aprehensión de una representación semiótica, es decir que el estudiante pueda comprender ese signo que puede ser un ícono, una fórmula matemática, una gráfica, entre otros.

En relación a la **noesis**, Duval señala que se trata de actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la comprensión de una inferencia. Desde esta perspectiva, la noesis implica que el estudiante sea capaz de trabajar en diferentes registros de representación, realizar conversiones, desplazamientos que le ayuden a construir el objeto matemático.

Duval (1999), introduce el **concepto de congruencia** y menciona las condiciones que se deben de cumplir para que dos registros sean congruentes. En este sentido, se habla de congruencia entre registros cuando se cumple correspondencia semántica entre las unidades significantes que las constituyen, igual orden posible de aprehensión entre dos unidades en las dos representaciones, transformación de una

unidad significante en la representación de partida en una sola unidad significante en la representación de llegada.

En este trabajo de investigación se les presenta a los estudiantes actividades en registro de tipo geométricos, de lenguaje natural con el objeto que puedan emplear y desplegar diferente estrategias para afrontar las situaciones problemas. Además, se intenta que en la investigación los estudiantes puedan poner en escena diferentes habilidades de pensamiento matemático y potenciar otras mediante la secuencia que se ha estructurado para este propósito.

2.5.1. Visualización

La visualización como campo de investigación en educación matemática comienza a configurarse a partir de la década de los noventa hasta principios de este siglo.

Los investigadores Zimmermann & Cunningham (1991), recurren al término de visualización como la acción, proceso para describir los procesos de producción o de uso de representaciones geométricas o gráficas de conceptos matemáticos, principios o problemas, ya sea dibujados a mano o generados por computadora. Estos investigadores mencionan que: "La visualización matemática da profundidad y significado a la compresión sirve como guía para la resolución del problema, e inspira razonamiento crítico" (o.p.cit., pág.12).

Por su parte Hitt (1995) afirma que la visualización de los conceptos matemáticos no es una actividad cognitiva trivial, que visualizar no es lo mismo que ver. En el mismo orden de ideas, la visualización matemática para este investigador requiere de habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico a otro. Hitt (1995)

señala la importancia de la articulación entre diferentes sistemas semióticos de representación para el aprendizaje de las matemáticas.

De Guzmán (1996, pág. 17) sostiene que: "La visualización aparece como algo profundamente natural en el nacimiento del pensamiento matemático, como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos y también naturalmente en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático".

Duval (1999, pág. 12), "la visualización se refiere a una actividad cognitiva que es intrínsecamente semiótica, es decir ni mental ni física, …La visualización está basada en la producción de una representación semiótica".

Arcavi (1999, pág. 56) sostiene que: " La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, empleo y reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas desconocidas y anticipando entendimiento" .

Cantoral y Montiel (2001), manifiestan que la visualización se comprende como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el lenguaje que aprendemos. En este sentido al promover habilidades de visualización se requiera de nociones matemáticas asociadas a ámbitos numéricos, algebraicos, gráficos o verbales. Estos investigadores añaden: "De modo que al realizar la actividad de visualización de nociones matemáticas asociadas a ambos numéricos, gráficos, algebraicos o verbales, pero exige también el lenguaje común para explicar ciertos fenómenos e incluso para describir experiencias vivenciales, digamos que se requiere del ámbito gestual…" (pág.694).

Nuevamente Hitt (2003), destaca que la visualización matemática tiene que ver con el entendimiento de un enunciado y la puesta en marcha de una actividad, que si bien no llevará a la respuesta correcta sí puede conducir al resolutor a profundizar en la situación que se está tratando. Una de las características de esta visualización es el vínculo entre representaciones para la búsqueda de la solución a un problema determinado.

Con base a los autores antes, en este estudio se hará uso del término visualización en el sentido de representaciones geométricas o gráficas que ponga de manifiesto la representación de un determinado objeto y operaciones sobre este. Tal operar considera que el estudiantado represente, transforme, documente y argumente sus acciones al enfrentarse a una situación problema.

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. Tipos De Investigación

Está investigación es de tipo cualitativa exploratoria. Se desarrolló durante el segundo período comprendido entre los meses de junio a agosto del 2011.

3.2. Participantes En El Proceso

Los participantes de esta investigación fueron estudiantes de la carrera de ingeniería agroindustrial de UNAH-TEC Danlí, quienes matricularon el curso regular de Cálculo diferencial. En total 30 estudiantes matricularon el curso durante el período y la investigación se realizó con toda la población, puesto que la temática a desarrollar formaba parte de su programa curricular. Al finalizar la investigación culminaron un total de 23 estudiantes todas las sesiones de trabajo durante el semestre.

3.3. Etapas Del Proceso

El proceso se realizó en dos etapas, una diagnóstica y otra de ejecución. La primera etapa comprendió una semana y la segunda cinco semanas.

3.4. Metodología De Las Sesiones De Trabajo

Las sesiones de trabajo se desarrollaron en base a hojas de trabajo donde se les entregaba a cada grupo diferentes situaciones problema que contenían ciertas consignas. Durante la investigación se desarrollaron nueve secuencias didácticas con el objetivo de que el estudiante pudiese emplear todos los conocimientos adquiridos en los cursos previos al cálculo. Las actividades se diseñaron con objetivos específicos, en las cuales los estudiantes pudiesen poner en escena el paso al límite en situaciones que involucrara geometría sintética. También se conjeturó que los estudiantes, entre sus estrategias para afrontar las diferentes situaciones problema

pudiesen recurrir a la serie geométrica como un recurso para resolver las diferentes situaciones problema.

3.5. Metodología Empleada En La Recolección De La Investigación

Para la realización de este estudio se consideró el diseño para las dos etapas, la diagnóstica y la etapa de ejecución que se describen a continuación.

3.5.1. Etapa Diagnóstica

Durante esta fase se aplicó una prueba diagnóstica sustentada en las investigaciones de Artigue (1995) donde releva que la temática previa a la noción de límite causa serias dificultades a los entendimientos estudiantiles. Entre ellas la investigadora repara que los números reales, los intervalos reales, la noción de función y temáticas relacionadas tales como dominio, rango, intervalo de crecimiento y de decrecimiento, modelación de situaciones de cambio por medio de funciones, entre otros, son objetos que evolucionan en tanto que el estudiante se va apropiando –no sin tensiones- de las nociones que el cálculo aborda.

En efecto, el aprendizaje del cálculo pondrá en tensión, entre otros aprendizajes, la construcción de los sucesivos conjuntos numéricos debiéndose superar por ejemplo la asociación entre un número real y un número decimal reducido, que a es cero si $a < 1/n$, para todo n natural y las dificultades para identificar lo que constituye a una función matemática.

Con base en estos antecedentes así como también desde la experiencia compartida con docentes de cálculo en relación a las temáticas que causan problema a los estudiantes, se elaboró una prueba para conocer los entendimientos estudiantiles de ingreso a la cátedra.

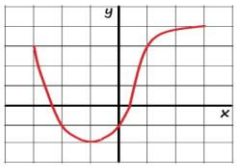
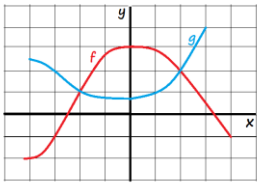
A continuación se presenta una tabla que describe la prueba diagnóstica y que contiene la temática, propósitos, y habilidades a desplegar en los ítems de la prueba

Tabla N° 3: Contrastes entre subgrupo de actividades, temática, propósitos y habilidades a desplegar en la prueba diagnóstica.

Subgrupo de los ítems	Temática a desarrollar en las actividades	Propósitos de las actividades	Habilidades a desplegar
1. Un rectángulo tiene un perímetro de 20m. Exprese el área del rectángulo como función de la longitud de uno de sus lados. 2. Exprese el área de un triángulo equilátero como función de la longitud de uno de los lados. 3. Exprese el área de un cubo como función de su volumen. 4. Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 30ft, exprese el área A de ella como función del ancho x de la misma. 5. Debe construirse una caja con su parte superior abierta a partir de un trozo rectangular de cartón que tiene las dimensiones de 12in y 20in, recortando cuadrados iguales de lado x en cada una de las esquinas y, a continuación, doblando los lados como se ilustra en la figura. Exprese el volumen V de la caja como función de x.	Expresiones algebraicas de una cantidad de magnitud en función otra, para las figuras de triángulo, rectángulo, cubo, ventana normanda y paralelepípedo sin tapa.	Analizar situaciones que involucran áreas y volúmenes. Reconocer los elementos que intervienen para expresar áreas de triángulos, rectángulos y ventanas normadas, y, volumen de un paralelepípedo sin tapa. Expresar áreas y volumen como relaciones funcionales de acuerdo a las condiciones enunciadas.	Los estudiantes visualizan en registro algebraico al trabajar los conceptos de área, volumen y función con relación a figuras geométricas y las relaciones entre sus dimensiones. Con base en la representación geométrica, representan relaciones, operando algebraicamente hasta obtener la expresión funcional solicitada.
6 .El propietario de una casa corta el césped cada miércoles por la tarde. Trace una gráfica aproximada de la altura del césped como función del tiempo durante un periodo de cuatro semanas. 7. En la tabla, se muestra la población P (en miles) de San	Construcción de una gráfica dada una situación en contexto cotidiano.	Reconocer una función de acuerdo a situaciones de contexto. Construir una	Los estudiantes requieren analizar las condiciones iniciales de la situación problema

José, California desde 1984 a 1994. (Se dan las estimaciones correspondientes a la mitad del año). Elabore una gráfica que muestre esta situación. F | 1984 | 1986 | 1988 | 1990 | 1992 | 1994 P | 695 | 716 | 733 | 783 | 800 | 812		gráfica atendiendo a ciertas condiciones enunciadas en una tabla de valores donde se muestra la relación entre años (F) y población (P).	expresada en el registro verbal y utilizar su razonamiento lógico para elaborar representaciones gráficas.
8. Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$, encuentre $f(0), f(2), f(\sqrt{2}), f(1+\sqrt{2}), f(-x), f(x)$ y $f(2x)$.	Cálculo de imágenes de una función.	Calcular las imágenes de diferentes valores de una función cuadrática.	Los estudiantes requieren identificar que se trata de una situación problema donde deben obtener a través de una regla de correspondencia un determinado valor real y de una variable en otros casos. Además tienen que razonar en la diferencia de trabajar con números reales a trabajar con variables.
9. Encuentre el dominio de la función a) $f(x) = \frac{x^4}{x^2+x-6}$ b) $f(t) = \sqrt[3]{t-1}$	Dominio de una función	Determinar el dominio de dos funciones reales, una racional y otra irracional.	Los estudiantes deben utilizar razonamiento, así como análisis para establecer la diferencia al obtener el dominio de una función racional de una función irracional, en

			donde se requieren realizar argumentaciones para uno y otro tipo de función.
10. Encuentre el dominio, rango, interceptos, intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento, además trace la gráfica de la función. a) $f(x) = 3 - 2x$ b) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ c) $h(x) = \|2x\|$ d) $f(x) = \begin{cases} x & si\ x \leq 0 \\ x+1 & si > 0 \end{cases}$ e) $f(x) = \begin{cases} -1 & si\ x \leq -1 \\ 3x+2 & si\ \|x\| < 1 \\ 7-2x & si\ x \geq 1 \end{cases}$	Función, clasificación y elementos tales como dominio, rango, interceptos, intervalos de crecimiento, intervalo de decrecimiento entre otros. Además de gráfica de funciones.	Determinar diferentes elementos tales como dominio, rango, intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento de funciones lineales, cuadráticas, valor absoluto, y funciones definida a trozos. Construir la gráfica de funciones lineales, cuadráticas, valor absoluto y definida a trozos.	Los estudiantes deben distinguir la diferencia entre cada una de las funciones, así como también analizar las restricciones de cada una de las funciones y representar datos a través de una gráfica para cada una de las funciones. En cada una de ellas, los estudiantes requieren presentar argumentaciones de cada función y de sus gráficas.
11.Se da la gráfica de una función f a) Establezca el valor de f(x-1) b) Estime el valor de f(2) c) ¿Para cuales valores de x se tiene que f(x)=2? d) Estime los valores de x tales que f(x)=0 e) Establezca el dominio y el rango de f f) ¿En qué intervalo es f creciente?	Reconocimiento de diferentes elementos de una función dada su representación gráfica.	Obtener diferentes elementos de la función dada su gráfica.	Los estudiantes requieren utilizar visualización puesto que a través del diagrama gráfico presentado necesitan comunicar, descomponer, hacer uso de la

12.Se proporciona las gráficas  de f y g a)Dé los valores de f(-4) y de g(3) b) ¿Para cuales valores de x se tiene que f(x)=g(x)? c) Estime la solución de la ecuación f(x)=-1 d) ¿En qué intervalo f es decreciente? e)Dé el dominio y el rango de f f)Dé el dominio y rango de g 		Determinar dominio, rango, imágenes, pre imágenes, intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento de la función dada su representación gráfica. Determinar los puntos de intersección dada dos gráficas de funciones.	información visual. También requieren hacer uso de análisis en cada una de las dos situaciones, también razonamiento y argumentación para precisar en similitudes y diferencias.

Los resultados de la prueba diagnóstica aplicada evidenciaron falencias en general. Y más directamente relacionadas con el entendimiento de las funciones se constató que tienen dificultades en la temática de función y su gráfica, en determinar dominio, rango, en reconocer los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. En lo que respecto a la modelación matemática fue notoria la dificultad de establecer relaciones entre dos variables para una situación problemática. El análisis de la prueba diagnóstica aparece con más detalle más adelante en el capítulo cuatro.

Entonces se procedió a desarrollar jornadas de repaso con el objeto de superar debilidades encontradas e instar a los estudiantes a reflexionar en torno a las diferentes temáticas motivándoles a construir o reconstruir los conceptos matemáticos que habían desarrollado en los cursos preliminares de cálculo. En esta

segunda acción, el trabajo se realizó de manera individual y grupal dentro del aula de clases y fuera de ella, con tiempos variables según destinara cada grupo.

3.5.2. Etapa De Ejecución

La segunda etapa de la investigación, es decir la de ejecución se realizó una vez que finalizaron las jornadas de repaso. En esta etapa se conformaron cuatro grupos de trabajo de siete estudiantes cada uno, puesto que en esta etapa se habían retirado dos estudiantes. Se finalizaron las nueve sesiones que se diseñaron con 23 estudiantes en total. La selección de los miembros de cada grupo fue aleatoria y fueron grupos estables durante toda la investigación. Se decidió formar grupos estables para que los estudiantes lograsen sentimiento de pertenencia, cohesión al grupo, liderazgo dentro del mismo, repartición de roles, entre otros aspectos.

La dinámica de trabajo con los grupos se realizó en un ambiente cooperativo, científico y de reflexión. Cada estudiante, de manera individual, iniciaba su proceso de lectura comprensiva de la actividad. Luego de siete a diez minutos, conformaban su grupo de trabajo. A partir de ese momento desarrollaban la consigna correspondiente. Esta etapa se caracterizó por la conformación de diferentes estrategias para resolver la situación problema. Al finalizar la clase que duraba de entre dos horas a dos horas y media, los estudiantes entregaban avances consensuados en torno a lo solicitado en la actividad.

Al siguiente día, los estudiantes presentaban el desarrollo completo de la actividad ante el curso, según de acuerdo al turno que les correspondía presentar. Está etapa tuvo un papel relevante en cuanto propició que los estudiantes exploraran caminos alternativos para abordar cada consigna permitiendo que emergieran estrategias algebraicas, geométricas, verbalizaciones y como habilidades cognitivas como las de

visualización, de construcción y reconstrucción de figuras y reconocimiento de patrones.

El profesor, en esta segunda etapa, guió sus procesos de construcción y medió entre las diferentes opiniones de los participantes del grupo para propiciar su reflexión, su trabajo en relación a una o varias estrategias, favoreciendo la construcción de su propio conocimiento.

Durante la investigación hubo grupos de trabajo que necesitaron más apoyo que otros, de modo que fue necesario guiar a unos más que a otros y ofrecerles distintos tiempos para desarrollar cada actividad. Finalizadas sus presentaciones el profesor realizaba una síntesis de lo presentado por los grupos.

3.6. Diseño De La Secuencia De Actividades

La secuencia de actividades consideró trabajos de investigación de Sierpinska (1985, 1987), Artigue (1995), Legrand (1993) y tomó en cuenta algunas de las habilidades cognitivas que proponen las pruebas PISA y TIMMS, entre otras. De las nueve actividades, siete se plantearon en registro de representación geométrica y dos en el registro de representación verbal.

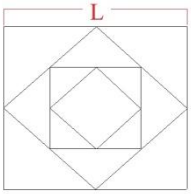
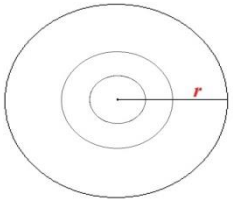
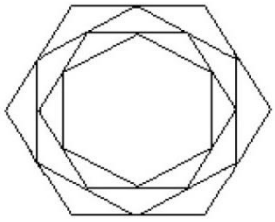
Los contenidos que se abordan en las actividades incluyen el cálculo de diferentes elementos de polígonos y figuras planas tales como el cálculo de longitudes, áreas, perímetros. También consideraron el recurso a sucesiones, sumas finitas e infinitas. Estas se estudiaron previamente en los cursos de álgebra (MM-110) y de geometría y trigonometría (MM-111) y que son requisito para cursar cálculo en la UNAH.

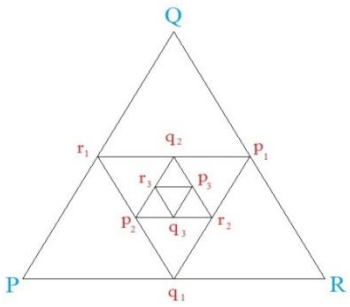
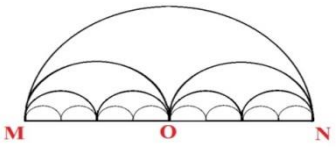
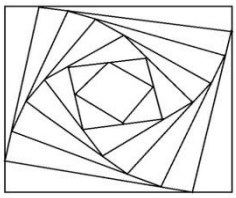
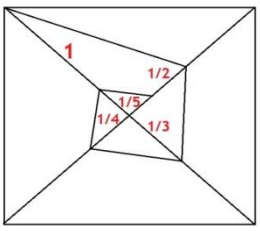
Los objetivos de las actividades diseñadas se orientaron a poner en escena el paso al límite y de modo específico a las nociones de infinito potencial y actual. Las

actividades requirieron al estudiante de habilidades cognitivas necesarias para el pensamiento matemático superior. Con base en tareas de análisis, síntesis, razonamiento lógico y visualización.

A continuación se presentan tres tablas. La primera de ellas muestra cada una de las actividades, la segunda corresponde a las actividades, temáticas, objetivos y habilidades, y, la tercera resume actividades y temáticas con el tipo de pensamiento matemático.

Tabla N° 4: Grupo de actividades de la secuencia desarrollada.

N° de actividad	Descripción de la actividad	Diagrama
1	Uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado L, se obtiene otro cuadrado, en el que volvemos a hacer la misma operación, y así se continua indefinidamente. Calcule el área de los infinitos cuadrados construidos.	
2	Sobre un circulo de radio r, dibuje otro circulo concéntrico de radio r/2, dibuje otro circulo concéntrico a los anteriores de radio r/4y así sucesivamente. ¿Qué sucede con las áreas de los círculos? Justifique su respuesta. ¿Hay alguna sucesión que te pueda ayudar a resolver el problema analíticamente? Si la respuesta es afirmativa, escríbala. ¿Qué otras sucesiones se pueden formar en este problema?	
3	Sobre un hexágono regular, se traza otro hexágono uniendo los puntos medios del primero, enseguida, se traza otro hexágono uniendo los puntos medios del segundo hexágono, y así sucesivamente. ¿Qué sucede con las áreas de los hexágonos? Justifique su respuesta.	

4	PQR es un triángulo equilátero. Se divide cada lado del triángulo en dos partes iguales y se etiquetan los puntos medios como p1, q1 y r1, considerando el triángulo p1 q1 r1, se vuelve a dividir cada lado y se etiquetan los puntos medios como p2, q2 y r2. El proceso se continúa de la misma manera. ¿Cuál será el área de la figura final? Explique su respuesta. Si sumamos las áreas de los triángulos Pq1r1, Rp1q1 y Qp1r1 obtenemos ¾. Si ahora le sumamos las áreas de los triángulos p2q2r1, p1q2r2 y p2q1r2, obtenemos ¾ + 3/16. Si seguimos realizando estas sumas ¿obtendremos un valor? Justifique su respuesta. Si respondió afirmativamente a la pregunta del inciso anterior ¿Cuál es ese valor? Justifique su respuesta.	
5	Se construye un semicírculo con el segmento MN como diámetro. Luego, se divide MN en dos partes iguales MO y NO, y se construyen dos semicírculos como lo indica la figura. Se continua dividiendo y construyendo semicírculos. ¿Qué sucede con la longitud de la línea ondulada a medida que se disminuye la longitud de cada sub-segmento? Explique su respuesta. Si suma las áreas determinadas por los semicírculos a medida que se disminuye la longitud de cada sub-segmento. ¿Obtendrá un valor? Explique su respuesta. Si respondió afirmativamente a la pregunta del inciso anterior ¿Cuál es el valor? Justifique su respuesta.	
6	Partiendo de un cuadrado grande, se traza otro al interior desplazando sus vértices como se observa en la figura: cada vértice esta sobre el lado del primer cuadrado a una distancia igual a 1 cm de su vértice. Se traza otro cuadrado siguiendo el mismo proceso y después otro más y así sucesivamente. ¿Hasta dónde se puede realizar esa construcción?	
7	En un cuadrado cuya diagonal mide 2 unidades se dibuja una espiral como se indica en la figura. Las distancias de los extremos de los segmentos que componen la espiral al centro del cuadrado son 1, ½, ¼, 1/8,… Se dibuja una nueva espiral, pero esta vez, las distancias de los extremos de los segmentos que componen la espiral al centro del cuadrado son 1, ½, 1/3, ¼, 1/5,…	

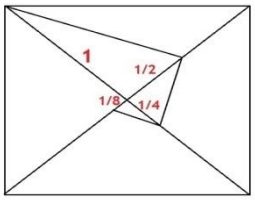
	¿Se puede continuar con la construcción de cada una de las espirales? Explique su respuesta. ¿Cuál es la longitud de cada una de las espirales? Justifique su respuesta. Comparar los problemas y sus resultados.	
8	Una hormiga camina sobre una tira elástica. Inicia en un extremo y recorre 6 cm por minuto. Al inicio, la tira elástica tiene 24 cm. Después de cada minuto, el elástico se alarga 12 cm. Suponga que la tira se puede alargar indefinidamente de manera uniforme. ¿La hormiga llegará al otro extremo de la tira elástica? Explique su respuesta. Si responde afirmativamente, ¿en cuánto tiempo llegará la hormiga al otro extremo?	
9	Dos trenes avanzan uno hacia el otro sobre una vía recta. Al inicio, se encuentran alejados uno del otro una distancia de 100 km. Los trenes van a una velocidad de 50 km/h. Una mosca que se desplaza a una velocidad de 100 km/h parte de uno de los trenes hacia el otro, inmediatamente regresa hacia el primer tren y parte hacia el otro, y así sucesivamente. ¿Qué distancia habrá recorrido la mosca entre el instante inicial y el momento de ser aplastada por el choque de los dos trenes?	

Tabla N° 5: Contrastes entre subgrupo de actividades, temática, propósitos y habilidades cognitivas de las mismas.

Subgrupo de actividades	Temática a desarrollar en las actividades	Propósitos de las actividades	Habilidades cognitivas
De la actividad uno a la cinco. Se les proporciona un reactivo en el registro geométrico.	En las cinco primeras actividades, se trabaja con cuadrados, triángulos, hexágonos, circunferencias, semicircunferencias. Atendiendo a un patrón señalado, se inscriben una sucesión de figuras en una mayor. Se calculan longitudes, áreas, perímetros de las figuras en mención.	Identificar nociones de infinito en su doble perspectiva, potencial y actual. Dar el paso al límite mediante series geométricas. Poner en escena diferentes estrategias de resolución al enfrentarse a sumas infinitas. Recurrir a la visualización en	Argumentar se evidencia cuando los estudiantes inscriben copias concéntricas de la figura original Síntesis se pone de manifiesto cuando los estudiantes suman las áreas de una secuencia de partes para obtener el área total de los infinitos cuadrados construidos.

		el proceso resolución del problema. Transitar diferentes registros de representación, en particular el geométrico, el algebraico-analítico y el verbal.	Razonamiento lógico se evidencia cuando los estudiantes se percatan de patrones y regularidades en conjuntos de áreas, perímetros, longitudes de lados. Visualización en el sentido de descomposición de figuras geométricas en otras menores a las que recurren los estudiantes, también cuando recurren a representar, transformar, documentar y argumentar sus acciones al enfrentarse a una situación problema
Actividad seis y siete. Se les proporciona reactivo en registro geométrico.	La sexta situación está dirigida a determinar si en un cuadrado se pueden inscribir otros, desplazando sus vértices en un centímetro de cada lado y seguir con este proceso de manera infinita. Y la séptima actividad se dirige a la construcción de dos espirales, con el objetivo de determinar si es posible determinar las longitudes de las mismas. Las distancias de los extremos de los segmentos que componen cada espiral al centro del cuadrado son en la primera una sucesión geométrica de razón ½ y en la segunda una sucesión cuya serie es armónica	Reconocer cuando en una situación "se da paso al límite y cuando no". Conocer las diferentes estrategias de resolución que emplean los estudiantes. Detectar la visualización que hacen los estudiantes y el uso y tránsito entre los diferentes registros de representación.	Razonamiento lógico se evidencia cuando los estudiantes elaboren diferentes estrategias para la situación problema Visualización en el sentido de descomposición de figuras geométricas en otras menores que realizan los estudiantes, también cuando recurren a representar, transformar, documentar y argumentar sus acciones al enfrentarse a una situación problema
Actividad ocho y nueve. Se les proporcionan situaciones en	La actividad ocho, con base en la relación existente entre magnitudes de distancia, velocidad y tiempo, bajo	Analizar el desempeño de los estudiantes cuando se enfrenten a diferentes situaciones donde estén	Análisis se refleja cuando el estudiante realiza la descomposición de la ruta inicial de un móvil en otras

registro verbal.	condiciones que parafrasean aquellas de la paradoja de Zenón, pide responder si la hormiga alcanza el otro extremo de un elástico. La actividad nueve plantea un trabajo con velocidades y distancias: dos móviles que avanzan uno hacia el otro y un tercero que les dobla la velocidad y que se mueve de uno al otro. Pueden recurrir a figuras y leyes físicas para resolver, lo que se constituirá en una serie de límite 100.	involucradas las nociones de infinitos y que puedan dar origen al paso al límite. Conocer las estrategias de resolución de la situación problema y los argumentos de resolución. Detectar la visualización que hacen los estudiantes así como el uso y tránsito entre los diferentes registros de representación.	subrutas, con el objeto de brindar una visual de las partes que al final permitan integrar toda la ruta propuesta de la situación problema. Síntesis es utilizada cuando los estudiantes calculan todas las magnitudes de cada subruta y se suman todas las distancias de cada etapa para obtener la distancia total. Razonamiento lógico cuando los estudiantes elaboraran diferentes estrategias de resolución de la situación problema

Tabla N° 6: Contrastes entre subgrupo de actividades, temática y tipo de pensamiento matemático.

Subgrupo	Temática a desarrollar en las actividades	Pensamiento Matemático
De la actividad uno a la cinco. Se les proporciona reactivo en el registro geométrico.	En las cinco primeras actividades, se trabaja con cuadrados, triángulos, hexágonos, circunferencias, semicircunferencias. Atendiendo a un patrón señalado, se inscriben una sucesión de figuras en una mayor. Se calculan longitudes, áreas, perímetros de las figuras en mención.	**Pensamiento geométrico**, dado que las actividades están propuestas en registro geométrico, los estudiantes requieren de habilidades cognitivas para operar con las diferentes figuras, utilizar propiedades y las relaciones entre elementos de las mismas. **Pensamiento variacional**. En estas actividades se pone de manifiesto cuando los estudiantes se enfrenta a diferentes momentos donde tiene que identificar lo que sucede con las longitudes, áreas y perímetros de las figuras construidas, al seguir realizando el proceso de seguir inscribiendo figuras de forma indefinida.

Actividad seis y siete. Se les proporciona reactivo en registro geométrico.	La sexta situación está dirigida a determinar si en un cuadrado se pueden inscribir otros, desplazando sus vértices en un centímetro de cada lado y seguir con este proceso de manera infinita. Y la séptima actividad se dirige a la construcción de dos espirales, con el objetivo de determinar si es posible determinar las longitudes de las mismas. Las distancias de los extremos de los segmentos que componen cada espiral al centro del cuadrado son en la primera una sucesión geométrica de razón ½ y en la segunda una sucesión cuya serie es armónica	**Pensamiento geométrico**, dado que las actividades están propuestas en registro geométrico, los estudiantes requieren de habilidades cognitivas para operar con las diferentes figuras, reconocer sus propiedades y utilizar las relaciones entre diferentes elementos de las figuras. **Pensamiento variacional**. Para estas actividades, el pensamiento variacional se hace evidente cuando los estudiantes construyen otra figura y observan que está última se va haciendo más pequeña, por lo tanto lados, áreas, perímetros cambian sus valores en relación a la figura anterior.
Actividad ocho y nueve. Se les proporciona situaciones en registro verbal.	La actividad ocho, con base en la relación existente entre magnitudes de distancia, velocidad y tiempo, bajo condiciones que parafrasean aquellas de la paradoja de Zenón, pide responder si la hormiga alcanza el otro extremo de un elástico. La actividad nueve plantea un trabajo con velocidades y distancias: dos móviles que avanzan uno hacia el otro y un tercero que les dobla la velocidad y que se mueve de uno al otro. Pueden recurrir a figuras y leyes físicas para resolver, lo que se constituirá en una serie de límite 100.	**Pensamiento espacial.** Se pone de manifiesto a lo largo de las actividades puesto que los estudiantes utilizan sistemas de referencias en relación a ubicaciones específicas. Este sistema referencial a su vez se subdivide en otros más en lo que denominan los estudiantes rutas. **Pensamiento variacional**. En estas actividades se evidencia de este pensamiento en la diferentes rutas en que se desglosa el problema y en donde los estudiantes obtienen diferentes valores para la distancia.

3.7. Procedimiento De Análisis

En esta investigación se recurrieron a dos tipos de análisis: Cuantitativo para la fase diagnóstica y Cualitativo para la fase de ejecución. Ambos análisis se presentan detalladamente y con sus respectivas argumentaciones en el Capítulo 4.

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

4.1. Análisis De La Prueba Diagnóstica

En esta etapa se realiza un análisis de tipo cuantitativo de la prueba diagnóstica aplicada referida a criterio. Interesa determinar la posición de los estudiantes en relación al status absoluto de los entendimientos que se miden. En el análisis que se utiliza interesa responder qué porcentaje de ejecución alcanza el criterio por parte del desempeño del estudiante evaluado. Los reactivos tratan de temáticas que anteceden al límite matemático y que se desarrollaron en cursos previos de álgebra, geometría y trigonometría, temas que se requieren para los aprendizajes del cálculo diferencial. (Ver anexo 1).

Los reactivos del uno al cinco de la primera parte de la prueba diagnóstico abordan expresiones algebraicas de una cantidad de magnitud en función otra, para las figuras de triángulo, rectángulo, cubo, ventana normanda y paralelepípedo sin tapa. Los reactivos seis y siete aluden a la construcción de una gráfica dada una situación en contexto cotidiano. Por su parte el octavo alude al cálculo de imágenes de una función y el noveno solicita que se encuentre el dominio de una función. En el décimo reactivo el estudiante debe trazar la gráfica de cada una de cinco funciones lo que supone que identifique elementos tales como dominio, rango, interceptos, intervalos de crecimiento, intervalo de decrecimiento entre otros. En los reactivos onceavo y doceavo deberá reconocer diferentes elementos de una función dada su representación gráfica. En la tabla N° 5, se especifican los subgrupos de ítems, la temática, los propósitos y las habilidades a desplegar en los ítems.

Esta prueba se aplicó a 30 estudiantes que matricularon el curso de Cálculo I durante el segundo período lectivo del año 2011. Para valorar los desempeños de los

estudiantes, se elaboraron los indicadores o criterios de Resuelto completamente (RC) para los ítems que se resolvieron cumpliendo los objetivos señalados en la tabla N°5, Resuelto Incompleto (RI) para los ítems que no resolvieron completamente de acuerdo a esos objetivos, Resuelto Incorrecto (RIC) para los ítems que no cumplieron ninguno de los objetivos trazados, No Resuelto (NR) para los ítems dejados en blanco.

A continuación se presenta la tabla N° 7, para referirse a los resultados obtenidos por los estudiantes de acuerdo a los indicadores que se mencionaron anteriormente, para el primer subgrupo de ítems (1 al 5), referidos en la tabla N° 5 de la prueba diagnóstica.

Tabla N° 7: Resultados de los ítems 1-5 de la prueba diagnóstica aplicada.

Indicador	Cantidad de estudiantes	Porcentaje (%)
Resuelto Completamente(RC)	8	26.67
Resuelto Incompleto (RI)	12	40
Resuelto Incorrecto(RIC)	10	33.33
No Resuelto (NR)	0	0

Los resultados de la tabla anterior refleja que ocho estudiantes de los treinta desarrollaron los cinco problemas de manera correcta, es decir, que cumplieron los objetivos propuestos en los ítems, doce estudiantes desarrollaron algunos ejercicios de manera correcta pero no llegaron a terminar todos los ítems y diez estudiantes no desarrollaron ningún ejercicio correctamente. De las dificultades encontradas en las

pruebas se detectó que no recuerdan las relaciones de áreas y volúmenes que se les solicitó. También presentan dificultad al modelar la relación entre dos variables, lo que significa que no han desarrollado completamente habilidades de pensamiento matemático tales como comunicar información de la relación entre variables.

En la tabla N° 8, se presentan los resultados de ítems 6 y 7 de la prueba diagnóstica.

Tabla N° 8: Resultados de ítems 6 y 7 de la prueba diagnóstica.

Indicador	Cantidad de estudiantes	Porcentaje (%)
Resuelto Completamente(RC)	2	6.67
Resuelto Incompleto (RI)	10	33.33
Resuelto Incorrecto(RIC)	10	33.33
No Resuelto (NR)	8	26.67

Los resultados de estos ítems reflejan que los estudiantes respondieron de manera incorrecta, no respondieron o respondieron incompleto el problema. Estos tres indicadores señalados, denotan que los estudiantes presentan dificultades para construir gráficas dadas una expresión verbal lo que muestra que el concepto de función no se ha comprendido. Solo dos estudiantes de los treinta pudieron resolver ambos ítems completamente.

En la tabla N° 9, se presentan los resultados del ítem 8 de la prueba diagnóstica.

Tabla N° 9: Resultados del ítem 8 de la prueba diagnóstica.

Indicador	Cantidad de estudiantes	Porcentaje (%)
Resuelto Completamente(RC)	10	33.33
Resuelto Incompleto (RI)	10	33.33
Resuelto Incorrecto(RIC)	5	16.67
No Resuelto (NR)	5	16.67

Este ítem referido a obtener imágenes de funciones para valores reales no presento dificultad, la dificultad se presentó cuando los estudiantes tenían que obtener la imagen para una variable. Como se aprecia en la tabla, cinco de 30 estudiantes contestó incorrecto ambos ítems y cinco estudiantes no respondieron correctamente. Diez estudiantes respondieron completamente ambos ítems y diez estudiantes respondieron pero de manera incompleta los ítems.

A continuación se presentan los resultados del ítem 9 en la tabla N° 10 de la prueba diagnóstica.

Tabla N° 10: Resultado de ítem 9 de la prueba diagnóstica.

Indicador	Cantidad de estudiantes	Porcentaje (%)
Resuelto Completamente(RC)	5	16.67
Resuelto Incompleto (RI)	10	33.33
Resuelto Incorrecto(RIC)	10	33.33
No Resuelto (NR)	5	16.67

Los resultados anteriores reflejan que pocos estudiantes encuentran el dominio de ambas funciones de manera correcta. La mayoría de los estudiantes responden incompleto puesto que resuelven uno y el otro no. También un grupo considerable de estudiantes resuelven de manera incorrecta lo que denota que no logran diferenciar una función de la otra, ni reconocer las restricciones que tienen este tipo de funciones al momento de obtener el dominio.

A continuación se presentan los resultados del ítem 10 de la prueba diagnóstica, referida a encontrar diferentes elementos de las funciones y realizar su gráfica.

Tabla N° 11: Resultado de ítem 10 de la prueba diagnóstica.

Indicador	Cantidad de estudiantes	Porcentaje (%)
Resuelto Completamente(RC)	4	13.33
Resuelto Incompleto (RI)	15	50
Resuelto Incorrecto(RIC)	6	20
No Resuelto (NR)	5	16.67

Los resultados anteriores revelan que gran parte de los estudiantes presentan dificultades y cometen errores para encontrar dominio de la función, graficar funciones, determinar sus elementos tales como intersecciones, intervalos de crecimiento e intervalo de decrecimiento, también en diferenciar la forma de cada una de las gráficas se presentó bastante recurrencia en las respuestas de los estudiantes. Los resultados mostrados en la tabla refleja que solo un pequeño porcentaje de los estudiantes que se les aplicó la prueba diagnóstica resolvieron de manera correcta todos los elementos solicitados en la misma.

A continuación se presentan los dos últimos ítems de la prueba diagnóstica.

Tabla N° 12: Resultado de ítems 10 y 11 de la prueba diagnóstica.

Indicador	Cantidad de estudiantes	Porcentaje (%)
Resuelto Completamente(RC)	2	6.67
Resuelto Incompleto (RI)	8	26.67
Resuelto Incorrecto(RIC)	12	40
No Resuelto (NR)	8	26.67

Los resultados reflejan que solo dos estudiantes de los treinta pudieron resolver correctamente los dos ejercicios. La mayoría de los estudiantes se ubicó en resolver de manera incompleta, doce estudiantes contestaron de manera incorrecta y 8 no contestaron. En los dos últimos casos se observa que los estudiantes presentan dificultades para leer gráficas, interpretación de los valores de pre imágenes, imágenes, estimar soluciones dadas dos gráficas de funciones, reconocer los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de una gráfica.

Los resultados de la prueba diagnóstica aplicada a los estudiantes de Ingeniería de UNAH-TEC Danlí corroboran las dificultades que reporta las investigaciones de Sierpinska (1985, 1987), Artigue (1995, 1998) donde se mencionan dificultades del concepto de función y de sus elementos, modelación matemática entre relación de dos variables, lecturas, construcción y comprensión de gráfica de funciones.

4.2. Presentación Y Análisis De Las Actividades De La Secuencia

En este apartado se exponen los análisis de las producciones estudiantiles, de las nueve actividades desarrolladas en el marco del Estudio. Se presenta un análisis cualitativo por separado para cada una de las actividades por grupo. En cada caso, se describe el propósito de la actividad y, posteriormente, se desarrolla el análisis.

Cada actividad presenta descripción, objetivos que deben lograr los estudiantes. También se presenta la síntesis al final de cada actividad propuesta de acuerdo a los desarrollos presentados por los estudiantes.

4.2.1. Presentación De La Actividad Uno

La actividad presenta un cuadrado de lado "L" que a partir de los puntos medios de los lados se construye otro cuadrado. Este proceso de construcción continúa de manera indefinida. De acuerdo a lo anterior, esta consiga lleva implícita la noción del infinito, de manera específica el infinito potencial (en el sentido de poder añadir un cuadrado más) y del infinito actual (cuando se logra abstraer la cantidad total de cuadrados sin necesidad de construirlos todos).

4.2.1.1. Propósito De La Actividad

La actividad se propone los siguientes objetivos en los estudiantes:

- Calcular las longitudes de los lados de los diferentes cuadrados que construyen mediante la descomposición de las figuras.
- Calcular el área de cada uno de los cuadrados que construyen.
- Identificar la noción de infinito en los procesos de construcción involucrados
- Identificar regularidades en las construcciones que realizan.
- Calcularla suma de las áreas de todos los cuadrados construidos.

4.2.1.2. Las Producciones De Los Estudiantes Por Grupo

El grupo uno (ver anexo tres, actividad uno, grupo uno), se aboca a la tarea de calcular la suma de las áreas de los infinitos cuadrados, pasando por dos momentos:

a) Efectuar el cálculo del área de los cuatro cuadrados que vienen dibujados en la figura que se les presenta. Lo realizan mediante tratamiento en el registro algebraico para poder calcular lados y áreas de los respectivos cuadrados, en articulación con la representación geométrica del enunciado. Es decir, desde el punto de vista de la visualización, los estudiantes son capaces de "reflejar información visual" (Cantoral y Montiel, 2001).

Para lo anterior, a excepción del lado del cuadrado mayor que ya tiene asignada una variable (L), asignan una letra para el lado de cada cuadrado inscrito de la figura (C, m y S respectivamente). Además, exponen para cada caso el cálculo de los respectivos lados y áreas de cada uno de estos cuadrados inscritos, en términos de L, obteniendo:

Tabla N° 13: Magnitudes de cuadrados obtenidos por grupo uno en actividad uno.

Cuadrado	Lado	Área
Cuadrado mayor	L	L^2
Primer cuadrado inscrito	$C = \frac{\sqrt{2}}{2}L$	$\frac{1}{2}L^2$
Segundo cuadrado inscrito	$m = \frac{1}{2}L$	$\frac{1}{4}L^2$
Tercer cuadrado inscrito	$S = \frac{\sqrt{2}}{4}L$	$\frac{1}{8}L^2$

La articulación del registro algebraico (donde efectúan el tratamiento para el cálculo de estos lados y áreas) con la representación geométrica se aprecia cuando calculan - vía Teorema de Pitágoras - los lados (C, m y S respectivamente) que si bien es cierto corresponden a cada lado del respectivo cuadrado inscrito, al mismo tiempo, corresponden a la hipotenusa de los triángulos que se forman al unir los puntos medios de los cuadrados circunscritos que generan a los inscritos (ver Figura N° 2).

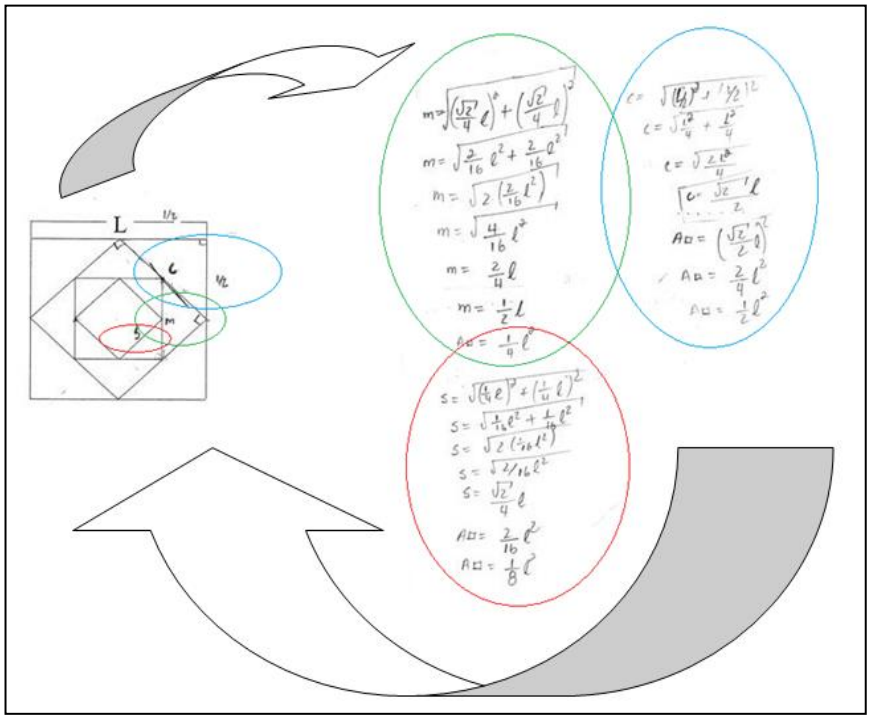


Figura N° 2: Ilustración del método exhaustivo con diferentes polígonos entre el registro geométrico y el algebraico

b) Identificar a las áreas resultantes de los cuatros cuadrados como partes de una serie geométrica convergente. Aquí, el registro geométrico pierde relevancia como referente para la tarea de calcular la suma infinita. Los estudiantes reconocen la razón de la serie (r = ½) y efectúan su cálculo mediante la fórmula usual que se utiliza para ello (ver Figura N° 3).

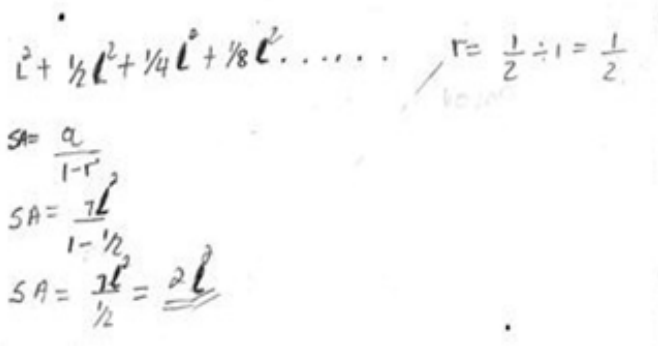


Figura N° 3: Cálculo de la suma de las áreas de los cuadrados obtenidos por grupo uno en actividad uno

Sin embargo, cabe señalar que en su discusión, mientras abordaban la resolución de la situación, vuelven a conectar con el registro geométrico, logrando discriminar el área de los cuadrados inscritos que se van generando con el patrón de construcción de la secuencia, esto es, que cada cuadrado inscrito tiene la mitad del área que el cuadrado que lo circunscribe.

En síntesis, para la construcción de la serie geométrica a la cual le calculan la suma, este grupo utilizó como principal recurso de trabajo, el registro algebraico en articulación con el registro geométrico, actuando en ese proceso como elemento conector, el teorema de Pitágoras (lado del cuadrado inscrito con un doble rol, de lado e hipotenusa).

Por otro lado, este grupo no logra concretar el paso al límite. Reflexionan que se pueden construir muchos cuadrados pero que no se va a llegar a tener un último cuadrado, sosteniendo la imposibilidad de esto en el hecho de que tal cuadrado no podría tener lado cero. En esta última afirmación está implícita la idea de "**tendencia a un valor"** sin llegar a serlo, lo cual obstaculiza el paso al límite (ver figura N° 4).

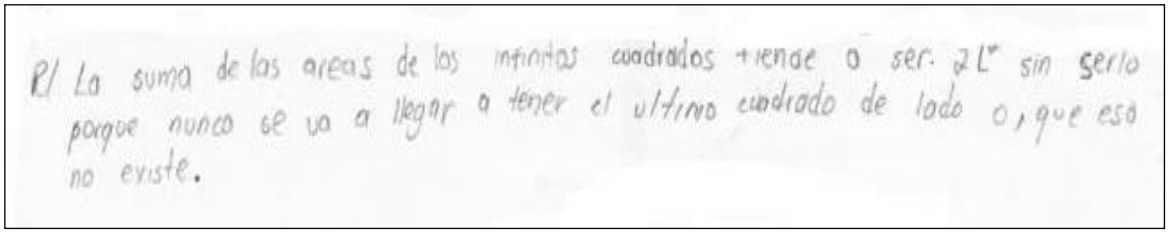


Figura N° 4: Conclusión mediante registro de lenguaje natural de grupo uno en actividad uno

"La suma de las áreas de los infinitos cuadrados tiende a ser $2L^2$ sin serlo porque nunca se va a llegar a tener el último cuadrado de lado 0, que eso no existe"

Cuando ellos dicen ***tiende, se acerca, se aproxima,*** está implícito el paso al límite ¡**Sin embargo no dan este paso!** No capturan ese número **$2L^2$** que ***es el límite*** de la suma infinita de áreas. Señalan que solo "***tiende, se acerca, se aproxima***". Esto ilustra lo reportado por Díaz, L. (1999) como evidencia de la evasión del cognoscere estudiantil de alcanzar el límite. Esta actitud forma parte de una representación sociocultural que funge como obstáculo para capturar un límite matemático como el de este caso, que es una cantidad. La autora acuña la noción de obstáculo sociocultural para esta situación. Cabe señalar que este grupo logra los objetivos en gran medida puesto que lograron calcular elementos de figuras, también calcularon diferentes áreas de los cuadrados, de igual manera obtienen la suma de las infinitas áreas; sin embargo al momento de dar el paso al límite, señalan la palabra" tender" , "aproximación", "cercanía" que mencionó Artigue(1998) en sus investigación.

El grupo dos, presenta el desarrollo de la actividad de la siguiente manera (ver anexo tres, actividad uno, grupo dos).

a) Consideración de las condiciones del problema y en la figura proporcionada escribió el valor del lado de acuerdo a las condiciones del problema.

b) Reconocimiento las propiedades de un cuadrado y observó que se formaba un triángulo rectángulo. Aplicó el Teorema de Pitágoras, para obtener la hipotenusa como se observa, en detalle en la producción de ellos. Al igual que el grupo uno, se recurre a una articulación entre el registro algebraico y el referente geométrico, vía el teorema de Pitágoras. Se muestra en la Figura N° 5.

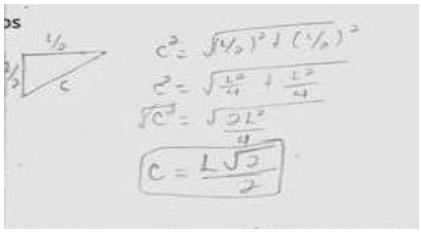


Figura N° 5: Cálculo del valor de la hipotenusa obtenida por grupo dos en actividad uno

Luego afirman: "El área del cuadrado inscrito es igual a la mitad del área del cuadrado circunscrito" y dan paso a la escritura de una serie infinita de áreas, donde los puntos suspensivos dan cuenta nuevamente de la persistencia del infinito potencial.

c) Para culminar la actividad, los estudiantes hacen uso de la expresión para calcular la suma de una serie geométrica resultándoles el valor de $2L^2$ (ver Figura N° 6).

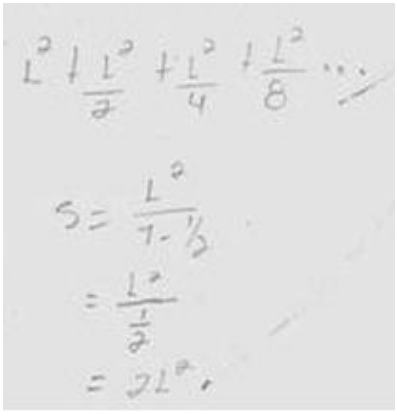


Figura N° 6: Cálculo del valor de la suma de la serie geométrica obtenida por grupo dos en actividad uno

En contraste con grupo uno, este grupo, expone la persistencia del infinito actual mediante el registro algebraico simbólico (con los tres puntos suspensivos) y el grupo 1, mediante un registro de lenguaje natural (vía explicación de llegar a un último cuadrado).

Este grupo no alcanzó los objetivos completamente pero dejaron evidencias del cálculo de las sumas de los infinitos cuadrados y también utilizó el cálculo de elementos de los cuadrados que se plantearon en los objetivos, también calcularon la suma de la serie geométrica sin dar más argumentos en relación al paso al límite. Lo anterior permite conjeturar que los estudiantes no han desarrollado habilidades en relación a argumentar sus procedimientos o solo replican los modelos desarrollados por sus profesores en relación a obtener cálculos numéricos, sin darles una explicación o el sentido de utilidad de los mismos.

El grupo tres, realizó un mayor procedimiento de acuerdo a las evidencias presentadas. El trabajo presentado se muestra en la siguiente secuencia (ver anexo tres, actividad uno, grupo tres).

a) Observación de la figura original proporcionada y atendiendo a las condiciones iniciales de la misma, hicieron un cuadrado inscrito, al cual le colocaron los lados, luego extrapolaron un triángulo rectángulo, al cual identificaron como catetos los valores de la longitud de los puntos medios del cuadrado inicial (ver Figura N° 7).

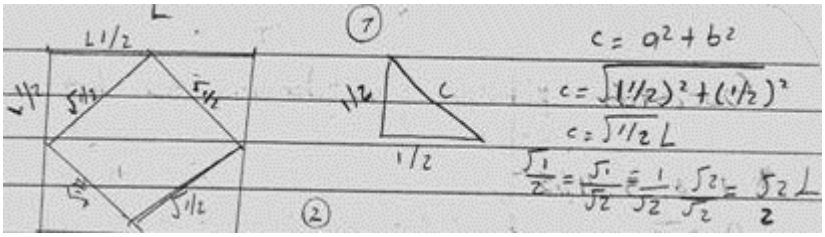


Figura N° 7: Descomposición del cuadrado en triángulos realizada por grupo tres en actividad uno

Este valor de $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ L, calculado en el triángulo que denominaron 1, les ayuda para construir el triángulo 2, donde deben calcular el valor desconocido siendo los catetos $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ L.

b) Construcción de triángulos rectángulos isósceles. Además de los triángulos proporcionados en la figura construyen otro más, con el mismo patrón y le calculan el valor desconocido. Siguen construyendo un triángulo 4, y calculan el valor desconocido (Ver Figura N° 8).

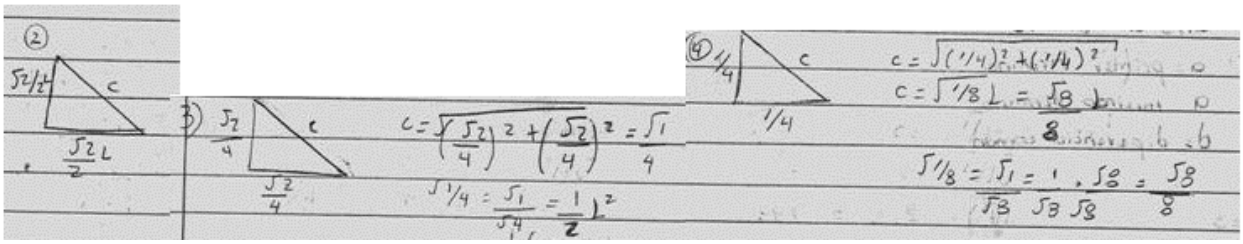


Figura N° 8: Articulación entre registros geométrico y aritmético presentada por grupo tres en la actividad uno

La prioridad de registros a que recurre este grupo, se aprecia entonces que son el aritmético y el geométrico, articulándolos en cada uno de los pasos en que hacen uso de ellos. A diferencia de los grupos 1 y 2, la figura de referencia que se entrega en la situación problema, en este caso, es conectada en todo momento con los cálculos aritméticos. La variable L es incorporada sólo al final de la realización de los cálculos numéricos. Se aprecia así: tratamientos al interior del registro numérico; conversión entre el registro geométrico y numérico, y al final del proceso, llegada al registro algebraico.

c) Cálculo de todos los lados de los cuadrados visibles en la figura de referencia de la situación problema, calculan las áreas de los cuatro cuadrados y, así también, al igual que los grupos anteriores, vía la expresión para la suma de una serie geométrica convergente, obtienen $2L^2$.

Así, este grupo pone en escena una estrategia bastante estructurada e inductiva, en el siguiente sentido:

1. Identificaron patrones en los lados después de haber hecho el proceso cuatro veces.

2. Calcularon la misma cantidad de áreas y una vez que se percatan de los patrones de la razón del área.

3. Utilizaron la expresión para calcular la suma de la serie geométrica convergente.

A diferencia de los grupos uno y dos, llama la atención que los estudiantes luego de calcular, en detalle, las cuatro primeras áreas, al reconocer la "forma" de la serie geométrica (A1, A2, A3, A4) **proceden a calcular inmediatamente su suma, sin problematizar al respecto, sin brindar argumentos para su utilización.** De Lo anterior se puede conjeturar que los estudiantes no consideraron relevante dar argumentos porque consideraron muy obvio el reconocimiento de la serie geométrica

convergente, pero también es razonable pensar que los estudiantes basan sus operaciones exclusivamente en los cálculos y no en el argumento de estos; es decir la utilidad y el porqué de los mismos, lo cual es preocupante puesto que los estudiantes a este nivel deberían contar con la habilidad de argumentación.

Este grupo no explicita en su producción una comprensión relacionada al paso al límite ni tampoco exponen evidencias de manejo con el infinito potencial, lo que denota que los objetivos planteados se lograron parcialmente y que todavía quedan ciertas dudas en la construcción del paso al límite.

El grupo cuatro. El trabajo de ellos se presentó de la siguiente manera (ver anexo tres, actividad uno, grupo cuatro).

a) Usos y tratamiento en registros matemáticos - por exponer conclusiones que daban cuenta de una observación en detalle de lo que provocaba la consigna de la situación problema.

b) Identificación de patrones tanto para el área como para las longitudes de los lados de los cuadrados, comparaciones entre los lados de los cuadrados que se iban obteniendo, e incluso, comparación entre el área del cuadrado original y la suma de las áreas de los infinitos cuadrados, una vez calculada dicha suma, por medio de la suma de la serie geométrica, la cual reconocen. (Ver Figura N° 9).

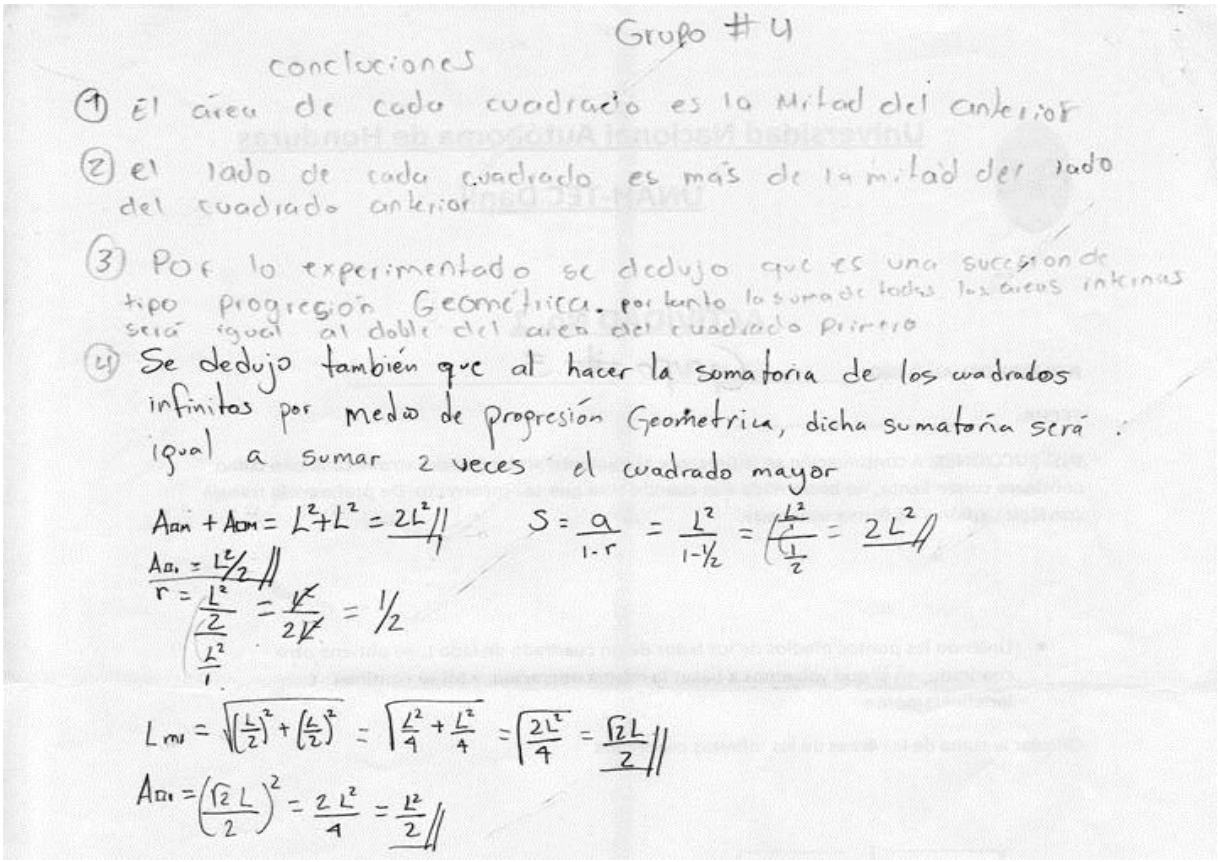


Figura N° 9: Conclusiones en diferentes registros del grupo cuatro referentes a la actividad uno

c) Argumentación verbal con respecto a la conclusión de la actividad.

"Se dedujo también que al hacer la sumatoria de los cuadrados infinitos por medio de progresión geométrica, dicha sumatoria será igual a sumar 2 veces el cuadrado mayor" .Lo anterior refleja que utilizaron deducción para calcular la suma de las áreas de los infinitos cuadrados construidos y hacer la comparación respectiva con el área del cuadrado original.

En su aseveración evidencian que pudieron dar el paso al límite a pesar que no hacen muchos cálculos con respecto a las áreas, mediante su registro verbal manifiestan de manera implícita un manejo del infinito potencial, sin que este se torne un obstáculo para dar el paso al límite. Al respecto Duval (1999) menciona que un objeto matemático se construye cuando se utilizan al menos dos registros de representación y hay una conversión entre los mismos. En este caso particular, los estudiantes utilizaron registro algebraico y registro verbal. Este grupo logra los objetivos de la actividad y además presenta en su desarrollo evidencias de la utilización de la argumentación en el desarrollo de su actividad.

A manera de síntesis de lo desplegado por los estudiantes en sus producciones, ellos:

- Distinguieron el infinito potencial, al asociarlo por ejemplo con procesos que no terminan o también cuando producto de algunas discusiones se llega a consenso que, en el caso de esta actividad, pueden seguir construyendo cuadrado indefinidamente.
- Afirmaron que si construyen una cantidad "n" de cuadrados, este cuadrado ""n" tendrá un área mucho menor que el cuadrado original y que algún momento este cuadrado "n" tendrá una longitud muy cercana a cero y por consiguiente su área se aproximará a cero.
- Afirmaron que el área del cuadrado posterior será la mitad del anterior y que en algún momento al seguir construyendo cuadrados esta tendrá un valor muy pequeño en relación al área del cuadrado original.
- En esta primera actividad, los estudiantes usan "**tiende", "se aproxima", "se acerca"** al momento de obtener el área de los infinitos cuadrados que construyeron.
- La visualización fue vital durante toda la actividad, puesto que al construir de manera gráfica, varias veces les permitió observar con mayor detalle el tamaño, las características de cada cuadrado construido y de este modo deducir, comparar las áreas de los mismos.

4.2.2. Presentación De La Actividad Dos

En la actividad se presentan tres círculos concéntricos en registro geométrico. El círculo de mayor tamaño tiene radio "r". A su vez el siguiente círculo tiene la mitad de radio que el círculo anterior, se continúa con un tercer círculo con la mitad del radio del segundo círculo y se continúa el proceso de manera indefinida. La actividad propone que los estudiantes resuelvan desafíos, en particular que logren reflexionar en relación a la noción de infinito y en los procesos que continúan sin terminar.

4.2.2.1. Propósito De La Actividad

La actividad tiene implícita ciertas tareas y objetivos específicos que los estudiantes deben lograr. Estos son:

- Calcular las áreas de los infinitos círculos concéntricos y comparar cada una de estas áreas con el área del círculo inmediatamente anterior.
- Reconocer patrones en la construcción de los círculos concéntricos con respecto al radio, longitud de circunferencia y área del círculo.
- Identificar las nociones de los infinitos implicados en la situación problema y el acercamiento al paso al límite en contextos de geometría sintética.
- Utilizar diferentes registros de representación mediante diferentes estrategias de resolución.

4.2.2.2. Las Producciones De Los Estudiantes

Grupo uno (ver anexo tres, actividad dos, grupo uno)

Se observan los siguientes momentos en el desarrollo del trabajo de los estudiantes.

a) Utilización del registro algebraico (al efectuar los cálculos de las áreas de las circunferencias) y, además, recurren al registro de lenguaje natural para expresar la **relación numérica existente entre el área de cada círculo interno con respecto al área del círculo anterior** (ver Figura N° 10).

Figura N° 10: Patrón de las áreas de las circunferencias observadas por el grupo uno en actividad tres

Es decir, reconocen el patrón en relación a que "las áreas de los círculos se van reduciendo a ¼ con respecto al anterior". Podemos decir que este patrón numérico "¼ con respecto al anterior" funge como generador del proceso infinito involucrado en esta situación problema.

Resulta interesante notar que, no obstante que los estudiantes calculan el área sólo de los tres círculos que se presentan en la figura.

b) Reconocimiento de la serie geométrica y este patrón numérico, al expresar la serie, agregan una cuarta área, la cual no fue no tuvieron necesidad de calcularla previamente, sino que la obtienen a partir del reconocimiento del patrón numérico, y más aún, dan el sentido que la serie sigue (…). Se presenta así, una faceta del infinito a la manera potencial expresada en un registro algebraico (Ver Figura N° 11).

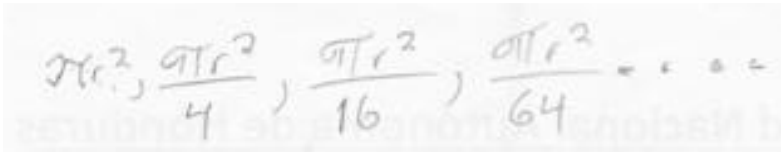


Figura N° 11: Secuencia de las áreas de las circunferencias presentadas por el grupo uno en actividad dos

Luego, al igual que en la actividad uno, habiendo reconocido la serie se abocan a calcularla.

En cuanto al paso al límite, al igual que en la actividad 1, este grupo nuevamente no logra capturar el infinito actual ni, por consiguiente, el paso al límite. Vuelve a argumentar sobre la imposibilidad de que la suma de las áreas alcance un número: (Ver Figura N° 12).

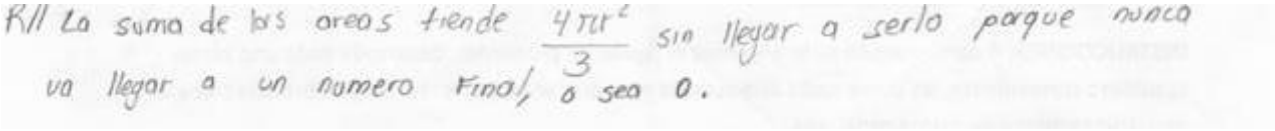


Figura N° 12: Suma de las áreas de las infinitas circunferencias construidas obtenidas por grupo uno en actividad dos

Artigue (1998) presentó resultados en relación a su investigación y uno de ellos es que los estudiantes se les dificulta al momento de pasar de las igualdades a las aproximaciones por lo cual el límite es según la autora un objeto matemático que les dificulta su comprensión. También Sierpinska (1985) había presentado resultados de esta misma dificultad que Artigue posteriormente reporta.

Grupo dos

Realizan las siguientes acciones en el trabajo desarrollado en la actividad. (Ver anexo tres, actividad dos grupo dos).

a) Cálculo del área de los tres círculos concéntricos. Proceden de manera similar que el grupo uno, en cuanto calculan el área de tres círculos.

b) Reconocimiento de patrón numérico y de la serie geométrica. El reconocimiento del patrón numérico (1/4) lo manifiestan mediante el registro de lenguaje natural, refiriéndose también a este patrón como "el 75%". Es decir, sin necesidad de efectuar un tratamiento en el registro numérico, evocan de modo instantáneo o natural ambas representaciones numéricas. A su vez, llama la atención que al referirse a ¼ usan el vocablo **"representa"** *(¼ del círculo)* en tanto que al referirse a 75% usan el vocablo **"disminuye"** *(un 75% del área del…")*. Así, en este grupo, lo variacional se manifiesta de mejor manera, en el registro de lenguaje natural, mediante la representación numérica porcentual (75%). Lo que denota es que este grupo se aboca a pensamiento de tipo variacional en sus respuestas por lo que se conjetura que presentan evidencias de desarrollo de pensamiento variacional y de habilidades de argumentación. También puede decirse que se refleja un manejo de los registros algebraico y numérico, puesto que por un lado están calculando área de circunferencias y, a su vez, calculando razones y porcentajes, dando cuenta del registro numérico.

c) Cálculo de la suma de dicha serie, sin dar mayor explicación al respecto. Por su parte, para el cálculo de la serie geométrica, el infinito potencial se refleja sólo en el uso de los puntos suspensivos, sin embargo, el grupo no plantea argumentos al respecto. Sólo se limita a calcular el valor para la suma, no dejando ver un acercamiento al infinito actual ni da el paso al límite, con lo que podemos inferir que no se cumplieron a cabalidad los objetivos de la actividad, en especial del paso al límite.

Grupo tres

Presentan su trabajo de la siguiente manera. (Ver anexo tres, actividad dos, grupo tres).

a) Énfasis en la figura proporcionada en la actividad, Con esto, poniendo en escena la idea de infinito potencial, mediante dos registros, a saber:

1. El geométrico. Asignando los radios que se indican en el problema y dibujando un cuarto círculo adicional a los ya dados por la actividad. (Ver Figura N° 13).

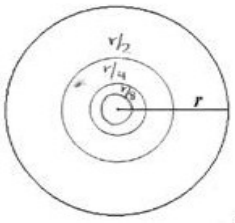


Figura N° 13: Circunferencias concéntricas y sus respectivos radios señalados por grupo tres en actividad dos

2. El algebraico. Al calcular el área de cinco círculos concéntricos, en lugar de sólo los tres dados por la figura original. (ver figura N° 14)

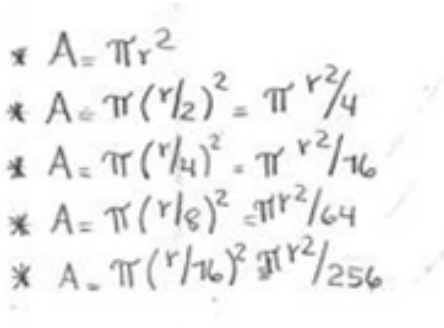


Figura N° 14: Secuencia de las áreas de las circunferencias calculadas por el grupo tres en actividad dos

b) Reconocimiento vía el registro algebraico, dos formas de dejar de manifiesto la idea de infinito potencial: una mediante secuencias de expresiones con un señalamiento de continuidad a través de "puntos suspensivos" y, otra, al generar más expresiones algebraicas de las que propicia una situación visual-geométrica pre-establecida.

En cuanto al infinito actual, no hay ningún tipo de alusión a éste en el desarrollo escrito de este grupo, ni tampoco dan cuenta del paso al límite, por lo que los objetivos no se lograron a cabalidad. Sólo se limitan a calcular la suma de la serie geométrica una vez calculada la razón: (Ver Figura N° 15).

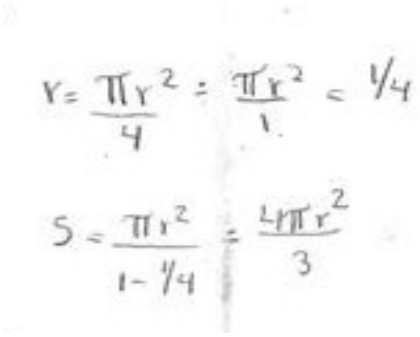


Figura N° 15: Cálculo de la suma de las áreas de las circunferencias obtenida por el grupo tres en la actividad dos

Grupo cuatro

El desarrollo de la actividad en este grupo se presenta a través de dos momentos. (Ver anexo tres, actividad dos, grupo cuatro).

a) Exposición de conclusiones mediante registro en lenguaje natural en relación con aspectos variacionales relacionados a la situación problema (ver Figura N° 16).

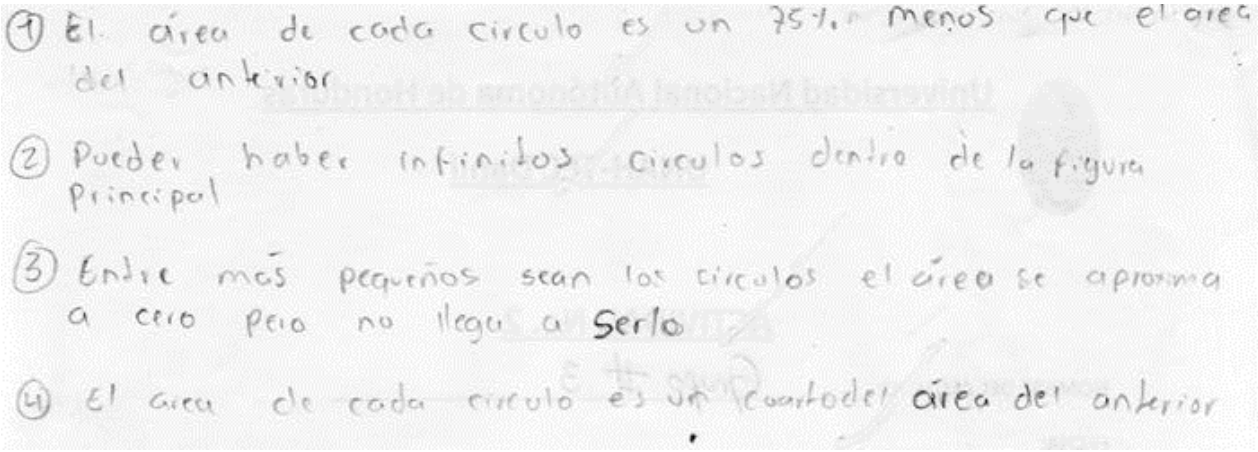


Figura N° 16: Conclusiones de la actividad mediante registro verbal presentada por grupo cuatro en actividad dos

A partir de lo anterior, podemos distinguir, que el grupo pone en escena:

1. La identificación del patrón numérico. "… es un 75% menos que…""es un cuarto del área del anterior".

Frases que indican un uso fluido del infinito potencial. "el área de cada círculo es (…) el área del anterior" "pueden haber infinitos círculos dentro de…" "entre más pequeños son los círculos…"

Cierta aproximación (implícita) a la idea de infinito actual. "Pueden haber infinitos círculos **dentro de la figura principal**". Señalamos aproximación, en el sentido que la figura principal estaría logrando *encapsular a todos esos círculos*.

Cabe señalar, a su vez, que pierden de vista la consigna de la situación, que es calcular la suma del área de todos los círculos, pues sus conclusiones, en el tenor ya descrito, apuntan a las áreas de los círculos que se generan en lugar de a la suma de las áreas de tales círculos. En ese contexto, no obstante como ya se señaló en c), que hay cierta aproximación al infinito actual, queda, a su vez de manifiesto - de su textualidad, "entre más pequeños son los círculos el área se aproxima a cero pero no llega a serlo…" - que no logran el paso al límite.

2. En cuanto al uso de registros, se reduce a dos, el de lenguaje natural y el algebraico, recurriendo a éste último tan sólo para expresar el área de los círculos (Ver Figura N° 17).

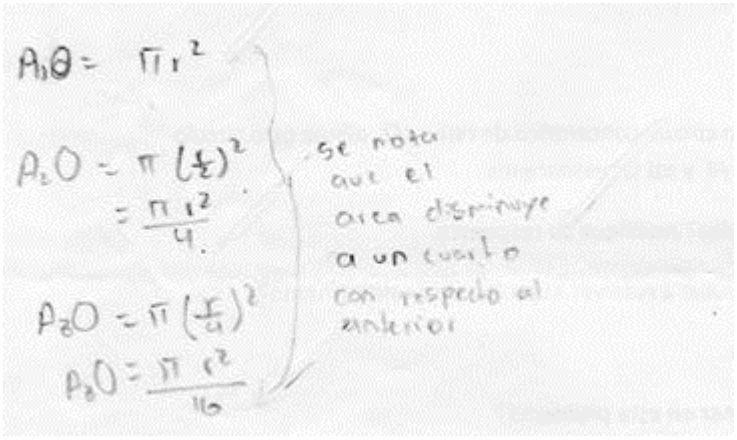


Figura N° 17: Patrón del área de circunferencias obtenida por el grupo cuatro en la actividad dos

A Manera de síntesis de lo desplegado por los estudiantes en sus producciones, ellos:

• Comprenden el proceso de construcción mediante un manejo del infinito potencial. En variados registros, asientan que se puede construir una y otra y otra circunferencia concéntrica a la original y *siempre pueden seguir haciendo este proceso*.

• Identificaron un patrón numérico en la construcción donde reconocen que la siguiente circunferencia construida será más pequeña y por lo tanto su área menor.

- Asumieron que pueden encontrar las sumas de las áreas porque hay un patrón, en las circunferencias concéntricas y se trata de la serie geométrica de razón $\frac{1}{4}$.

- Recurren al registro algebraico sin problemas para obtener las áreas solicitadas, considerando las condiciones iniciales del problema, obteniendo πr^2, $\frac{1}{4}\pi r^2$, $\frac{1}{16}\pi r^2$, $\frac{1}{64}\pi r^2$ y así sucesivamente.

- Se acercaron a una idea de infinito actual, sin lograr capturarlo con precisión, específicamente el grupo cuatro.
- Recurrieron a la visualización cuando construyeron más circunferencias y dedujeron patrones de la construcción.

4.2.3. Presentación De La Actividad Tres

La actividad tres está focalizada en la temática de polígonos, específicamente en la de hexágonos. La actividad está desplegada en el registro geométrico y se les solicita a los estudiantes calcular áreas de hexágonos, en donde es necesario que obtengan el valor de diferentes elementos del hexágono.

4.2.3.1. Propósito De La Actividad

Al igual que las actividades anteriores, esta actividad está orientada a que el estudiante logre integrar conocimientos preliminares con nuevos conceptos, de manera que les permitan estabilizar las nociones de infinitos, en sus dos facetas a saber, la potencial y actual. La actividad lleva implícita los siguientes objetivos:

- Calcular áreas de polígonos, específicamente de hexágonos y sus diferentes elementos tales como: longitudes, áreas de triángulos equiláteros.
- Reconocer patrones de construcción en los polígonos, en lo referente a longitudes, áreas, entre otros.

- Analizar los procesos que continúan sin culminar y como estos ayudan al acercamiento de las nociones de infinitos en sus dos facetas.
- Promover la interacción de los diferentes registros de representación mediante el recurso de geometría sintética y las estrategias de resolución del problema.

4.2.3.2. Las Producciones De Los Estudiantes Por Grupo

Grupo uno

Trabajo de la actividad desarrollado de la siguiente manera. (Ver anexo tres, actividad tres, grupo uno).

a) Atención focalizada en la figura de la actividad y en los elementos de la misma.

Extrapolan un triángulo de la misma de acuerdo al siguiente diagrama. Ellos recurren a la manera de visualización de Cantoral y Montiel (2001) que contempla hacer uso de información visual y la transformación de esta. (Ver Figura N° 18).

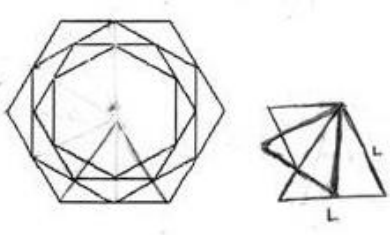


Figura N° 18: Descomposición del hexágono en triángulos realizada por el grupo uno en actividad tres

Los estudiantes reconocen propiedades particulares del hexágono regular y su descomposición en triángulos equiláteros. Ellos en su accionar en la actividad se mueven en el registro algebraico y hacen tratamientos en su interior. Se observa que en esta primera fase de la actividad que los estudiantes recurren a dos momentos específicos:

1. Efectuar el cálculo del área del hexágono. Lo realizan reconociendo la relación de congruencia existente entre la altura del triángulo anterior y el lado del triángulo posterior. Ellos en su accionar en la actividad se mueven en el registro algebraico y hacen tratamientos en su interior.

2. Este grupo encuentra el área de tres hexágonos apoyándose en la descomposición de triángulos rectángulos que se mencionan anteriormente. En la siguiente Tabla se resume la actividad.

Tabla N° 14: Magnitudes de hexágonos obtenidos por grupo uno en la actividad tres.

Hexágono	**Lado**	**Área Triángulo**	**Área Hexágono**
Primero	L	$\frac{\sqrt{3}}{4}L^2$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$
Segundo	$\frac{\sqrt{3}}{2}L$	$\frac{3\sqrt{3}}{16}L^2$	$\frac{9\sqrt{3}}{8}L^2$
Tercero	$\frac{3}{4}L$	$\frac{9\sqrt{3}}{64}L^2$	$\frac{27\sqrt{3}}{32}L^2$

En esta actividad se observa que hay tratamientos algebraicos cuando recurren a los cálculos para obtener lados y áreas. Cabe señalar que hay conversión de registros, de manera específica entre el registro geométrico y algebraico cuando los estudiantes lograron vincular la relación de congruencia existente entre la longitud del lado del triángulo anterior con respecto a la altura del triángulo posterior. Esto se traduce que los estudiantes lograron percibir esta relación de congruencia que se señala en la figura.

3. Identificar las áreas resultantes de los tres hexágonos como partes de una serie geométrica convergente. Aquí, el registro geométrico pierde relevancia como referente para calcular la tarea de calcular la suma infinita. Los estudiantes reconocen la razón de la serie ($r = \frac{3}{4}$) y efectúan el cálculo mediante la fórmula para ello. Se observa en la Figura N° 19.

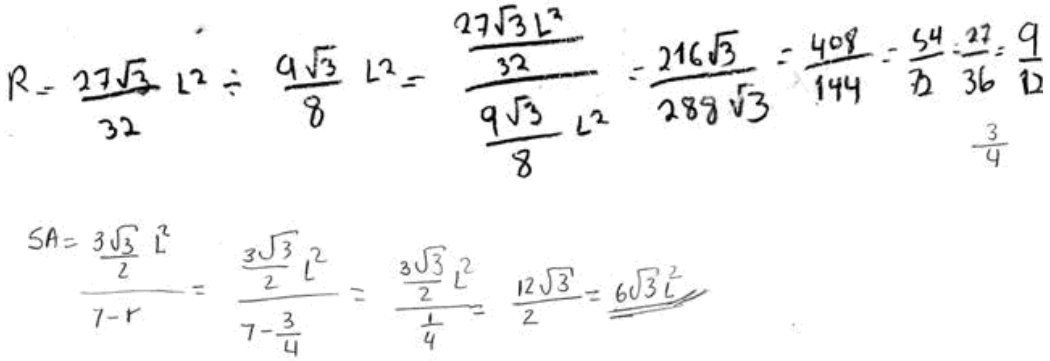


Figura N° 19: Cálculo del área de los hexágonos obtenido por el grupo uno en actividad tres

En síntesis, este grupo obtuvo la suma de las áreas de los infinitos hexágonos que les resultó $6\sqrt{3}$ L^2. También ellos presentan sus conclusiones con respecto a las áreas de los hexágonos en la (Ver Figura N° 20).

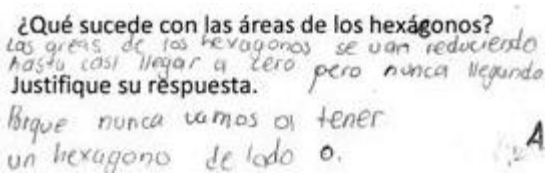


Figura N° 20: Conclusiones de la actividad en registro verbal de grupo uno de actividad tres

b) La segunda fase del desarrollo de la actividad, se denomina **Reconocimiento de regularidades en las áreas.** Con respecto al área, ellos sostienen que a medida que se van construyendo más hexágonos inscritos, estos van reduciendo ***"su área hasta casi llegar a cero "sin llegar a serlo"***. Esta afirmación que realizan los estudiantes nos denota la noción del límite con la connotación de cercanía, sin embargo no logran dar el paso al mismo. Lo que hace pensar que únicamente se quedan en la faceta del infinito potencial y no logran abstraer el proceso del infinito actual que menciona Díaz, M. (2009) referido en el apartado del paso al límite.

Lo anterior implica que tanto las dificultades que Tall (1980, 1992) y Hitt (2003) siguen reflejándose con respecto a lograr captar el infinito desde su doble faceta. Estos autores proponen que el infinito se debe trabajar desde temprana edad, sin evitar los obstáculos que estos impliquen a los niños, para que a mayor edad estos hayan construido esta noción y les sea de utilidad en temáticas posteriores.

Grupo dos (ver anexo tres, actividad tres, grupo dos).

El trabajo desarrollado de este grupo se muestra en dos momentos. (Ver anexo tres, actividad tres, grupo dos).

a) Descomposición de la figura original.

Los estudiantes de este grupo, recurren a la visualización, puesto que hacen uso de la información visual y descomponen la figura original. Lo anterior implica que han logrado habilidades de visualización que les permitió que dibujaran triángulos. Además reconocieron la semejanza de triángulos y calcularon el valor de la longitud del lado del segundo hexágono inscrito que se presentó en la consigna. (Ver Figura N° 21)

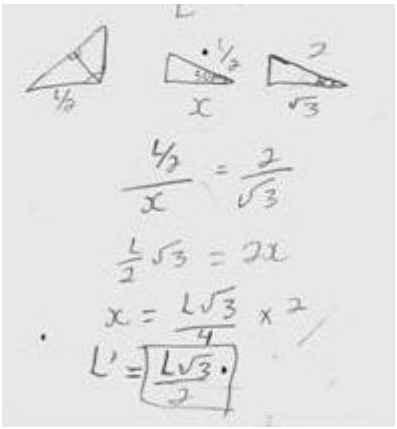


Figura N° 21: Cálculo de la longitud de un lado de un triángulo por semejanza realizada por grupo dos en actividad tres

b) Realización de trabajo en registros de representación.

Los estudiantes trabajaron en el registro gráfico, realizándole tratamientos algebraicos al mismo. A diferencia del grupo anterior, este grupo calcula el área de dos hexágonos que les permite inferir en la regularidad de un patrón para identificar la serie geométrica que les permite calcular su suma. Lo anterior implica que los estudiantes lograron captar la secuencia de construcción de las figuras tanto en las longitudes, áreas de cada una de las construidas permitiéndoles obtener una razón en la construcción de los hexágonos. En la Figura N° 22, se muestra la razón calculada.

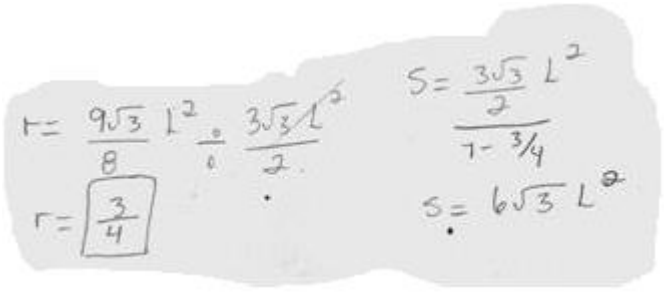


Figura N° 22: Cálculo de la razón y la suma de las áreas de los hexágonos obtenida por grupo dos en actividad tres

Se observa que los estudiantes únicamente reconocen el patrón para abocarse a la serie geométrica. Finalizan la actividad presentando algunas conclusiones mediante lenguaje natural con respecto a las áreas de los hexágonos. Señalan *"Van disminuyendo, el segundo representa un 75% del primero, es decir disminuye un 25% y así sucesivamente"*. Lo cual nos proporciona evidencias de estrategias estudiantiles que hacen uso del recurso variacional de porcentaje, en el sentido de comparar entre elementos consecutivos que forman parte de una secuencia presentada en el contexto de geometría sintética, puesto que los estudiantes están realizando comparaciones entre una y otra área.

En el currículo por competencias, el reconocimiento de patrones y comparación de cantidades forma parte de la temática de los diferentes pensamientos tanto el numérico, algebraico, variacional y geométrico.

La afirmación "así sucesivamente", nos hace inferir que es un vocablo que se utiliza en nuestra cotidianeidad y es otra manera que los estudiantes incluyen en su lenguaje natural para darnos a conocer que un proceso continúa sin parar. En este caso particular esta afirmación nos podría representar la faceta del infinito potencial. Con respecto al infinito actual no se encuentran evidencias en las producciones de

este grupo ni tampoco del paso al límite por lo que los objetivos de la actividad no se lograron a cabalidad por parte de los estudiantes.

Grupo tres

Los estudiantes de este grupo, recurren al registro algebraico, con tratamientos a su interior. Este grupo ha estructura su trabajo en dos fases. (Ver anexo 3, actividad tres grupo tres).

a) La primera fase que incluye el cálculo de longitudes de lados, apotemas y áreas del hexágono se presenta en la Tabla.

Tabla N° 15: Magnitudes de los hexágonos obtenidos por grupo tres en actividad tres.

Hexágono	Lado	Apotema	Área
Hexágono grande	x	$\frac{\sqrt{3}}{2}x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$
Primer Hexágono Inscrito	$\frac{\sqrt{3}}{2}x$	$\frac{3}{4}x$	$\frac{9\sqrt{3}}{8}x^2$
Segundo Hexágono Inscrito	$\frac{3}{4}x$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}x$	$\frac{27\sqrt{3}}{32}x^2$
Tercer Hexágono Inscrito	$\frac{3\sqrt{3}}{8}x$	$\frac{9}{16}x$	$\frac{81\sqrt{3}}{128}x^2$
Cuarto Hexágono Inscrito	$\frac{\sqrt{3}}{2}x$	$\frac{9\sqrt{3}}{32}x$	$\frac{243\sqrt{3}}{512}x^2$

b) Identificar a las áreas resultantes de los hexágonos como partes de una serie geométrica convergente . Los estudiantes del este grupo encuentran una regularidad en las áreas de los hexágonos. Calculan la razón y la suma de las infinitas áreas de los hexágonos inscritos descritos en la actividad, en la Figura N° 23.

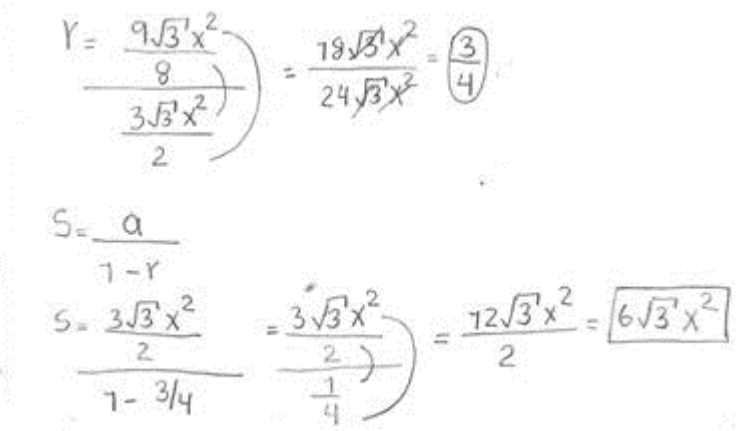


Figura N° 23: Cálculo de la razón y la suma de las áreas de los hexágonos obtenida por grupo tres en actividad tres

También presentan conclusiones de la actividad. Sostienen que las áreas van disminuyendo a razón de tres cuartos en relación al área del hexágono anterior. Para el grupo, entre más hexágonos se construyen, las longitudes de los lados del hexágono y su área disminuye (ver Figura N° 24).

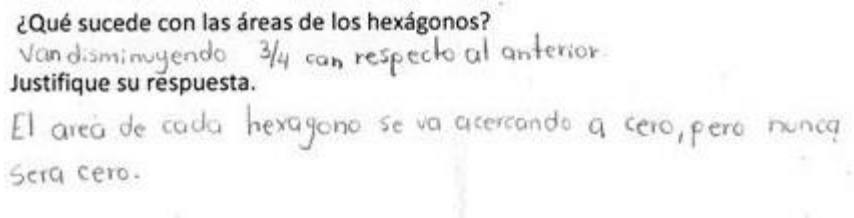


Figura N° 24: Conclusión con respecto a las áreas de los hexágonos en lenguaje natural por el grupo tres en actividad tres

Manifiestan que el área va "***acercándose a cero, sin llegar a serlo***". Afirmación en la cual, como ya se ha señalado, se tiene presente la noción del infinito potencial que menciona Díaz (2009), pero no la faceta actual del infinito ni el paso límite. Lo anterior implica que hay procesos que no se madurado completamente y en los cuales hay que seguir trabajando con los estudiantes.

El trabajo de los infinitos Tall (1980, 1992) mencionó que se debe comenzar a trabajar con los niños desde temprana edad para evitar que a medida el tiempo pase sean mayores las brechas en la construcción.

Grupo cuatro

El trabajo desarrollado se presenta de la siguiente manera. (Ver anexo tres, actividad tres, grupo cuatro).

a) Énfasis en registro geométrico. Al igual que el grupo anterior, este grupo hace uso del registro geométrico y de tratamientos algebraicos en su interior. Ellos utilizan la semejanza para calcular los lados de los triángulos y luego calculan el área de los mismos. Este proceso lo realizan dos veces, tal como se aprecia en la Figura N° 25.

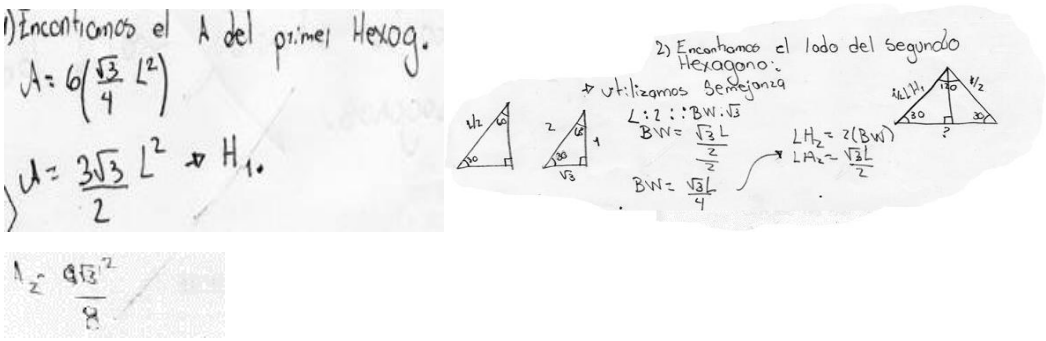


Figura N° 25: Cálculo de longitudes y áreas de triángulos obtenida por grupo cuatro en actividad tres

b) Conclusiones en el registro verbal. Las conclusiones de la consigna se detallan en la Figura N° 26.

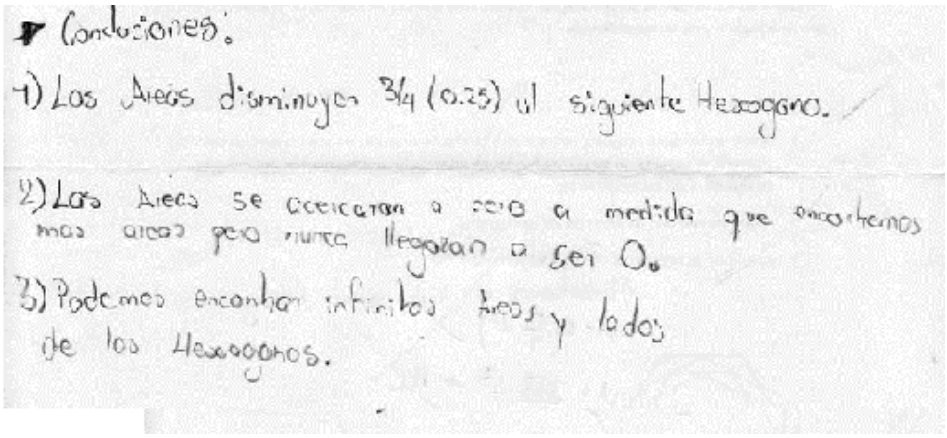


Figura N° 26: Conclusiones mediante registro verbal del grupo cuatro en actividad tres

Se puede distinguir que las argumentaciones de los estudiantes tienen implícita la noción de infinito potencial en el sentido de encontrar infinitas áreas. La noción del infinito actual no aparece ni el paso al límite explicitado. Sin embargo se quedan en la noción de límite como un acercamiento cuando aseveran que las áreas ***"se acercan a cero".*** Este grupo no logra los objetivos de la actividad completamente, contrastándose con los resultados que obtuvo Artigue (1998) en relación al obstáculo de trabajar igualdades y aproximaciones.

A manera de síntesis de lo desplegado por los estudiantes reportado en sus producciones, ellos:

- Realizaron cálculos extensos en algunos casos, donde se ha evidenciado el dominio de las clases previas en lo referente a propiedades de hexágonos y de triángulos equiláteros.

- Calcularon las áreas de los hexágonos $\frac{3}{2}\sqrt{3}L^2, \frac{9}{8}\sqrt{3}\ L^2, \frac{27}{32}\sqrt{3}\ L^2$ y continúan este patrón hasta el área del "n" hexágonos construidos a la manera de infinitos hexágonos.
- Calcularon las sumas de las áreas de los infinitos hexágonos una vez que identificaron la serie geométrica, siendo el área total de los infinitos hexágonos $6\sqrt{3}$ L^2.
- Expresaron que el proceso de construir un hexágono otro más y otro, lo podían continuar haciendo indefinidamente. Esta es la noción de infinito potencial conocida desde la antigüedad, el cual a su vez disminuía su lado en $\frac{\sqrt{3}}{2}$, en consecuencia el área cada vez se iba haciendo menor a razón de $\frac{3}{4}$ del área hexágono anterior.
- Concluyeron en relación a las áreas en que algún momento esta se iba a hacer tan pequeño aproximándose a casi cero fue expresada por los grupos al momento de compartir su actividad.
- Realizaron diferentes estrategias de resolución del problema. En las estrategias que emergieron en la resolución se observan registros de lenguaje natural, algebraicos y geométricos.

4.2.4. Presentación De La Actividad Cuatro

La actividad está diseñada en el registro geométrico y el foco de atención de la misma está en la división de un triángulo equilátero PQR en cuatro triángulos equiláteros. Luego cada uno de los cuatro triángulos equiláteros se subdivide en cuatro triángulos equiláteros más y este proceso de continuar dividiendo de esta manera se continúa de manera indefinida. A diferencia de las actividades anteriores tiene la característica particular de adjudicar un valor numérico a las áreas iniciales de las cuales se comienza a trabajar en adelante.

4.2.4.1. Propósito De La Actividad

La actividad tiene objetivos definidos que los estudiantes deben lograr. Estos objetivos son:

- Aplicar sus conceptos previos de geometría plana y reforzarlos mediante el trabajo colaborativo que permitan estabilizar la división de una figura, en otras figuras congruentes entre sí.
- Reconocer los patrones en las áreas de los triángulos que se van obteniendo después de cada proceso de división.
- Utilizar la serie geométrica para calcular la suma de las infinitas áreas de los triángulos que propone la actividad.
- Identificar las nociones de los infinitivos en sus facetas, a saber, potencial y actual que les redunde en el paso al límite.
- Resolver la situación problema mediante diferentes estrategias de resolución.

4.2.4.2. Las Producciones De Los Estudiantes Por Grupo

Grupo uno (ver anexo tres, actividad cuatro, grupo uno)

El desarrollo de la actividad, la realizan en dos fases. (Ver anexo tres, actividad cuatro, grupo uno).

a) Los estudiantes encuentran una relación de las áreas cada vez que se dividen los triángulos. Este grupo inicia la actividad observando detenidamente la figura original y las condiciones iniciales del problema. En esta etapa establecen sucesiones de áreas cada vez que siguen dividiendo. Esto a relación se muestra en la Figura N° 27.

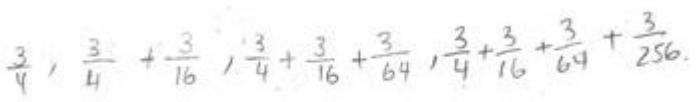


Figura N° 27: Sucesiones numéricas de las áreas de los triángulos expresada por grupo uno en actividad cuatro

Esta fase la trabajan en el registro geométrico con tratamientos aritméticos. A diferencia de sus tres actividades anteriores, el grupo en esta ocasión no echa mano a recursos de visualización geométrica, al menos explicitándolo mediante dicho registro. No obstante, se logra distinguir **un trabajo articulado entre el registro geométrico y el registro numérico**, utilizando una estrategia de análisis "local" basado en: *prestar atención a uno de los cuatro triángulos en que se va subdividiendo el triángulo del centro que se obtiene en cada fase de la secuencia.*

Para ir calculando el área que corresponde a cada fase, multiplican el área de uno de los triángulos por 3, tal como se aprecia en la Figura N° 28.

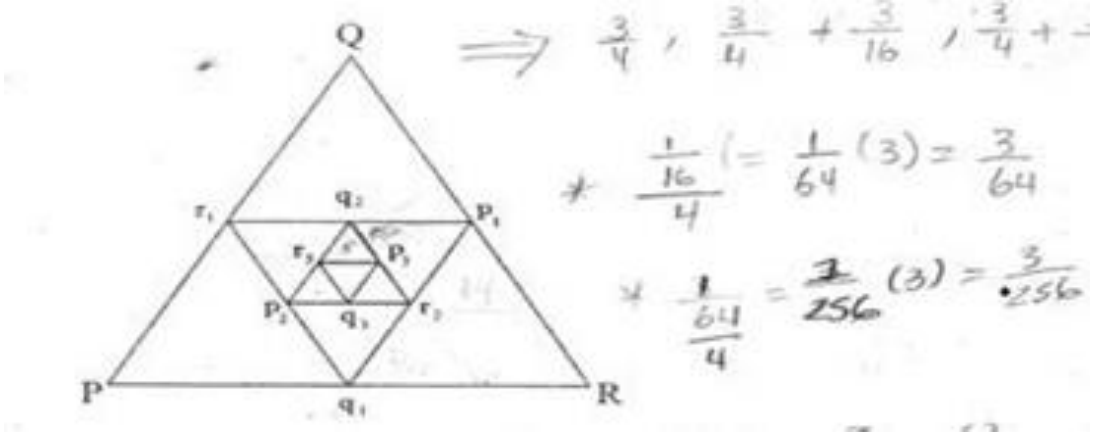


Figura N° 28: Cálculo de patrones de las áreas de los triángulos obtenida por grupo uno en actividad cuatro

b) Identificar a las áreas resultantes de las sucesiones de áreas calculadas como constituyentes de la serie geométrica convergente. En la Figura N° 29 los estudiantes ofrecen sus resultados de los calculos de radio y suma de la serie.

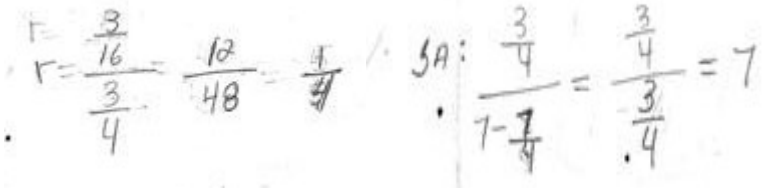


Figura N° 29: Cálculo de la razón y la suma de las áreas de los hexágonos obtenida por grupo uno en actividad cuatro

En relación a las preguntas de la actividad, los estudiantes presentan en la Figura N° 30 sus conclusiones.

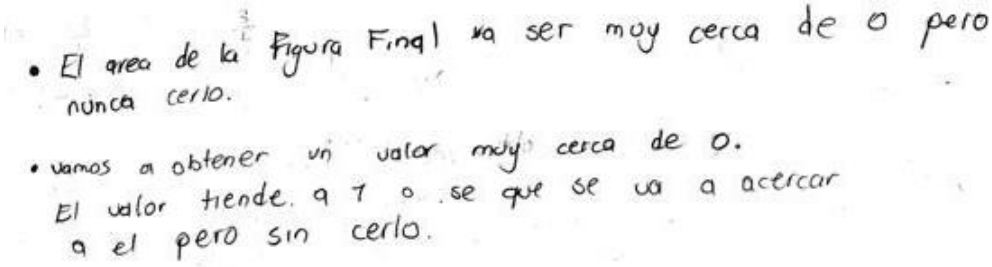


Figura N° 30: Conclusiones mediante registro verbal de grupo uno en actividad cuatro

Lo anterior refleja que los estudiantes después de hacer muchos hexágonos, encontrarán un hexágono que tendrá área cercana a cero "***sin llegar a serlo".*** En relación al área de los infinitos hexágonos construidos los estudiantes encuentran un valor que ***"tiende a uno sin llegar a serlo".*** *Ambas afirmaciones que hacen los estudiantes es aproximarse a la captura del límite sin dar el paso al límite. Esto evidencia que no hay acercamiento a la noción de infinito actual que plantea Díaz, M. (2009).*

Grupo 2 (ver anexo tres, actividad cuatro, grupo dos)

El trabajo lo desarrollan en dos etapas. (Ver anexo tres, actividad cuatro, grupo dos).

a) Cálculo de áreas de triángulos. Los estudiantes del grupo realizan su trabajo centrado en el registro geométrico y realizan tratamientos de carácter algebraico en su interior. Los estudiantes reconocen propiedades de triángulos equiláteros y calculan tres de éstas. La Figura N° 31 ilustra los cálculos.

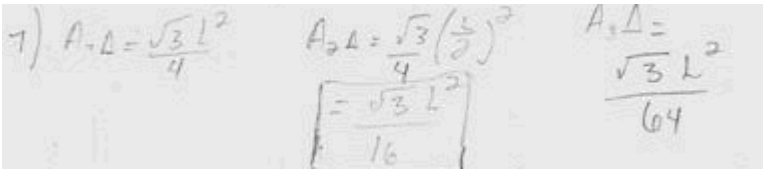


Figura N° 31: Cálculo de las áreas de los triángulos obtenida por grupo dos en actividad cuatro

En esta fase el trabajo es en el registro algebraico y se recurre a las expresiones para calcular las mismas.

b) Identifican las áreas resultantes de los triángulos como partes de una serie geométrica convergente. Los estudiantes identifican un patrón en las áreas calculadas de los triángulos, la cual les ayuda a identificarla serie geométrica. A esta serie le calculan la suma. En la Figura N° 32 se ilustra.

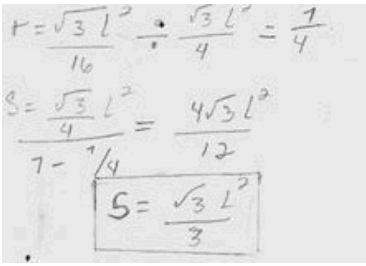


Figura N° 32: Cálculo de la razón y la suma de las áreas de los hexágonos obtenida por grupo dos en actividad cuatro

Este grupo a pesar que no llegó a la respuesta correcta de la consigna, mencionan que el área de los triángulos va disminuyendo, esto implica un acercamiento a la noción de la faceta potencial del infinito pero no del paso al límite.

En la afirmación de la Figura N° 33 el grupo se refiere a una **"figura final"** y al hecho de que ésta **"tenderá a 0"**, es decir, implícitamente, identifican que se puede encapsular el proceso infinito a la manera de un infinito actual (Ver Cantor, en el Apartado de Infinito).

Figura N° 33: Conclusiones mediante registro verbal de grupo dos en actividad cuatro

Grupo tres

Trabajo desarrollado por este grupo en la siguiente secuencia. (Ver anexo tres, actividad cuatro, grupo tres).

a) Presentación de evidencias mediante registro verbal.

Los estudiantes de este grupo no presentan evidencias de cálculos de la actividad, sin embargo presentan conclusiones con respecto a la consigna de la actividad. Se conjetura que los procedimientos se obviaron o se realizaron en otra hoja y que únicamente presentaron las conclusiones de la consigna en la hoja proporcionada para ese fin. Las conclusiones las presentan en el lenguaje natural. En la Figura N° 34 se detallan las mismas.

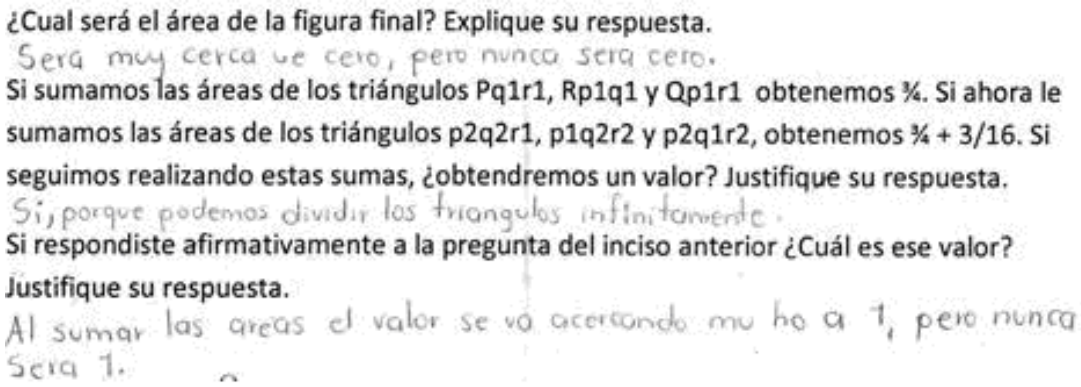

¿Cual será el área de la figura final? Explique su respuesta.
Sera muy cerca de cero, pero nunca sera cero.
Si sumamos las áreas de los triángulos Pq1r1, Rp1q1 y Qp1r1 obtenemos ¾. Si ahora le sumamos las áreas de los triángulos p2q2r1, p1q2r2 y p2q1r2, obtenemos ¾ + 3/16. Si seguimos realizando estas sumas, ¿obtendremos un valor? Justifique su respuesta.
Si, porque podemos dividir los triangulos infinitamente.
Si respondiste afirmativamente a la pregunta del inciso anterior ¿Cuál es ese valor? Justifique su respuesta.
Al sumar las areas el valor se va acercando mu ho a 1, pero nunca sera 1.

Figura N° 34: Conclusiones mediante registro verbal de grupo tres en actividad cuatro

b) En relación a conclusiones de las nociones de infinito y del paso al límite.

La presencia de la noción del infinito potencial está presente cuando hacen referencia a la construcción de la posibilidad de "***dividir los triángulos indefinidamente***". Al referirse al área de la figura final hablan ***"será muy cerca de cero, pero nunca cero***", al igual cuando expresan al ***"sumar las áreas el valor se va acercando mucho a 1, pero nunca será uno"***.

En las dos últimas aseveraciones que hacen los estudiantes hay acercamiento al límite sin llegar a dar el paso al mismo, se quedan en la aproximación sin dar el salto al mismo. No obstante, llama la atención que el grupo sí se refiere a **"el valor",** esto junto a su respuesta positiva de la segunda pregunta, donde afirman que sí es posible obtener un valor de la suma, se aprecia que hay pequeños indicios del infinito actual, a saber, **aceptan la existencia de ese valor.**

Grupo cuatro

Trabajo desarrollado en la siguiente secuencia. (Ver anexo tres, actividad cuatro, grupo cuatro).

a) Énfasis en lo visual.

Los estudiantes de este grupo se abocan a la consigna por una estrategia más visual, a la manera de la visualización que hacemos referencia en el marco teórico.Los estudiantes dividen el triángulo que se les proporciona y lo subdividen en trángulos congruentes como sea necesario. Este trabajo geométrico que efectúan los estudiantes da cuenta que utilizan la idea de infinito potencial sin problemas, es decir, se percatan que el proceso de construcción sigue y maniobran con ello, en este caso, mediante el registro geométrico. Lo mismo se aprecia mediante el registro aritmético, donde escriben cifras que no se corresponden a la figura inicial sino que a la construcción que efectuaron en el ámbito geométrico. En la Figura N° 35, se observa el desarrollo del grupo.

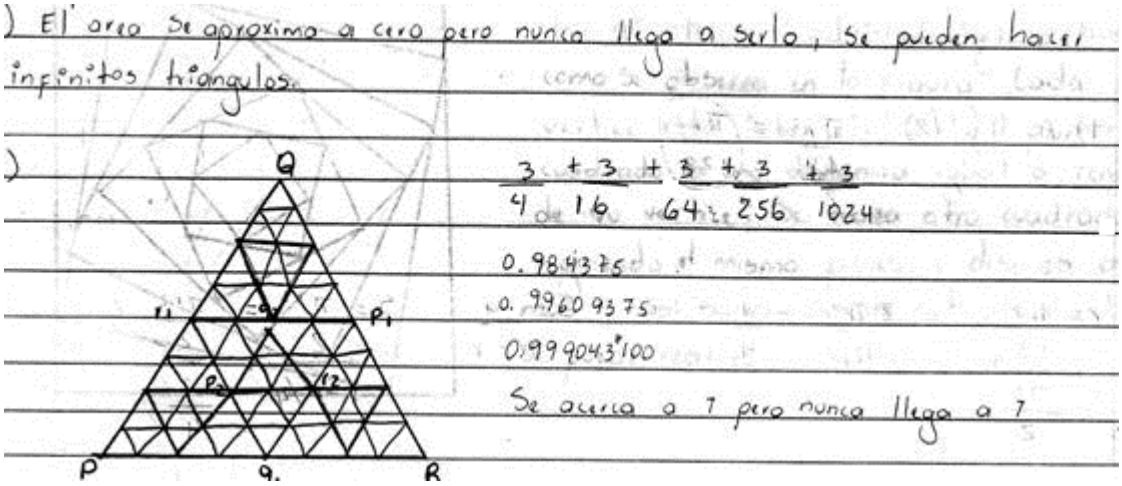


Figura N° 35: Conclusiones en diferentes registros con respecto a la suma de las áreas de los triángulos de grupo cuatro en actividad cuatro

Es decir, usan tratamientos de tipo numérico articulando con el registro geométrico. Así lo refleja su producción.

b) Presentación de conclusiones en relación a infinitos y el paso al límite.

En las conclusiones de la actividad expresan que pueden construir infinitos triángulos y que el área de estos se van aproximando a cero. Esta aseveración hecha por los estudiantes presenta la noción potencial del límite.

Con respecto al área de la figura final, los estudiantes responden que el área ***"se aproxima a cero pero nunca llega a serlo.",*** esta frase que utilizan los estudiantes denota la no apropiación del paso al límite a pesar de la proximidad de éste. Se evidencia la dificultad reportada por Artigue (1998) y de Sierpinska (1985) en relación a diferencia de trabajar de igualdades a desigualdades.

A manera de síntesis de lo desplegado por los estudiantes, reportado en sus producciones, ellos:

- Reconocieron las nociones de los infinitos, en particular de la faceta potencial. Expresiones de continuar una vez más, seguir y seguir son propias de la mayoría de los estudiantes que participaron en la actividad.
- Reconocieron de patrones que les permitieron identificar la serie geométrica y calcular la suma de lo solicitado.
- Concluyeron que se trataba de dividir un triángulo equilátero en cuatro triángulos equiláteros congruentes a este primero. Luego se selecciona el área de tres de ellos. El siguiente paso era dividir cada uno de los triángulos equiláteros anteriores y dividirlos en cuatro equiláteros más y seguir el proceso indefinidamente. De lo anterior, resultaba el área $\frac{3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{3}{64}$ y así sucesivamente, progresión geométrica con suma igual a uno.
- Presentaron diferentes estrategias que al final les conducía al mismo valor con respecto a la suma de los infinitos triángulos equiláteros. Cabe destacar que los Grupos uno y cuatro, mediante diferentes estrategias, efectúan una articulación entre el registro geométrico y numérico, haciendo uso - de modo implícito – de la idea de infinito potencial en sus desarrollos. Para el caso del Grupo uno la estrategia fue multiplicar por tres el área correspondiente a uno de los triángulos que se obtenían al dividir por cuatro el triángulo del centro de la fase previa, y en el caso del grupo cuatro, la articulación se observó al incorporar en la suma cálculos numéricos de áreas que corresponden a triángulos que dibujaron detalladamente en el triángulo que originalmente proveía la situación problema.

4.2.5. Presentación De La Actividad Cinco

La actividad está focalizada en semicircunferencias y se presentada en el registro geométrico. Se les proporciona a los estudiantes una semicircunferencia inicial MN que a su vez se subdivide en dos semicircunferencias congruentes más, MO Y NO, que continúan subdividiendo en semicircunferencias congruentes de manera indefinida.

4.2.5.1. Propósito De La Actividad

La actividad tiene objetivos definidos en que los estudiantes deben lograr. Estos objetivos son:

- Construir circunferencias atendiendo al patrón de construcción de la actividad que menciona la actividad.
- Reconocer los patrones de las longitudes de las semicircunferencias y de las áreas de cada semicircunferencia construida en cada proceso de subdivisión.
- Calcular la suma de la longitud de las infinitas semicircunferencias que implica la actividad.
- Distinguir las nociones de infinitos en sus dos facetas, potencial y actual.
- Presentar diferentes estrategias de resolución de la situación problema.

4.2.5.2. Las Producciones De Los Estudiantes Por Grupo

Grupo uno

La consigna la presentan mediante la siguiente secuencia. (Ver anexo tres, actividad cinco, grupo uno).

a) Efectuar el cálculo del área y del perímetro de las cinco semicircunferencias que calcularon. En esta etapa, los estudiantes realizaron acciones dentro del registro algebraico y sus tratamientos a su interior son algebraicos se incluyen las operaciones para calcular perímetro y área. La síntesis de los cálculos se presenta en la Tabla N° 16.

Tabla N° 16: **Resumen de magnitudes de semicircunferencias calculadas por grupo uno en actividad cinco.**

Semicircunferencia	**Radio**	**Perímetro**	**Área**
Original	r	$\frac{1}{2}\pi r$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Primera Subdivisión	$\frac{1}{2}r$	$\frac{1}{4}\pi r$	$\frac{\pi r^2}{8}$
Segunda Subdivisión	$\frac{1}{4}r$	$\frac{1}{8}\pi r$	$\frac{\pi r^2}{32}$
Tercera Subdivisión	$\frac{1}{8}r$	$\frac{1}{16}\pi r$	$\frac{\pi r^2}{128}$
Cuarta Subdivisión	$\frac{1}{16}r$	$\frac{1}{32}\pi r$	$\frac{\pi r^2}{512}$

b) Identificación de los perímetros y áreas de las semicircunferencias como partes de una serie geométrica convergente. Los estudiantes reconocen la relación existentes entre las semicircunferencias y el proceso de subdivisión de estas. Significa que la primera semicircunferencia está compuesta por otras dos semicircunferencias, en la primera división. Luego estas semicircunferencias obtenidas están formadas cada una por otras dos más y así continúa el proceso de división de manera indefinida.

En base a los cálculos obtenidos, los estudiantes forman la serie geométrica a la cual le calculan la suma, tal como se muestra a continuación en la Figura N° 36.

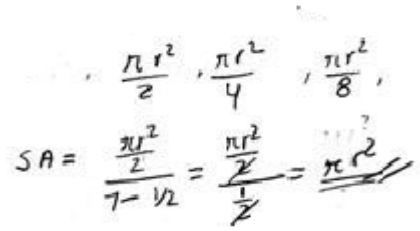


Figura N° 36: Cálculo de la suma de áreas de las semicircunferencias obtenida por grupo uno en actividad cinco

Los estudiantes hacen cálculos para obtener la suma de la serie geométrica; sin embargo, no se proporciona otro argumento para el mismo. Ellos se circusncriben en la expresión para obtener el cálculo respectivo.

A manera de conclusión , los estudiantes presentan en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**37 sus respuestas las preguntas de la consigna de la actividad.

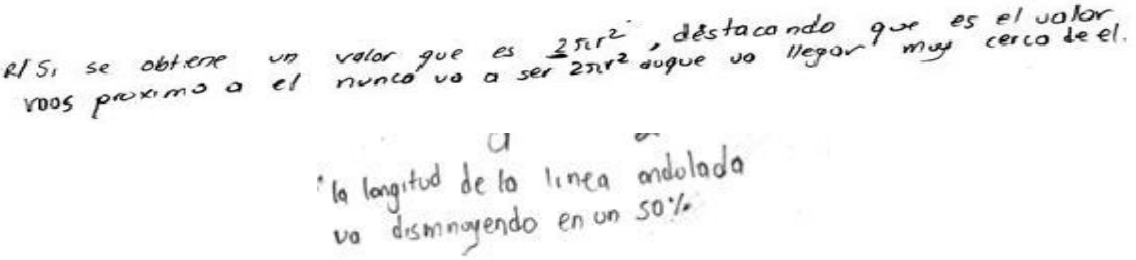


Figura N° 37: Conclusión mediante registro verbal de la suma de las áreas de las semicircunferencias obtenida por grupo uno en actividad cinco

En lo anterior se refleja la noción del límite amanera de aproximación está presente pero "***sin llegar a dar el paso el paso al mismo"***. Los estudiantes se quedan en el concepto "***se aproxima***". En relación del perímetro contestan que la línea ondulada cuando se reduce en un 50% cuando se realiza el proceso de subdividir las semicircunferencias. En esta afirmación se encuentra presenta dos elementos la variación por una parte al comparar las longitudes de las semicircunferencias y por otra el acercamiento a la noción del infinito potencial.

Grupo dos

Este grupo aborda la actividad en dos etapas.

a) Calculan el área de tres semicircunferencias. Recurren al registro algebraico y realizan tratamientos en su interior para el cálculo de áreas de tres semicircunferencias. Los cálculos se presentan en la Figura N° 38.

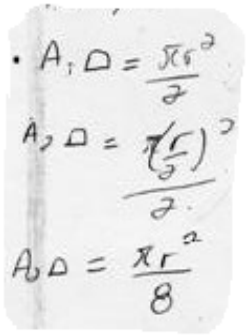


Figura N° 38: Cálculo de las áreas de semicircunferencias obtenidas por grupo dos en actividad cinco

b) Identifican que las áreas que calcularon forman una serie geométrica convergente. Calculan la razón y la suma de la serie geométrica, así como también algunas conclusiones de la consigna que se presentan en la Figura N° 39.

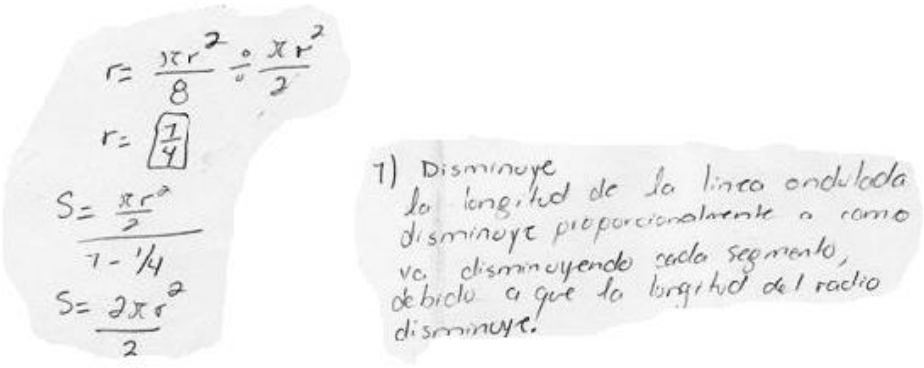


Figura N° 39: Cálculo de las razones y áreas de las semicircunferencias obtenida por grupo dos en actividad cinco

De lo anterior se puede interpretar que en la media que el radio de la semi circunferencia disminuye también lo hace la longitud de la línea ondulada (perímetro del semicírculo). En esto señalado aparece la variación puesto que logran identificar proporcionalidad directa entre el radio y la longitud de la línea ondulada. También los estudiantes logran establecer relaciones de congruencia entre el semicírculo original y los dos semicírculos que resultan al subdividirse. En la Figura N° 40, se presenta esta conclusión vertida por los estudiantes.

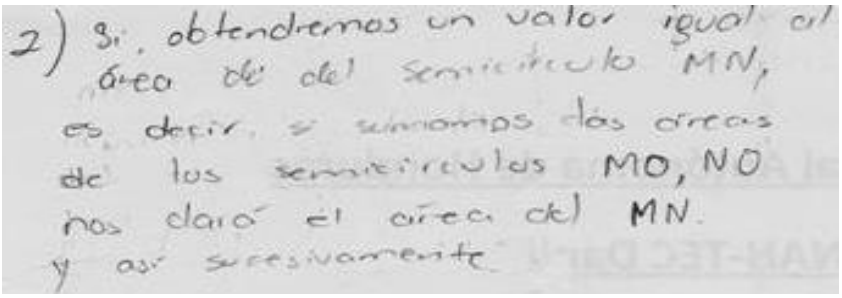


Figura N° 40: Conclusiones mediante registro verbal de grupo dos en actividad cinco

Grupo tres

Al igual que el grupo anterior, presentan la actividad en dos fases. (Ver anexo tres, actividad cinco, grupo tres).

a) La primera fase hace uso del registro algebraico y presenta tratamientos al interior del mismo. Esta fase expresa el cálculo de longitudes de las semicircunferencias que consideran. En la Tabla N° 17, se presenta la síntesis de sus cálculos.

Tabla N° 17: Resumen de magnitudes de las semicircunferencias obtenidas por grupo tres en actividad cinco.

Semicircunferencia	**Radio**	**Perímetro**	**Área**
Original	r	$\frac{1}{2}\pi r$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Primera Subdivisión	$\frac{1}{2}r$	$\frac{1}{4}\pi r$	$\frac{\pi r^2}{8}$
Segunda Subdivisión	$\frac{1}{4}r$	$\frac{1}{8}\pi r$	$\frac{\pi r^2}{32}$

Tercera Subdivisión	$\frac{1}{8}r$	$\frac{1}{16}\pi r$	$\frac{\pi r^2}{128}$
Cuarta Subdivisión	$\frac{1}{16}r$	$\frac{1}{32}\pi r$	$\frac{\pi r^2}{512}$

b) Basados en sus cálculos identifican un patrón que les permite deducir que es una serie geométrica, la relación existente entre las áreas de las diferentes semicircunferencias que se han calculado. Se obtiene la razón y la suma de la serie que se presenta en la Figura N° 41.

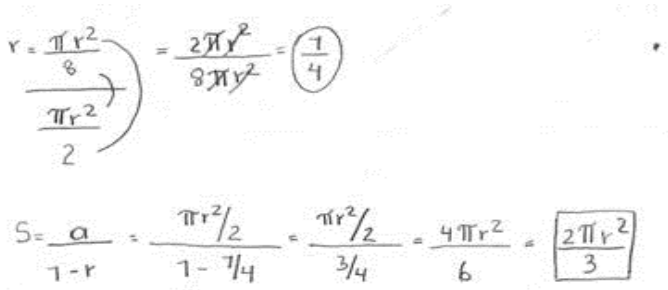


Figura N° 41: Cálculo de la razón y de la suma de las semicircunferencias obtenida por grupo tres en actividad cinco

El grupo finaliza su actividad, concluyendo en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** 42. En base a sus cálculos, expresan las siguientes respuestas a las preguntas solicitadas.

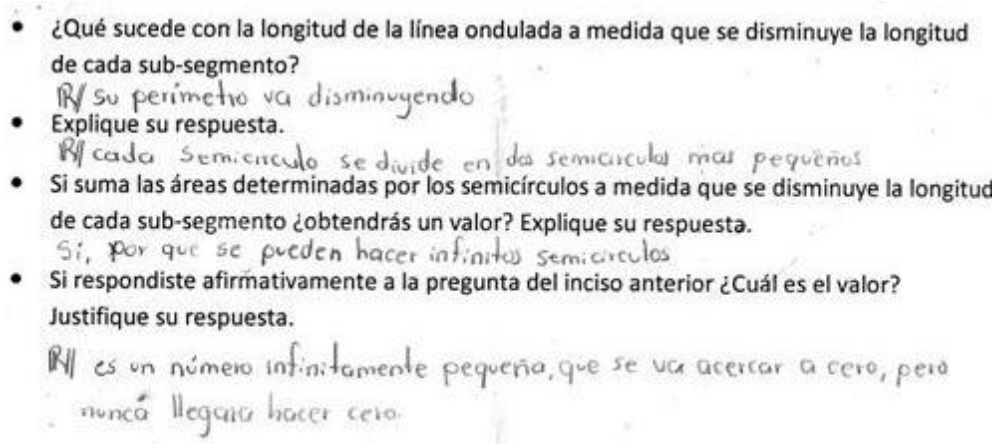


Figura N° 42: Conclusiones mediante registro verbal de grupo tres en actividad cinco

El perímetro va disminuyendo, quiere decir que establecen una relación de lo que sucede cuando el radio disminuye, esto es que también el perímetro disminuye. Identifican una variación directa entre ambas magnitudes. También expresan que se pueden construir infinitas semicircunferencias es decir que la idea del infinito potencial está presente.

Por su parte, en la aseveración que esgrimen en su respuesta a la cuarta pregunta, cuando refieren **"es un número infinitamente pequeño"** puede apreciarse que hay una significación incipiente acerca del infinito actual, puesto que logran tipificar la suma de las áreas como una cantidad.

Los estudiantes expresan un acercamiento al límite, cuando argumentan que el área de esa última semicircunferencia sería "u***n valor muy pequeño cercano a cero"***. En esa afirmación aparece el concepto de límite a manera de aproximación ***sin lograr dar el paso al mismo.*** Los estudiantes logran identificar que cada semicircunferencia construida genera a su vez a dos semicircunferencias congruentes en un proceso de división que se hace de manera indefinida.

Grupo cuatro

En el trabajo desarrollado por este grupo, se distinguen las siguientes etapas. (Ver anexo tres, actividad cinco, grupo cuatro).

a) Inician con la observación de la figura de la consigna puesto que le asignan valores de las longitudes de las figuras que aparecen en la actividad. Cabe señalar que este grupo hace una variante en relación a los demás que utilizan el radio. Ellos colocan "D" para referirse al diámetro de las dos semicircunferencias mayor. En la Figura N° 43, se muestra el detalle de asignación de la variable D.

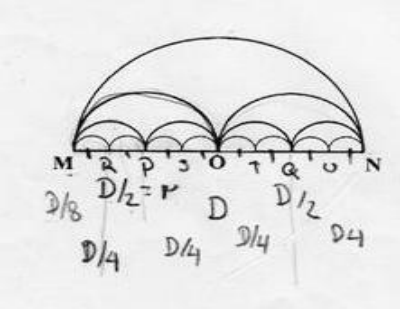


Figura N° 43: Semicircunferencias y sus diámetros presentados por grupo cuatro en actividad cinco

b) Realizan cálculos de las áreas de dos semicircunferencias, en términos del diámetro D. Siendo las áreas de estas: $\pi \frac{D^2}{8}$, $\pi \frac{D^2}{16}$.

c) Identifican en base a estos cálculos que se trata de una serie geométrica convergente, a la cual le obtienen su razón y la suma en términos del diámetro D que se detalla en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**44.

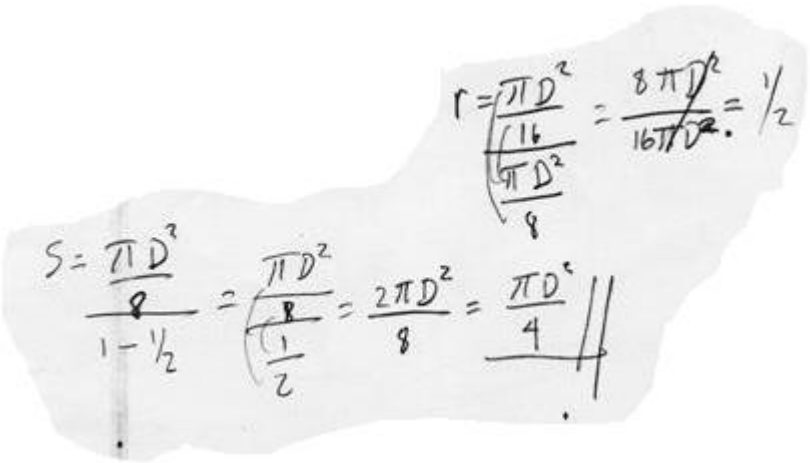


Figura N° 44: Cálculo de la razón y la suma de las áreas de las semicircunferencias obtenida por grupo cuatro en actividad cinco

La expresión final de la suma en términos del diámetro de la figura anterior es equivalente, en términos de r a πr^2.

A manera de síntesis de lo desplegado por los estudiantes reportado en sus producciones, ellos:

- Reconocieron que la longitud del segmento de la semicircunferencia disminuía dado que al acortarse el radio en la mitad generaba que el perímetro de la circunferencia fuese menor. Algunos grupos precisaron que el perímetro de la primera división de cada semicírculo es la mitad del semicírculo original; pero si combinaban ambos semicírculos, obtendrían una longitud igual al primer semicírculo, esto es $\frac{1}{2}\ \pi$ r. Lo mismo sucedía con las áreas, la suma de las áreas los dos semicírculos resultará igual que la suma del área del primer semicírculo, esto es $\frac{1}{2}\pi r^2$.
- Dedujeron un patrón particular de las semicircunferencias, cada vez que dividían un semicírculo obtenían dos semicírculos, estos sumaban la longitud (perímetro y áreas) igual al semicírculo anterior.
- Calcularon de las longitudes, iniciando por el semicírculo original de radio" fueron las siguientes: $\frac{1}{2}\pi r^2$, $\frac{1}{8}\pi r^2$, $\frac{1}{8}\pi r^2$, $\frac{1}{16}\pi r^2, \frac{1}{16}\pi r^2, \frac{1}{16}\pi r^2, \frac{1}{16}\pi r^2$ y así sucesivamente.
- Concluyeron que la suma total de las semicircunferencias fue de πr^2.
- Utilizaron visualización en el tránsito de diferentes registros de representación, particularmente del geométrico al algebraico y numérico.
- Realizaron el proceso de subdividir las semicircunferencias una vez más, otra y seguir sin parar. Lo anterior implica un acercamiento a la noción del infinito a la manera de la faceta potencial.

4.2.6. Presentación De La Actividad Seis

La actividad está focalizada en propiedades de cuadrados. Se tiene un primer cuadrado sobre el cual se ha inscrito otro que se ha desplazado un centímetro de los vértices del primer cuadrado, se continúa construyendo otro cuadrando dentro del segundo bajo las mismas condiciones y se continúa este proceso de manera indefinida. Él desafío para los estudiantes es encontrar posibles estrategias de resolución de la situación problema hasta llegar a obtener el valor de la longitud de un cuadrado en que el proceso no se puede continuar.

4.2.6.1. Propósito De La Actividad

La actividad tiene objetivos que los estudiantes deben evidenciar. Entre los objetivos que se propone en la actividad se mencionan los siguientes:

- Aplicar diferentes estrategias de la situación problema atendiendo a sus conocimientos previos de geometría plana y del álgebra escolar.
- Realizar cálculos que les permita si es posible, encontrar el valor de la longitud de un último cuadrado.
- Utilizar la visualización de la situación problema y el tránsito entre diferentes registros para resolver la situación problema.

4.2.6.2. Las Producciones De Los Estudiantes Por Grupo

Grupo uno

El trabajo de la actividad, se refiere a tres momentos, en lo referente a la búsqueda de estrategias de resolución. (Ver anexo tres, actividad seis, grupo dos).

a) El primer acercamiento a la situación problema es la visual.

Se observa que, colocaron variables a los lados de los cuadrados que aparecen .Inician con L, designando la longitud del primer cuadrado, L-1 al segundo, L-2 y así sucesivamente. Este primer acercamiento está en el registro gráfico y a su interior los tratamientos que recurren a lo algebraico. Se muestra en la Figura N° 45.

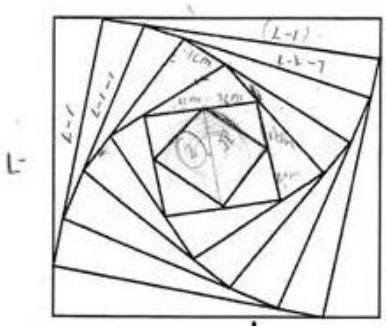


Figura N° 45: Longitud de los lados de los cuadrados dibujados asignados por grupo uno en actividad seis

b) Intentos de cálculos aritméticos. En detalle se observa en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** N° 46.

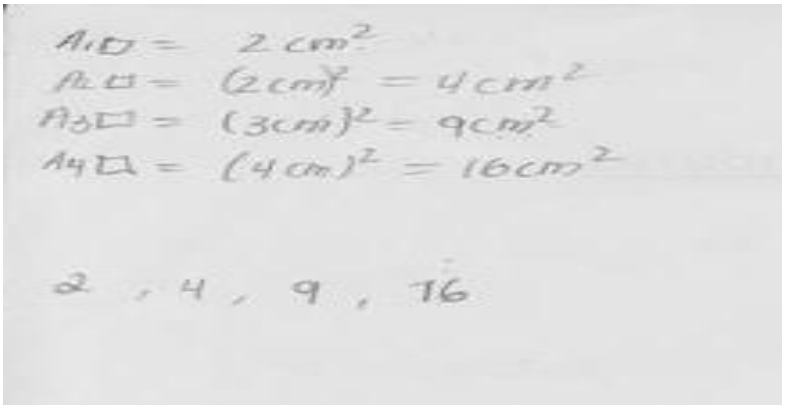


Figura N° 46: Cálculos aritméticos de las áreas de cuatro cuadrados realizados por grupo uno en actividad seis

c) Obtención de la respuesta a la actividad.

Los estudiantes argumentan su respuesta a través de la información de la Figura N° 47, que se presenta en detalle.

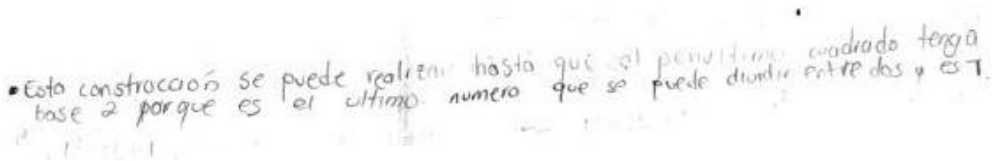


Figura N° 47: Conclusiones mediante registro verbal por grupo uno de actividad seis

Los estudiantes sin brindar muchos argumentos para obtener su respuesta, obtienen la misma. A manera de razonamiento lógico pareciera que emplearon un razonamiento que les permitió visualizar era iniciar por el último cuadrado obtenido que era desplazado de sus vértices 1 cm. Con ello observaron que ese 1cm desplazado formaba los catetos de un triángulo rectángulo, al cual les bastaba obtener la hipotenusa y de este modo llegar al valor de raíz cuadrada de dos.

Interesante lo anterior donde hace alusión al último cuadrado que se puede construir, esto nos induce a pensar que están conscientes que este proceso termina y que se diferencia claramente con las actividades anteriores donde el proceso continuaba de manera indefinida.

Grupo dos

El trabajo de la actividad lo presentan de la siguiente manera. (Ver anexo tres, actividad seis, grupo dos).

a) Argumentación verbal. No escriben evidencias de las estrategias que recurrieron en su trabajo, a pesar que nos brindan la respuesta correcta. Ellos concluyen en la Figura N° 48, en relación a la longitud del cuadrado que se puede construir.

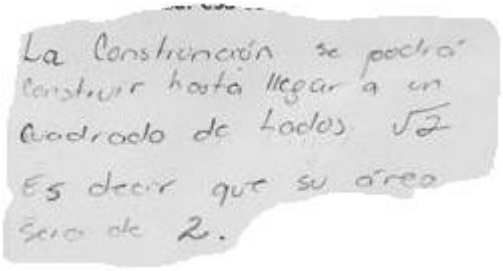


Figura N° 48: Conclusión mediante registro verbal por grupo dos de actividad seis

Lo anterior refleja que la actividad bajo las condiciones iniciales se puede construir cuadrados hasta llegar a un valor determinado.

Situación diferente a las actividades anteriores. Los estudiantes logran obtener correctamente el valor de la longitud de ese último cuadrado y de su área sin presentar muchos argumentos y estrategias de resolución para la actividad. El lenguaje natural es la manera que los estudiantes expresan su respuesta tanto para el valor de la longitud del lado como para el área del cuadrado.

Grupo tres

Este grupo presenta sus evidencias de la siguiente manera. (Ver anexo tres, actividad seis, grupo tres).

a) Argumentación vía teorema de Pitágoras. Al igual que los grupos anteriores no presenta una estrategia con mucho detalle y tampoco presentan muchos cálculos. Llegan a la respuesta solicitada, denota que están conscientes que el problema no se puede realizar de manera indefinida ya que obtienen la longitud de un último cuadrado que se puede construir. La estrategia que reflejan en su producción es de

tipo geométrica apoyándose en el Teorema de Pitágoras logran calcular la longitud del lado. En la Figura N° 49, se detalla los procedimientos.

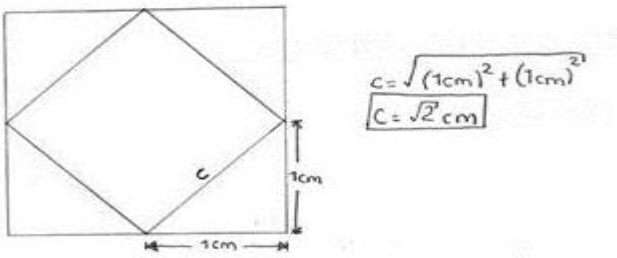


Figura N° 49: Cálculo del valor de la longitud del lado del último cuadrado obtenido por grupo tres en actividad seis

Finalizan su actividad, argumentando lo siguiente que se muestra en la Figura N° 50.

R/ se puede realizar hasta que el cuadrado tenga una longitud de $\sqrt{2}cm$ (1.41cm) en cada uno de sus lados.

Figura N° 50: Conclusiones mediante registro verbal de grupo tres en actividad seis

Lo anterior expresado por los estudiantes nos evidencia el uso de un registro geométrico y del lenguaje natural para expresar su respuesta. En este proceso está implicada la visualización que menciona Cantoral y Montiel (2001) utilizar la información visual para comunicar, transformar información en registros visuales.

Grupo cuatro

El trabajo de los estudiantes lo realizaron en las siguientes etapas. (Ver anexo tres, actividad seis, grupo cuatro).

a) Inician con la utilización del registro geométrico y le asignan la variable X-1a la longitud del cuadrado original. En la Figura N° 51, se detalla a continuación, el primer acercamiento de los estudiantes a la situación problema.

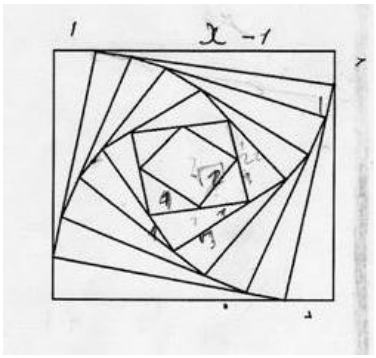


Figura N° 51: Elementos asignados a la longitud de cuadrados por grupo cuatro en actividad seis

b) Realizan cálculos varias veces mediante el uso de una estrategia de tipo algebraico. En detalle, se aprecia en la Figura N° 52 el trabajo realizado.

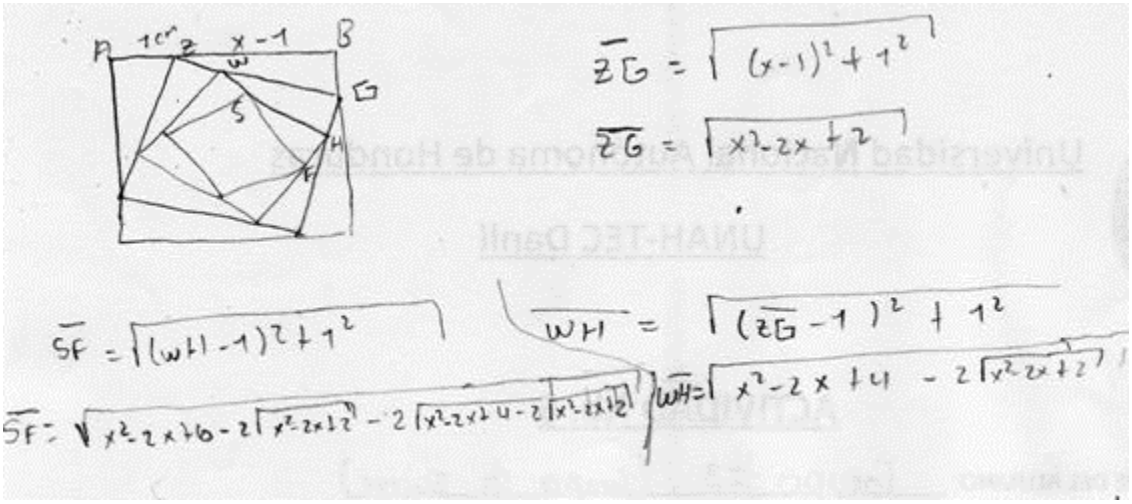


Figura N° 52: Cálculos basados en estrategia algebraica por grupo cuatro en actividad seis

c) Recurren a otras estrategias. En la Figura N° 53, se detallan las conclusiones siguientes:

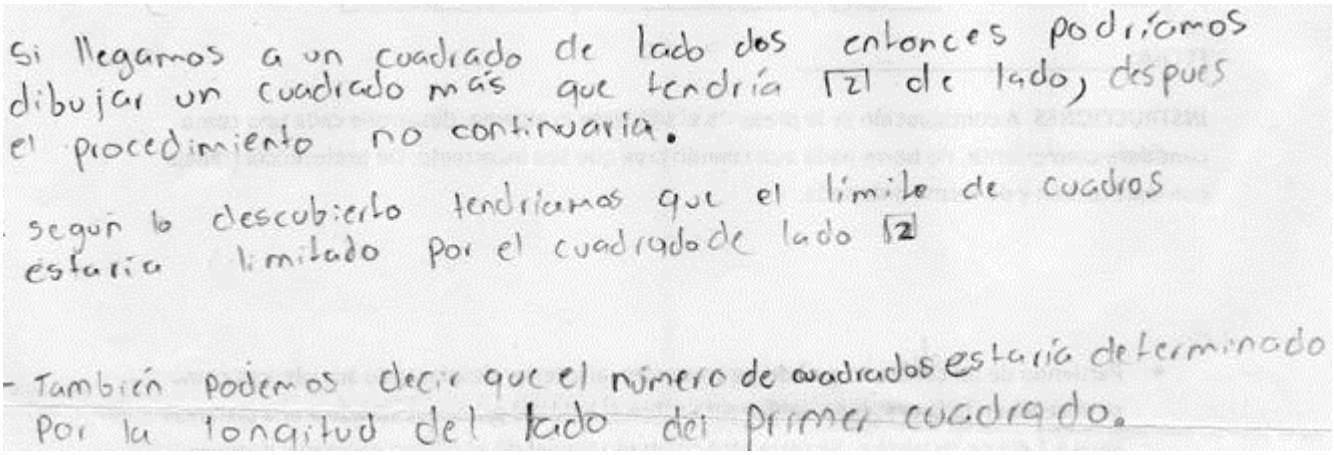


Figura N° 53: Conclusiones mediante registro verbal de grupo cuatro en actividad seis

Al igual que los grupos anteriores, llegan a la conclusión de construir ese último cuadrado que aunque no explicitan detalle el proceso. Los estudiantes mencionan que el último cuadrado que se puede construir posee 2 unidades de área y de longitud de lado $\sqrt{2}$. Al parecer la estrategia que les conduce a la respuesta solicitada en la consigna les obliga a realizar procesos de ensayo y error hasta encontrar que el proceso finaliza con un valor específico.

A manera de síntesis de lo desplegado por los estudiantes reportado en sus producciones, ellos:

- Presentaron estrategias en las que construyeron un primer cuadrado original de lado "L", luego desplazaron 1cm de su vértice para un segundo cuadrado siendo su lado "L-1" el segundo, continuaron con la misma condición al tercero con lado"L-2", continuando con ese mismo patrón.
- Presentaron diferentes puntos de vista, algunos grupos argumentaban que se podía seguir haciendo indefinidamente, hasta que un primer grupo considero la

condición de desplazar 1 cm de los vértices. Este grupo concluye que el proceso finaliza cuando encuentran que la longitud del último cuadrado es $\sqrt{2}$ de longitud.

Después de debatir otro grupo llegó a esa conclusión. Cabe señalar que los grupos tomaron diferentes caminos en sus intentos, uno de los recurrentes fue el algebraico que resultó ser desgastante y no los condujo a ninguna conclusión.

- Reconocieron el hecho que no importaba la longitud inicial del cuadrado, porque después de realizar el proceso n veces, este culminaría.
- Diferenciaron procesos infinitos de finitos al final de la actividad. La riqueza de este ejercicio está en que los estudiantes infieren que los procesos y cálculos se pueden realizan muchas veces pero que al final terminan en algún momento. La actividad colaboró en el desarrollo de habilidades tales como la visualización de la actividad permitió a los estudiantes entender y resolver la actividad.

4.2.7. Presentación De La Actividad Siete

La actividad está dividida en dos actividades a su vez. Ambas están expresadas en el registro geométrico. La primera parte de la actividad intenta desafiar al estudiante a encontrar la longitud de una espiral infinita que se va construyendo bajo ciertas condiciones particulares. La segunda actividad está diseñada como la primera, es decir, calcular la longitud total de la espiral construida bajo ciertas condiciones. En definitiva ambas actividades persiguen que los estudiantes logren reconocer cuando es posible encontrar el valor de la longitud de la espiral.

4.2.7.1. Propósito De La Actividad

La actividad tiene objetivos que los estudiantes puedan lograr. Entre los objetivos que persigue la actividad, se mencionan los siguientes:

- Diferenciar en las dos espirales cuál de ellas posee una longitud que se puede calcular.

- Calcular las longitudes de los segmentos posibles en las dos espirales.
- Calcular la suma de la espiral en cada uno de los casos, si esto fuere posible, de no serlo presentar los argumentos respectivos.
- Emplear diferentes estrategias de resolución de las situaciones problemas.

4.2.7.2. Presentación de las producciones de los estudiantes por grupo

Grupo uno

Los estudiantes realizan el desarrollo de la consigna en dos etapas (Ver anexo tres, actividad siete, grupo uno).

a) Cálculo de longitudes de las dos espirales. Se observa que el grupo divide su trabajo identificando propiedades en las longitudes de ambas espirales. Este grupo recurre a registro de tipo numérico o aritmético. Se observa en las Figuras N° 54 y N° 55 los cálculos.

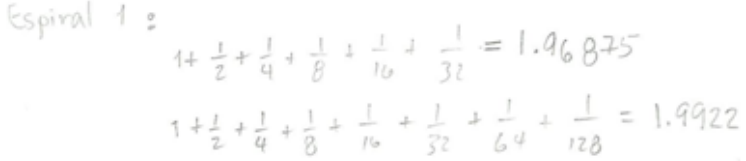


Figura N° 54: Cálculo del valor numérico de la primera espiral del grupo uno en actividad siete

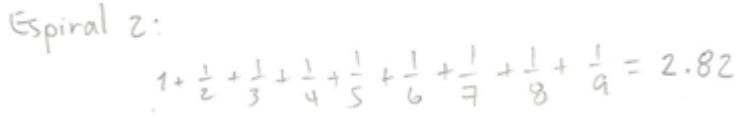


Figura N° 55: Cálculo del valor numérico de la segunda espiral del grupo uno en actividad siete

b) Argumentaciones verbales en torno a la longitud de las espirales encontradas. Se observa que los estudiantes presentan sus argumentaciones en relación a la longitud de ambas espirales. En las Figuras N° 56 y N° 57, se presentan las conclusiones de cada longitud de la espiral.

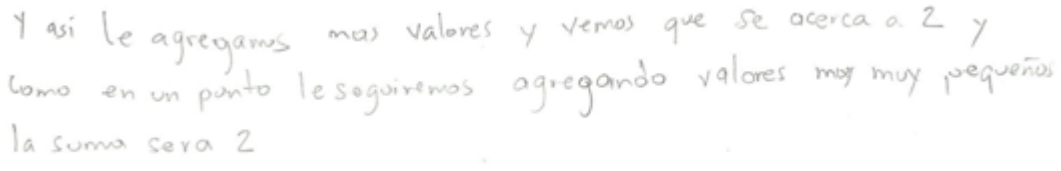


Figura N° 56: Conclusiones en registro verbal de la primera espiral construida del grupo uno en actividad siete

Figura N° 57: Conclusiones en registro verbal de la segunda espiral construida del grupo uno en actividad siete

De acuerdo a las conclusiones expresadas por los estudiantes de este grupo, se observa que los estudiantes han reconocido que en ambos casos la construcción de la espiral se puede realizar, en una de ellas la longitud se puede determinar y en la otra no. Este grupo ha logrado los objetivos de la actividad y han encontrado el valor de la suma lo que denota que han dado el paso al límite.

Grupo dos

El trabajo de la actividad lo desarrollan en dos etapas (Ver anexo tres, actividad siete, grupo dos).

a) **Utilización de registro geométrico.** Se observa que los estudiantes en ambos casos hacen uso del diagrama proporcionado, al cual le asignan valores para ambas espirales. En las Figuras N° 58 y N° 59 se aprecia con detalle.

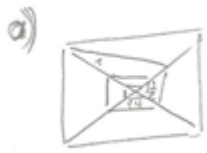


Figura N° 58: Diagrama de la primera espiral del grupo dos en actividad siete

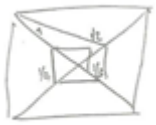


Figura N° 59: Diagrama de la segunda espiral del grupo dos en actividad siete

b) Cálculos de las longitudes de ambas espirales. Se aprecia que los estudiantes realizan el cálculo de la longitud de ambas espirales. Estos cálculos los realizan en el registro numérico o aritmético, de donde se percatan de un patrón de potencias de dos para el denominador y para el segundo caso una fracción que colocan en forma algebraica como uno dividido entre x. En las Figuras N° 60 y N° 61, se aprecian los cálculos.

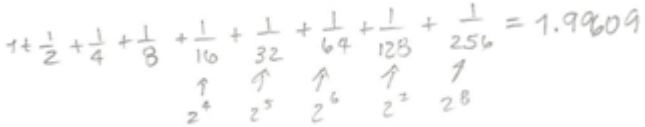


Figura N° 60: Cálculo de la longitud de la primera espiral del grupo dos en actividad siete

Figura N° 61: Cálculo de la longitud de la segunda espiral del grupo dos en actividad siete

c) Conclusiones verbales en torno a la actividad. Este grupo presenta sus conclusiones de las dos longitudes de las espirales, destacando que en el primer caso se acerca a un valor y en el segundo caso no se puede determinar la longitud. En las Figuras N° 62 y N° 63 se aprecia las conclusiones del grupo.

Figura N° 62: Conclusiones de la longitud de la primera espiral en registro verbal del grupo dos en actividad siete

Figura N° 63: Conclusiones de la longitud de la segunda espiral en registro verbal del grupo dos en actividad siete

A pesar que este grupo no cumplió a cabalidad los objetivos, presentaron argumentos interesantes en su análisis de la situación problema. Con respecto al paso al límite se acercaron a la noción como aproximación sin capturar el valor de la suma de las longitudes de la primera espiral.

En la segunda espiral sí expresaron que no se podía calcular la longitud.

Grupo tres

El trabajo de la actividad lo desarrollan en dos etapas. (Ver anexo tres, actividad siete, grupo tres).

a) Cálculo de longitudes de cada hipotenusa que constituyen la espiral. Los estudiantes recurren al registro geométrico y utilizan tratamientos de tipo algebraico al interior del registro. Este grupo centró su atención en visualizar con detalle la

figura de la primera espiral de la actividad. En base a ello, identifican tres triángulos rectángulos. Calculan mediante Pitágoras los valores faltantes.

b) El teorema de Pitágoras funge como conector entre el cuadrado y los triángulos que se forman al interior del cuadrado. En la Tabla N° 18 y Tabla N° 19 se muestra la síntesis de la actividad tanto para la parte a como para la parte b.

Tabla N° 18: Cálculo de las longitudes de los lados de la espiral a) realizada por grupo tres en actividad siete.

Triángulo de la Espiral	Longitud
Primero	$\frac{\sqrt{5}}{2}$
Segundo	$\frac{\sqrt{5}}{4}$
Tercero	$\frac{\sqrt{5}}{8}$

Tabla N° 19: Cálculo de las longitudes de la espiral b) realizada por grupo cuatro en actividad siete.

Triángulo de la Espiral	Longitud
Primero	$\frac{\sqrt{5}}{2}$
Segundo	$\frac{\sqrt{13}}{16}$
Tercero	$\frac{5}{12}$

c) Identificación si las longitudes de las hipotenusas forman parte de una serie geométrica convergente. Los estudiantes calculan la razón y la suma de la serie en la parte a. En la parte b los estudiantes afirman que las longitudes de las hipotenusas no forman una serie geométrica convergente**.** En la Figura N° 64 se aprecia con detalle**.**

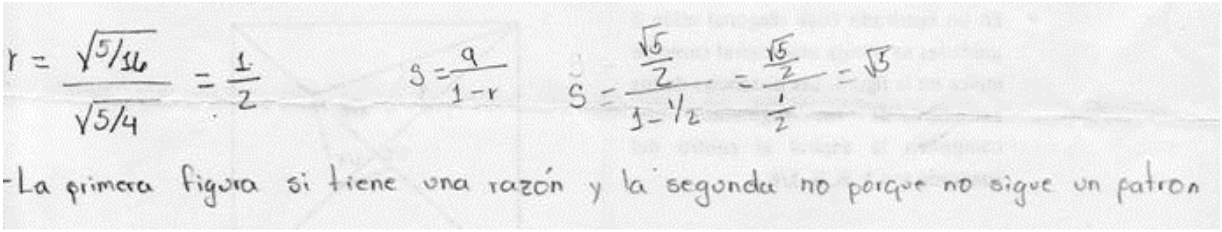


Figura N° 64: Cálculo de la razón y de la suma de la longitud de la espiral a) construida por grupo tres en actividad siete

En esta actividad se observa que los estudiantes recurrieron a cálculos para dar sus respuestas. Se observa además que está presente registro geométrico con tratamientos de tipo algebraico.

Grupo cuatro

El trabajo de este grupo se refleja en dos fases principales. (Ver anexo tres, actividad siete, grupo cuatro).

a) Consideración de elementos visuales. Para la primera parte de la actividad, los estudiantes dibujan tres triángulos rectángulos, a los cuales le calculan la hipotenusa. Este proceso se detalla en la

N° 65, en lo referente a la parte a de la actividad.

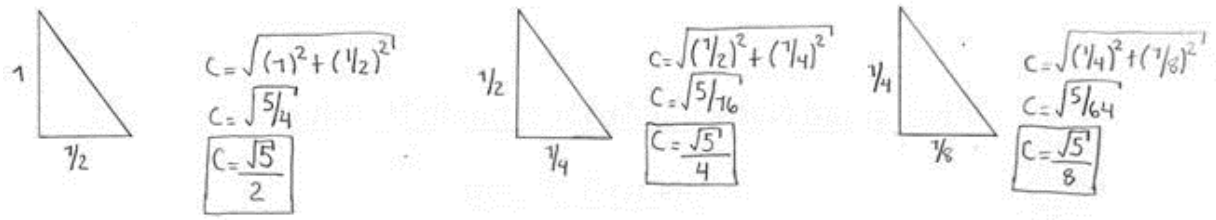


Figura N° 65: Cálculo de elementos de la primera espiral obtenida por grupo cuatro en actividad siete a)

En la parte b de la actividad, se detalla los cálculos en la Figura N° 66.

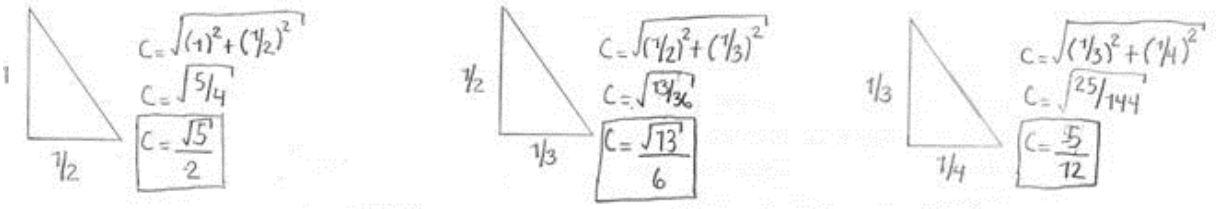


Figura N° 66: Cálculo de elementos de la segunda espiral obtenida por grupo cuatro en actividad siete b)

En base a lo anterior se observa que los estudiantes pusieron de manifiesto la vinculación entre el registro geométrico siendo el Teorema de Pitágoras el elemento que funge de conector entre el cuadrado y los triángulos rectángulos que se forman al interior del cuadrado. Las longitudes de las hipotenusas de los triángulos rectángulos constituyen elementos de la longitud total de la espiral.

b) **Identificación que las longitudes de las hipotenusas calculadas forman parte de una serie geométrica convergente.** Los estudiantes calculan el valor de la razòn para la actividad a en la Figura N° 67, se detalla el cálculo.

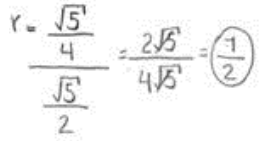


Figura N° 67: Cálculo de la razón de la primera espiral obtenida por grupo cuatro en actividad siete

Para la parte b de la actividad obtienen el valor de un r que se detalla en la Figura N° 68.

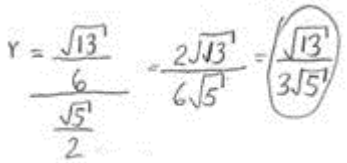


Figura N° 68: Cálculo de la razón de la segunda espiral obtenida por grupo cuatro en actividad siete

En ambos casos se observa que para los cálculos se recurren a una fórmula. Concluyen la actividad con la siguiente textualidad, que se detalla en la Figura N° 69.

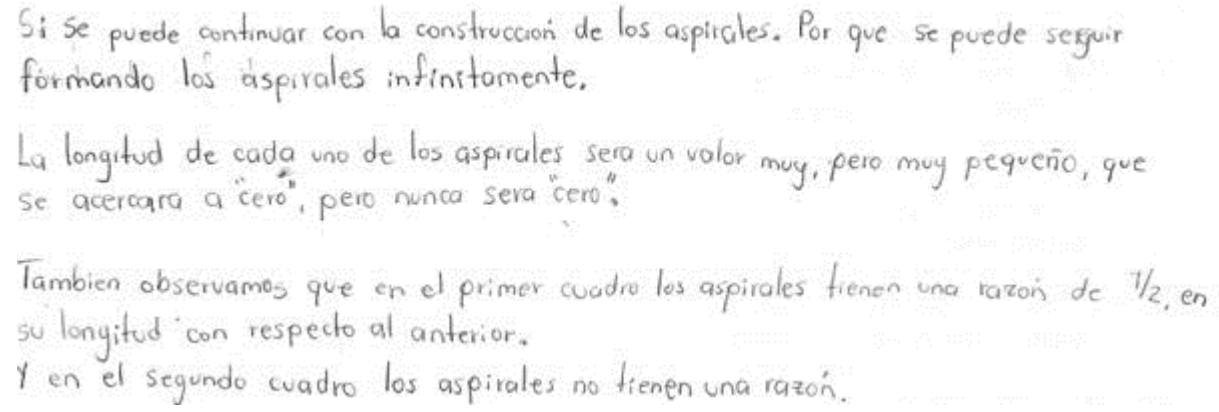


Figura N° 69: Conclusiones mediante registro verbal del grupo cuatro en actividad siete

Tres aspectos se rescatan en las conclusiones, la posibilidad de seguir construyendo espirales de manera infinita; esto es la faceta potencial del infinito a la que se hizo alusión en el marco teórico. El segundo aspecto es la longitud de la espiral que se va construyendo. Cada vez que se sigue el proceso la longitud va disminuyendo, esto implica variación. También aparece el acercamiento al límite cuando los estudiantes afirman "***que la longitud de espiral será un valor muy pequeño que se acercará a cero, pero nunca será cero".*** Sin embargo en la afirmación los estudiantes no dan el paso al límite. El otro aspecto es el reconocimiento de la serie convergente para el primer caso de la actividad y divergente para la segunda parte de la actividad.

A manera de síntesis de lo desplegado por los estudiantes reportado en sus producciones, ellos:

- Expresaron que la primera situación si se podía seguir construyendo la espiral puesto que la longitud los lados formaban una serie geométrica de radio $\frac{1}{2}$ y en la segunda situación no se observaba claramente ningún patrón de los lados de la espiral que se seguía construyendo.
- Intercambiaron diferentes puntos de vista entre los estudiantes de los dos grupos, surgieron más elementos tales como las propiedades del cuadrado, el cálculo de longitudes mediante el Teorema de Pitágoras con la identificación previa que la espiral constaba de lados desconocidos en donde ese lado era la hipotenusa del triángulo rectángulo con catetos conocidos por la información proporcionada en la actividad.
- Calcularon las longitudes de la espiral fueron obtenidas en la primera parte de la actividad, siendo estas: $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\sqrt{5}}{4}$, $\frac{\sqrt{5}}{8}$ y continuando con el patrón de disminución de $\frac{1}{2}$.

Algunos grupos calcularon la suma de la espiral y el resultado fue $\sqrt{5}$.

- Concluyeron en la segunda parte, que se podía seguir la construcción indefinidamente, sin embargo no se podía determinar la longitud de la espiral.
- Clasificaron la primera espiral como una serie convergente y la segunda espiral como una serie divergente.

4.2.8. Presentación De La Actividad Ocho

La actividad está expresada en registro verbal y la temática de esta está orientada en la relación de magnitudes tales como distancia, velocidad y tiempo. El desafío de la actividad es que los estudiantes bajo ciertas condiciones iniciales sean capaces de determinar si el móvil puede llegar al final del elástico cuando este crece cada minuto.

4.2.8.1. Objetivos De La Actividad

La actividad tiene objetivos a logran en los estudiantes. Entre los objetivos que se plantea la actividad están:

- Resolver situaciones que involucren crecimientos indefinidos bajo ciertas condiciones de magnitudes de distancia, velocidad y tiempo.
- Encontrar la magnitud tiempo en la situación problema.
- Utilizar diferentes estrategias de resolución de la situación problema que develen la comprensión de procesos infinitos.
- Presentar argumentaciones que ayuden a reafirmar la resolución de situaciones problemas bajo ciertas condiciones particulares.

4.2.8.2. Producciones Estudiantiles Por Grupo

Grupo uno

El grupo presenta el desarrollo de su trabajo de la siguiente manera. (Ver anexo tres, actividad siete, grupo uno).

a) Distinción de etapas en la situación problema.

Plantearon una estrategia basada en elementos visuales del mismo. En la Figura N° 70, se presenta el detalle.

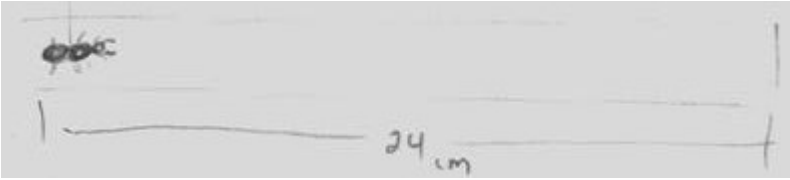


Figura N° 70: Diagrama del recorrido de la hormiga realizado por grupo uno en actividad ocho

b) Elaboración de estrategia basada en movimiento rectilíneo uniforme. Recurren a los datos iniciales del problema y de sus conocimientos de movimiento rectilíneo uniforme. En detalle en la Figura N° 71.

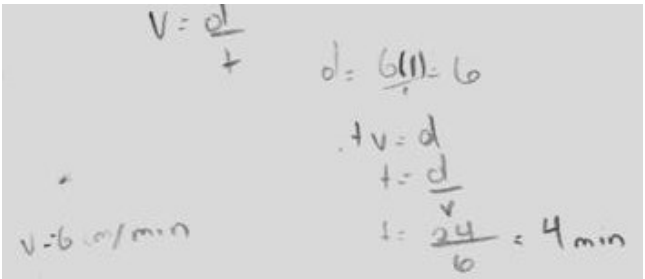


Figura N° 71: Cálculo de la distancia recorrida por hormiga por grupo uno en actividad ocho

c) Reflexión en relación a los datos calculados. Los estudiantes se percatan que para que la hormiga recorra el elástico requiere de cuatro minutos y que además cada minuto que pasa, el elástico se alarga doce centímetros. En la Figura N° 72 se expresan conclusiones.

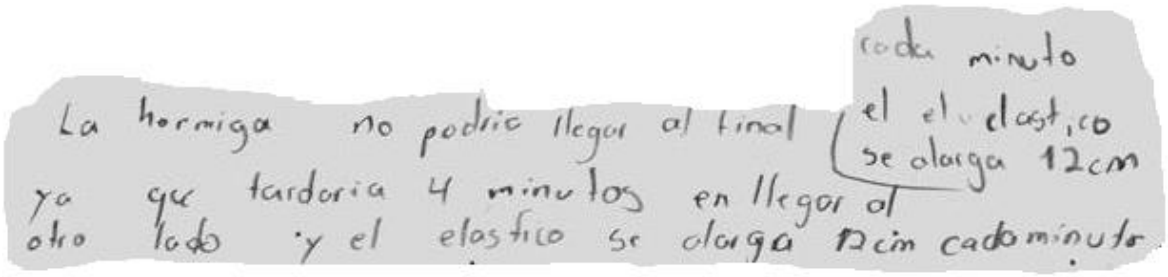


Figura N° 72: Conclusiones mediante registro verbal por grupo uno en actividad ocho

En base a lo anterior se observa que los estudiantes captan la imposibilidad que la hormiga alcance el destino final, puesto que el elástico cada minuto crece y lo hace de manera indefinida. Esta actividad estuvo caracterizada por el empleo del registro verbal, la utilización de expresiones para calcular las relaciones entre distancia, velocidad y tiempo.

Grupo dos

El trabajo realizado se evidenció a través de las siguientes etapas. (Ver anexo tres, actividad siete, grupo dos).

a) Razonamiento lógico mediante registro verbal. No realizaron ningún cálculo. Hicieron uso de razonamientos que argumentan en la Figura N° 73.

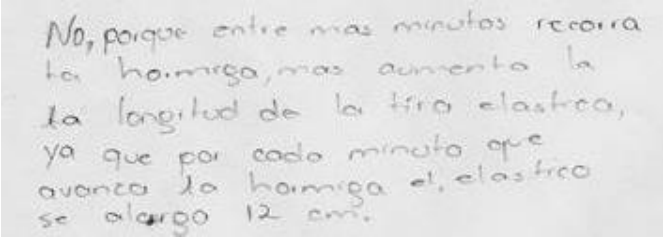


Figura N° 73: Conclusiones mediante registro verbal por grupo dos en actividad ocho

Los estudiantes están conscientes de la imposibilidad que la hormiga llegue al otro lado del elástico, puesto que analizan la distancia posible que recorre la hormiga versus el aumento del elástico.

Grupo tres

Los estudiantes estructuran su trabajo en dos etapas. (Ver anexo tres, actividad ocho, grupo tres).

a) Recurrencia al registro gráfico. Se observa que los estudiantes han puesto su atención en realizar diagramas. En su estrategia recurrieron a dividir el problema en tres etapas a saber:

En la primera etapa se muestra en la Figura N° 74.

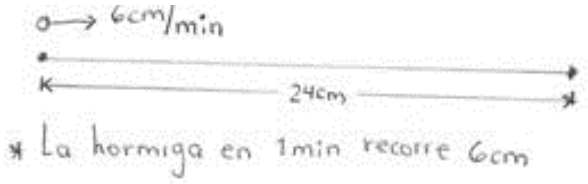


Figura N° 74: Primera etapa del recorrido de la hormiga dibujada grupo tres en actividad ocho

La segunda etapa se muestra en la Figura N° 75.

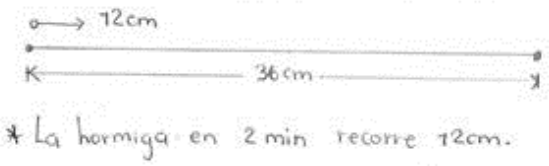


Figura N° 75: Segunda etapa del recorrido de la hormiga dibujada por grupo tres en actividad ocho

La tercera etapa se muestra en la Figura N° 76.

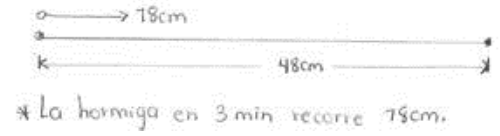


Figura N° 76: Tercera etapa del recorrido de la hormiga dibujada por grupo tres en actividad ocho

c) Conclusiones de la actividad. Los estudiantes presentan su conclusión en la Figura N° 77.

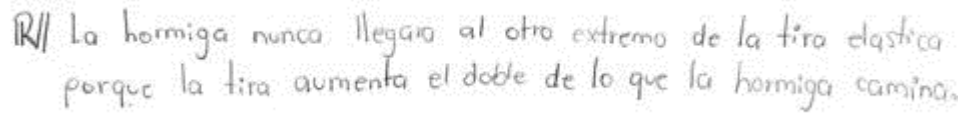


Figura N° 77: Conclusiones mediante registro verbal presentadas por grupo tres en actividad ocho

En el trabajo del grupo se utilizó registro de tipo geométrico, visualización de la actividad que les permitió determinarla imposibilidad que la hormiga llegara al otro extremo del elástico. Este grupo encontró una razón entre lo que la tira elástica aumenta y lo que la hormiga camina, relación que les ayudo a concluir con respecto a la actividad.

Grupo cuatro

Recurren a dos etapas para resolver la situación problema**.** (Ver anexo tres, actividad ocho, grupo cuatro).

a) Obtención de cálculos. Hacen uso del registro numérico, tomando las condiciones del problema les permite encontrar una razón. Estos cálculos se detallan en la Figura N° 78.

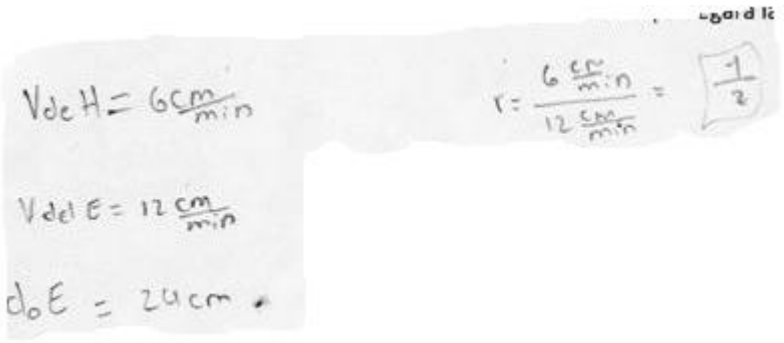


Figura N° 78: Cálculo de diferentes magnitudes obtenidas por grupo cuatro en actividad ocho

b) Obtención de conclusiones. En base a los cálculos realizados presentan en la Figura N° 79, conclusiones.

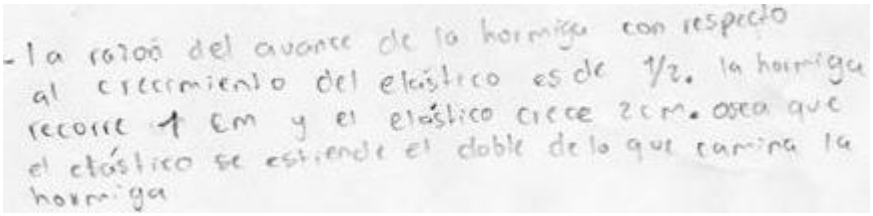


Figura N° 79: Conclusiones realizadas con respecto a la razón de crecimiento del elástico por grupo cuatro en actividad ocho

En base a la relación encontrada entre lo que se extiende el elástico cada minuto y lo que la hormiga recorre en ese tiempo, se puede afirmar que los estudiantes están conscientes que la hormiga no cumpla su cometido. Las afirmaciones siguientes de la Figura N° 80 sustentan la relación que han encontrado los estudiantes entre lo que recorre la hormiga y como crece el elástico.

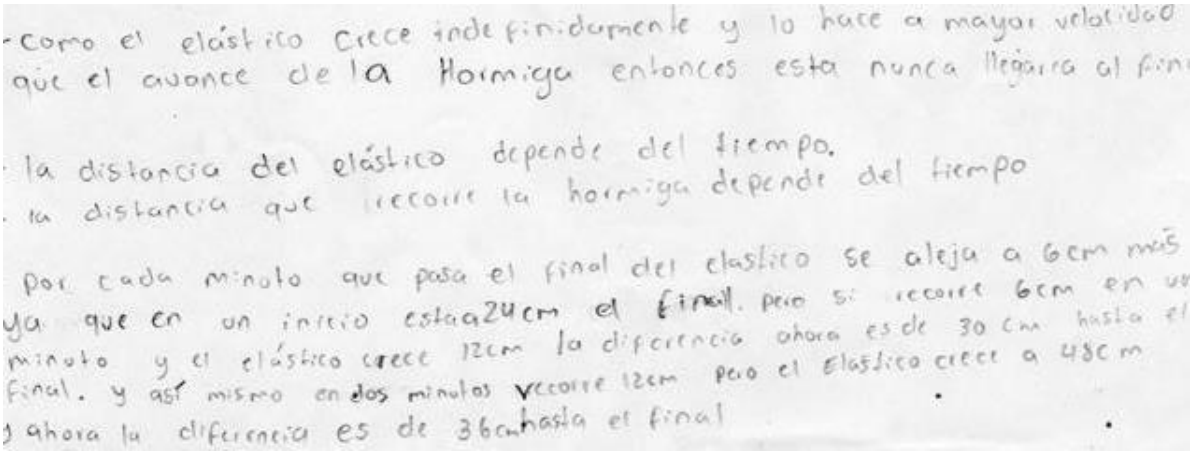


Figura N° 80: Conclusiones mediante registro verbal realizadas por grupo cuatro de actividad ocho

A manera de síntesis de lo desplegado por los estudiantes reportados en sus producciones, ellos:

- Presentaron argumentos que evidenciaron diferentes estrategias de resolución.
- Presentaron sus conclusiones en lenguaje verbal, hacen cálculos mediante registro numérico y otros se abocan a razonamiento para resolver el problema.
- Recurrieron la utilización de la relaciones entre magnitudes del movimiento rectilíneo uniforme.
- Concluyeron con respecto al paso al límite, por tratarse de que la situación problema involucraba el crecimiento de una de las magnitudes (longitud del elástico) que se incrementaba a mayor valor que el que podría recorrer la hormiga el paso al límite en esta situación no se reflejaba pues no se trata de un tipo de situación divergente.

4.2.9. Presentación De La Actividad Nueve

La actividad nueve está focalizada en una situación particular del movimiento rectilíneo uniforme expresada en el lenguaje verbal. La actividad intenta desafiar a los estudiantes a que encuentren un valor específico a la situación problema (distancia). De manera particular en la actividad se presentan dos trenes que se mueven el uno al otro y que chocan en un momento y se debe determinar la distancia que recorre un móvil cuando se mueve de un tren al otro hasta que estos chocan.

4.2.9.1. Propósitos De La Actividad

Esta actividad tiene objetivos definidos y los cuales los estudiantes deben lograr. Estos objetivos son:

- Calcular la distancia recorrida por la mosca antes del choque.

• Presentar diferentes estrategias de resolución donde se involucren las magnitudes de la situación problema.

• Establecer diferencias entre situaciones que involucran procesos finitos de procesos infinitos.

• Resolver la situación problema planteada y determinar el paso o no al límite de la situación.

4.2.9.2. Producciones Estudiantiles De La Actividad Nueve

Grupo uno

El trabajo de este grupo se presenta en las siguientes etapas. (Ver anexo tres, actividad uno, grupo uno).

a) Realización de esquemas para la comprensión del fenómeno. Utilizan diagramas, esquemas que les permita visualizar la situación. Presentan su trabajo en la Figura N° 81.

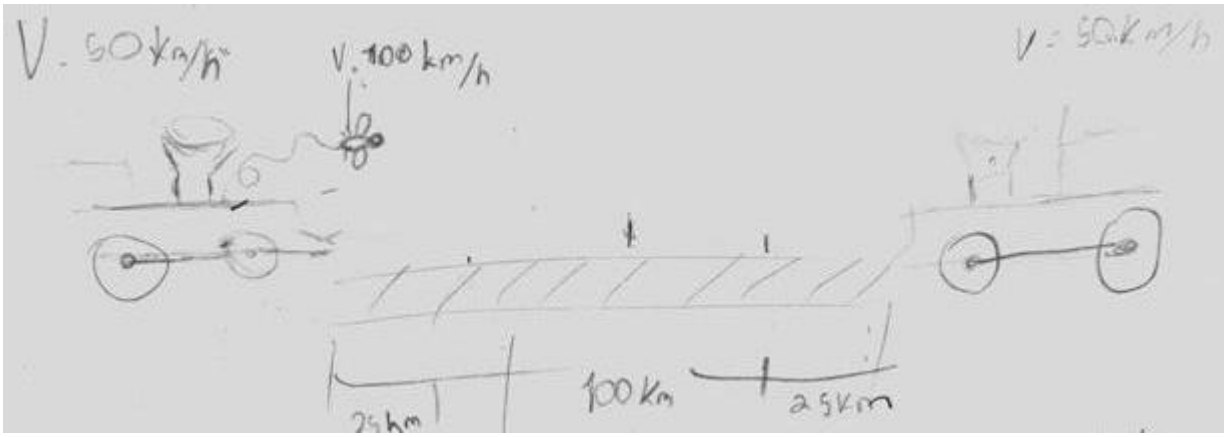


Figura N° 81: Diagramas con diferentes magnitudes realizados por grupo uno de actividad nueve

Es su dibujo se observan las condiciones originales de la velocidad de los trenes, la velocidad de la mosca y la distancia a recorrer. Continúan con otros esquemas y dibujan una recta numérica con diferentes valores, haciendo uso de lo espacial y lo aritmético. Lo expresan en la Figura N° 82.

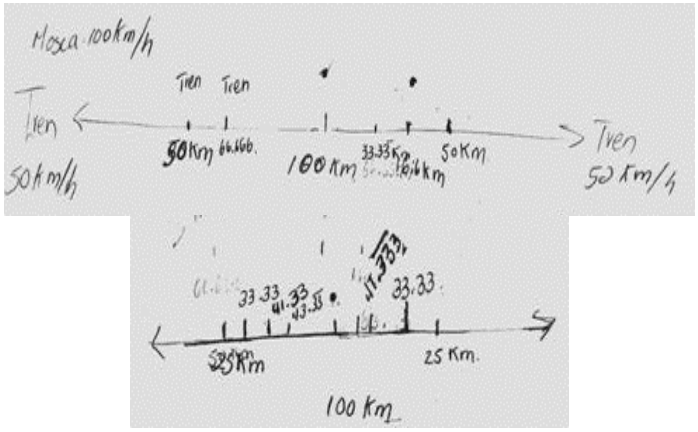


Figura N° 82: Diferentes cálculos en registro aritmético obtenidos por grupo uno de actividad nueve

b) Obtención de conclusiones. Los esquemas anteriores de la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** Ilustran las magnitudes que intervienen. Además ofrece que en una hora, sería el choque y a la mitad de la ruta de los trenes. También calculan la distancia que recorre la mosca en el tipo de movimiento involucrado. En la Figura N° 83, se presentan cálculos involucrados en la consigna.

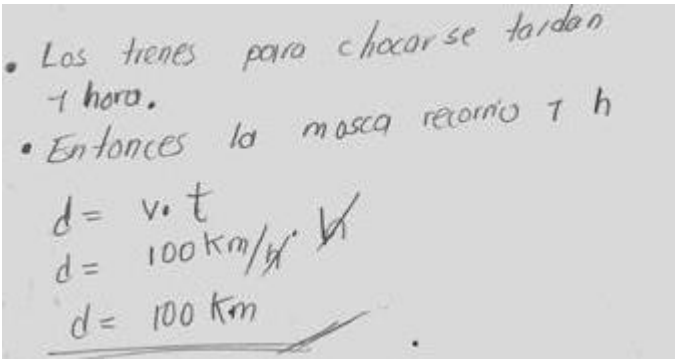


Figura N° 83: Cálculo de la distancia que recorren los trenes, obtenida por grupo uno de actividad nueve

Grupo dos

El desarrollo de la actividad por este grupo se presenta de la siguiente manera. (Ver anexo tres, actividad nueve, grupo dos).

a) Conclusiones en registro verbal. Presentan sus conclusiones en lenguaje natural, mostrando que la actividad tiene ciertas particularidades tales como la relación entre la distancia recorrida por cada uno de los trenes y la distancia que ha recorrido la mosca. En Figura N° 84, se presentan las conclusiones.

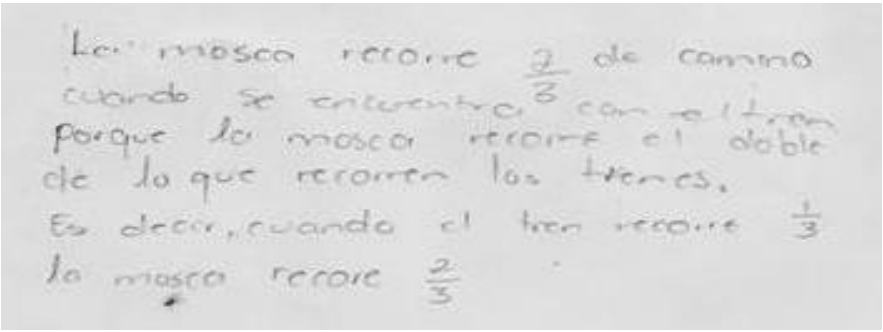


Figura N° 84: Argumentos mediante registro verbal en torno a la distancia que recorren los móviles presentada por grupo dos en la actividad nueve

Los estudiantes mencionan una relación particular para un momento específico del trayecto. Esto es, si la mosca ha recorrido dos tercios, el tren lo ha hecho en un tercio. También concluyen la actividad de acuerdo a lo que expresan en la Figura N° 85.

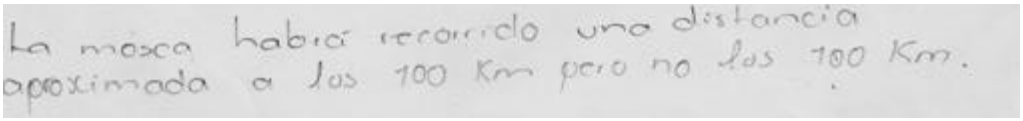


Figura N° 85: Conclusiones mediante registro verbal presentado por grupo dos en actividad nueve

Grupo tres

Este grupo presenta su trabajo de la siguiente manera. (Ver anexo tres, actividad nueve, grupo tres).

a) Reconocimiento de etapas. Inician a desarrollar su actividad, ilustrando relaciones de velocidad, distancia y tiempo tanto para los trenes como para la mosca. Dichas relaciones están expresadas mediante etapas que se muestran en la Figura N° 86, Figura N° 87, Figura N° 88, Figura N° 89 y Figura N° 90.

1. Primera etapa

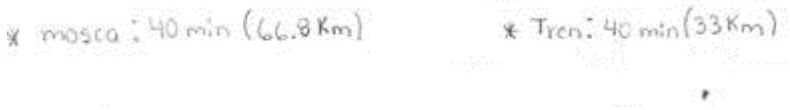


Figura N° 86: Primera etapa del recorrido de los móviles dibujada por grupo tres en actividad nueve

En esta etapa los estudiantes colocaron los datos iniciales de cada uno de los móviles. Como se observa en la figura anterior se colocan los valores de las dos magnitudes tanto para el tiempo en minutos como para la distancia en Km.

2. Segunda etapa

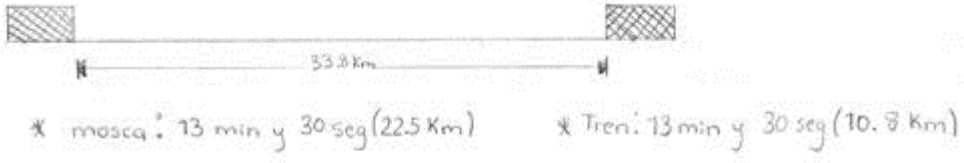


Figura N° 87: Segunda etapa de los recorridos de los móviles dibujada por grupo tres en actividad nueve

En la segunda se observa que los estudiantes colocan ciertos cálculos para la mosca como para el tren. Además se observa la separación entre ambos móviles, en este caso aparece 33.8 Km de separación entre ambos móviles. Se observa que mientras la mosca recorre 22.5 Km ha empleado 13 min y 30 seg, mientras que el tren en ese mismo tiempo ha recorrido 10.8 Km.

3. Tercera etapa

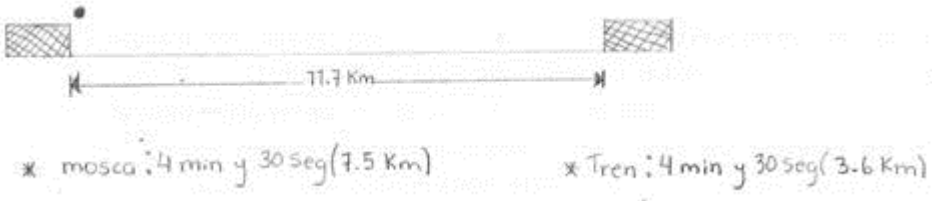


Figura N° 88: Tercera etapa de los recorridos de los móviles dibujada por grupo tres en actividad nueve

Para esta tercera etapa la mosca ha empleado 4min y 30 seg y ha recorrido 7.5 Km y el tren ha recorrido en ese mismo tiempo 3.6 Km. La distancia de separación de ambos móviles es de 11.7Km. Tal como se observa la separación entre ambos móviles cada vez es menor.

4. Cuarta etapa

Figura N° 89: Cuarta etapa de los recorridos de los móviles dibujada por grupo tres en actividad nueve

Para esta cuarta esta cuarta etapa la mosca y el móvil se encuentran a 3.9 Km de separación. En el intervalo que se menciona, para la mosca 1 min y 30 seg la distancia recorrida es 2.5 Km. y el tren en ese mismo intervalo de tiempo recorre 1.2 Km.

5. Quinta etapa

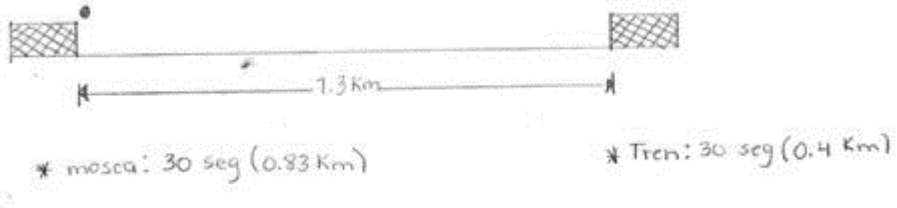


Figura N° 90: Quinta etapa del recorrido de los móviles dibujada por grupo tres en actividad nueve

Para esta quinta etapa, la mosca está a 1.3 Km del tren y en 30 seg ha recorrido 0.83 Km, en ese mismo intervalo el tren ha recorrido 0.4 Km.

b) Presentación de conclusiones. Como se puede observar en las distintas etapas que los estudiantes dividieron la situación, al sumar los tiempos, las distancias les permiten llegar a la respuesta. En la Figura N° 91 se aprecia el detalle.

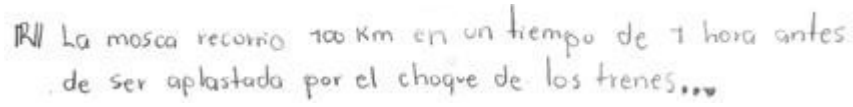


Figura N° 91: Conclusiones mediante registro verbal por grupo tres en actividad nueve

Con esta conclusión que dieron los estudiantes se evidencia que pudieron sacarle provecho a la estrategia empleada y al final se observa que la situación problemática dio un resultado y con ello el paso al límite de la distancia recorrida por la mosca antes de ser aplastada.

Grupo cuatro

El desarrollo de la actividad del grupo 4 se presenta en las siguientes fases. (Ver anexo tres, actividad nueve, grupo cuatro).

a) Estrategia mediante razonamiento lógico. Plantearon una estrategia basada en el razonamiento. La misma les proporcionó elementos. En la Figura N° 92, se presenta conclusiones del grupo.

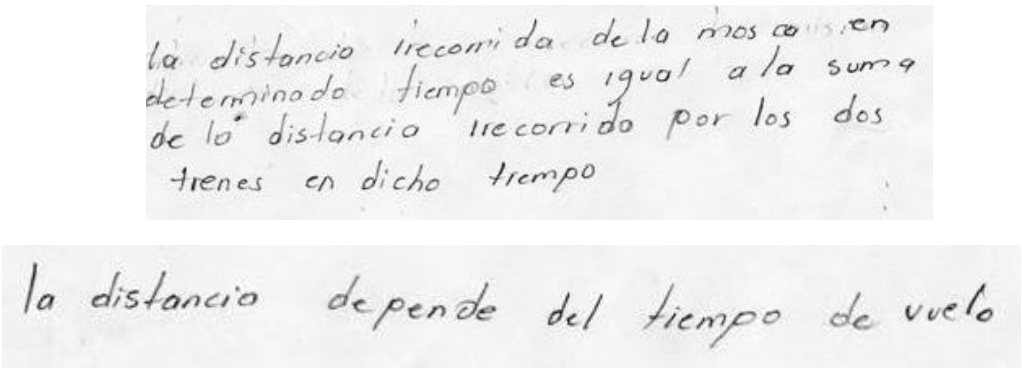


Figura N° 92: Relaciones entre las magnitudes de los móviles presentada por grupo cuatro en actividad nueve

A pesar de estos argumentos correctos no pudieron llegar a la respuesta solicitada.

b) Obtención de conclusiones. En la Figura N° 93 mencionan aspectos finales de la actividad.

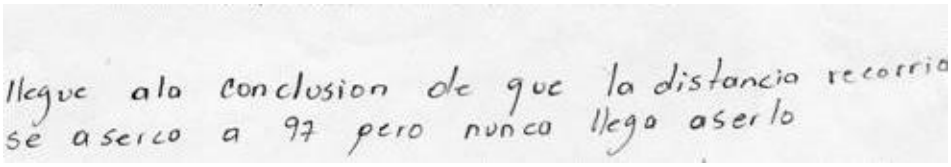


Figura N° 93: Conclusiones mediante registro verbal de grupo cuatro de actividad nueve

A manera de síntesis de lo desplegado por los estudiantes reportado en sus producciones, ellos:

- Recurrieron a diferentes estrategias para afrontar la situación problema, entre las que sobresalen están estrategias de razonamiento, estrategias aritméticas y estrategias visuales combinadas con tratamientos algebraicos en su interior.
- Presentaron ideas de aproximación como un acercamiento al límite sin llegar a la captura del mismo probablemente porque hay procesos de maduración que se están sucediendo en cada individuo o porque persiste la aversión al límite que menciona Díaz. (1999).
- Utilizaron las frases "se acerca" "se aproxima" en particular por el grupo 4 lo que reafirma que hay procesos inacabados al interior de los conocimientos que manejan los estudiantes.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

Para la investigación se consideraron elementos teóricos tales como la evolución histórica del paso al límite, en particular de la primera etapa, *Desde Eudoxo de Cnido (S. IV a.C.) hasta el siglo XVII*. También se recurrió a elementos de las representaciones semióticas de Duval y a miradas de visualización. En particular el trabajo se propuso trazar itinerarios estudiantiles en las tareas de configuración del infinito, como proceso implícito en el paso al límite en contextos de geometría sintética, en particular de la serie como herramienta de cálculo de sumas infinitas.

Con respecto a la primera pregunta de investigación del estudio, se evidenció en los diferentes grupos la puesta en escena de habilidades de razonamiento lógico al momento de abordar la situación problema, plantear diferentes estrategias de resolución. La síntesis y el análisis se evidenciaron cuando fue necesario descomponer las figuras de las consignas en otras menores y también al momento de reunir todas las áreas de las n figuras que lograron construir. La visualización emergió al momento de descomponer las figuras y utilizar la información visual para hacer uso de esta en argumentaciones, comunicar, representar entre otros.

Con respecto a la segunda pregunta de investigación de este estudio, se observó que las diferentes actividades diseñadas ayudaron a potenciar un acercamiento a las nociones de infinito potencial y actual para dar el paso al límite. A pesar que los estudiantes tuvieron un acercamiento de la noción del paso al límite sin llegar a darlo en la mayoría de los casos, el diseño de las actividades les ofreció una manera diferente para abordar una introducción a la temática de límite. El recurso de geometría sintética fue de gran utilidad puesto que se observó que los estudiantes

progresaron en aspectos cognitivos principalmente en visualización, estrategias para resolver una situación problema entre otros aspectos.

La tercera pregunta de investigación que se refiere a cómo contribuyen los juegos de representación, a la construcción de significados para el paso al límite fue contestada de alguna manera de acuerdo a las producciones realizadas por los estudiantes. Ellos diseñaron diferentes estrategias para la resolución de la situación problema, donde la articulación entre registros principalmente el geométrico con el analítico algebraico y el aritmético con el verbal ayudaron a construir una red de significados para significar el paso al límite.

Con respecto a la cuarta pregunta de investigación que se refiere a las estrategias que muestran los estudiantes al enfrentarse al paso al límite , se observó que los grupos realizaron diferentes estrategias tales como geométricas, algebraicas, argumentaciones verbales entre otras. Las diferentes estrategias convergieron, puesto que trataron de dar respuesta a la situación problema enfocándose en el paso al límite donde principalmente utilizaron la herramienta de la serie geométrica para calcular el valor.

En particular, esta tesis se propuso trazar un itinerario en los estudiantes, en las tareas de configuración del infinito, como proceso implícito en el paso al límite en contextos de geometría sintética, en particular de la series como herramienta de cálculo de sumas que fueron referidas en la actividades de este trabajo de investigación.
Con respecto al infinito potencial, se distingue entre las estrategias estudiantiles varias formas de dar cuenta de su uso, haciéndose esto visible vía variados registros.
En el registro algebraico y también numérico, mediante "puntos suspensivos". En el registro de lenguaje natural vía afirmaciones del estilo: el área de cada círculo es (…) el área del anterior", "así sucesivamente", "dividir los triángulos indefinidamente".

En el registro geométrico, dibujando más figuras de las que se proporcionan en la figura que se explicita en la situación problema.

En el registro algebraico y también numérico, explicitando más expresiones algebraicas o cálculos numéricos, para figuras que no aparecen "dibujadas" en la original. En algunos casos, incorporan estas expresiones o cálculos sin necesidad de explicitar la figura a la cual debiese corresponder. En ese sentido, asumen que las figuras se siguen generando y que las determinadas expresiones o cálculos corresponden a aquellas. Se ayudan en algunas ocasiones para elucidar lo anterior, con comentarios expresados evidentemente, mediante registro de lenguaje natural.

Con respecto al infinito actual, son muy incipientes los indicios encontrados en las producciones estudiantiles, quizás por la doble faceta de ver el infinito desde las dos perspectivas que hicieron mención Tall (1980 ,1992) y Hitt (2003).

En las actividades de la investigación, se exhibieron diferentes argumentos para la resolución de cada actividad propuesta. En los desplazamientos entre registros algebraico y geométrico, evidenciaron su articulación. En las actividades desarrolladas los grupos obtuvieron respuestas análogas, a pesar de la diversidad de estrategias utilizadas.

En síntesis, las actividades propuestas en contextos de geometría orientaron a acercamientos de configuración de nociones de infinitos, en sus dos facetas a saber potencial y actual como procesos-conceptos al interior del paso al límite. Las producciones desarrolladas por los estudiantes en esta tesis, ofrecen una riqueza en el sentido del aporte de diversas estrategias de resolución por parte de los estudiantes en las nueve actividades propuestas. Actividades que lograron en alguna medida

propiciar la configuración de los infinitos en sus facetas potencial y actual como procesos-conceptos subyacentes en el paso al límite.

Queda como tarea el rediseño de las actividades que profundice en poner en escena la faceta actual del límite así como el paso explícito del límite en su propio mérito. Tanto los hallazgos encontrados en esta primera aproximación a los infinitos actual y potencial y rediseños como el antedicho constituyen un horizonte para proseguir con esta investigación a nivel Doctoral.

5.2. Recomendaciones

Iniciar a los estudiantes desde temprana edad en actividades que desarrollen la comprensión del infinito desde su doble perspectiva, sin importar los obstáculos y desafíos que esta noción les pueda provocar a los niños. De acuerdo al estudio de Tall (1980,1992) menciona que es fundamental la comprensión de la noción del infinito como un concepto previo a un curso de cálculo.

Desarrollar más actividades, guías de trabajo, de laboratorio en donde aparezca la mayor cantidad de recursos puesto que a través de ellos la comprensión o significancia de un objeto matemático puede más significativa para los estudiantes. Duval (1999) presentó la importancia del trabajo con variedad de registro de representación semióticos.

Darle seguimiento al grupo de estudiantes, en el desarrollo de estrategias cuando utilizan en concepto de límite matemático en diferentes contextos.

Sugerir la continuación de este trabajo a futuros investigadores del programa de Maestría en Matemática Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco

Morazán, específicamente en tareas pendientes tales como configuración de infinito actual, desafíos en torno a la noción del infinito, entre otros.

BIBLIOGRAFÍA

Apostol, T. (1976). Análisis Matemático. Barcelona: Editorial Reverté.

Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. En Hitt, F., Santos, M. (Eds.), Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp.55-80). Morelos, México.

Artigue, M. (1995). "Ingeniería Didáctica en Educación Matemática". pp. 33-59. P. Gómez (ed.), Una Empresa Docente-Grupo, Editorial Iberoamérica, Bogotá, Colombia.

Artigue, M (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 1(1), 40-55.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld, E.ubinsky (Ed.s) Research in Collegiate Mathematics Education. Vol. 2. Providence, RI: American Mathematical Society. pp. 1-32.

Bagni, G. (2005) Historical Roots of limit notion. Development of its representation registers and cognitive development. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 5(4), 453-468.

Bertero, F. y Trípoli, M. (2006). Teoría de infinitesimales: historia, desarrollo y aplicaciones .Tesis de Licenciatura en Matemática no publicada, Universidad Nacional de La Plata. Argentina.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 30, 67-84.

Blázquez, S., Ortega, T. et al (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático de la universidad. Relime, Vol. 9, Nº 2, julio 2006, pp. 189-209.

Bokhari, M. A. Y Yushau, B. (2006). Local (L, ε)-approximation of a function of single variable: an alternative way to define limit. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37(5), 515–526.

Boyer, C. (1992). Historia de la Matemática. Madrid: Alianza Editorial.

Browder, Felix E. Mathematical Developments Arising From Hilbert Problems. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, (Volume XXVIII).AMS, 1976.

Bucari, N., Bertero, F. y Trípoli, M. (2007). Distintos enfoques para la enseñanza de la noción de límite en un primer curso de Cálculo. Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales, octubre 2007.

Cantoral, R., Montiel, G. (2001). Visualización y pensamiento matemático. Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa Educación Superior Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.

Cantoral, R., Montiel, G. (2002). Desarrollo del pensamiento matemático: el caso de la visualización de funciones. En C. Crespo (Ed.). Universidad San Martín, Provincia de Buenos Aires, Argentina: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15(1), 430 – 435.

Castro, I. (2009). Una socioepistemología del pensamiento proporcional: Mirada desde los imaginarios del estudiantado y del profesorado. Tesis de doctorado. UMCE. Chile.

Cornu, B. (1983). Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles (Th'ese de doctorat). Université de Grenoble I.

Cornu, B. (1986). Les principauxobstacles a l'apprentissage de la notion de limite. Bulletin IREM – APMEP, Feb 1986, 55- 63.

Cornu, B. (1991). Limits. En Tall, D. (Ed), Advanced Mathematical Thinking (pp. 153 - 166).Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., &Vidakovic, D. (1996).Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. Journal of Mathematical Behavior, 15, 2, 167 – 192.

Crippa, A. y Hanfling, M., (2000). "Aprendizaje de los conocimientos matemáticos". En G. Chemello; G. Barallobres; A. Crippa; M. Hanfling, Módulo Problemas de la enseñanza de la matemática. Quilmes, UNVQ: 2000.

Chávez, H. (1998) Los problemas alrededor del concepto de límite y su enseñanza a través del uso de la computadora. Memorias IX Seminario nacional microcomputadoras en la Educación Matemática. México.

Dauben J. (1995) "Georg Cantor". Investigación y Ciencia, temas, 1. pp.94-105

Dauben, J. Georg Cantor his mathematics and philosophy of the infinity. Princeton U.P., 1990 (1979).

De Guzmán, M. (1996). El rincón de la pizarra. Pirámide, Madrid.

Díaz, L. (1999). "Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite. Un estudio de casos". Memoria doctoral. Facultad de Educación. PUCCH. 1999. Santiago de Chile.

Díaz, M. (1999). Fundamentos de la matemática: análisis de la primera crisis. Universidad Autónoma de Guerrero, Unidad Académica de Matemáticas. Chilpancingo, Guerrero, México: Tesis de Maestría no publicada.

Díaz, M. (2009). El método de exhaución. Revista Alternativa. Número 19. México.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. Educación Matemática. 8(3), 25 – 41.

Dubinsky, E. (1997). Some Thoughts on a First Linear Algebra Course, in D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, R.D. Porter, A. Watkins, y W. Watkins, (Eds). Resources For Teaching Linear Algebra, MAA Notes, 42, pp. 85 - 106.

Dubinsky, E. (2000). A theory-based approach to help students learn post-secondary mathematics: The case of limits. Research reports in mathematics education, 1, Umea University, pp. 1-18.

Duval, R. (1999). 'Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for Learning' (Plenary address) In Hitt, F. and Santos, M. (ed) Proceedings of the 21st PME-NA Conference, 1, Cuernavaca, Morelos, Mexico,pp. 3-26.

Ferrante, J. (2009). El Análisis Matemático que nos enseñaron nuestros maestros. Departamento de Ciencias Básicas. Universidad Tecnológica Nacional. Argentina.

Hitt F. (1995) Construcción De Conceptos Matemáticos Y De Estructuras Cognitivas. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Hitt F. (2002) Funciones en contexto. Proyecto Visualización Matemática y Tecnología (VIMATEC), Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad defunciones. En Filloy, E. (Ed), Matemática Educativa, Aspectos de la investigación actual (pp 91 - 111). México DF, México: Fondo de Cultura Económica.

Hitt F. y Páez R. (2001) 1. The notion of limit and learning problems. Proceedings PME-NA XXIII, Utah, USA, 2001, Vol. 1, pp. 169- 1 76.

Hitt F. y Páez R. (2003).Dificultades de aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto. Revista Uno, No. 32, pp. 97-108.

Juter, K. (2005). Limits of functions: How do students handle them? Pythagoras, 61, 11-20.

Juter, K. (2006).Limits of functions as they developed through time and as students learn them today. Mathematical thinking and learning, 8(4), pp. 407 – 431.

Legrand, M. (1993). Debat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l´analyse.Repéres IREM, 10, 123-159.

Lestón, P. (2008). Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares. Tesis de maestría no publicada. CICATA- IPN, México

Lestón, P. (2011). El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología. Tesis de doctorado no publicada. CICATA- IPN, México.

Medina, A. (2001). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología. Universidad Pedagógica Nacional. No.9, Santa Fe de Bogotá, pp.44-60.

Molfino, V. (2010). Procesos de institucionalización del concepto de límite: análisis socioepistemológico. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN. México.

Ortiz, J. (1994). "El concepto de infinito". Asociación Matemática Venezolana. Boletín Vol. I, N 2.

Reparaz y López (2005). Ideología y Matemáticas. Revista Rect@. Vol. Actas 13. España.

Rey, A. (1962). El apogeo de la ciencia técnica griega. México: UTEHA.

S. Aquere, A. Engler, S. Vrancken, D. Müller (2009).Una Propuesta Didáctica Para La Enseñanza De Límite. - Actas De La Soarem Argentina.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. Recherchesen Didactique des Mathématiques, 6 (1), 5-68.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. Educational Studies in Mathematics, 18, 371-397.

Sierpinska, A. (1988). Sur un programme de recherche lié la notion d'obstacle epistemologique. Actes du Colloque: Construcition des savoirs: obstacles et conflicts. Montréal: CIRADE.

Tall, D y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151–169.

Tall, D. (1980).Mathematical Intuition, with Special Reference to Limiting Processes. Proceedings of PME 4, pp. 170 – 176.

Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. En Grouws D.A. (ed.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan, pp. 495–511.

Tall, D. y Schwarzenberger, R. (1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. Mathematics Teaching, 82, pp. 44–49.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En Tall, D. (Ed), Advanced Mathematical Thinking (pp. 65 - 81). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Zimmerman, W; Cunningham, S. (1991).Visualization in Teaching and Learning Mathematics, MAA Notes Number 19. USA, Mathematical Association of America.

GLOSARIO

Abstracción. La abstracción matemática significa apartar todas las demás cualidades materiales de las cosas, y quedarse con la cantidad.

Acomodación. La acomodación o ajuste es un concepto psicológico introducido por Jean Piaget. Es, junto con la asimilación, uno de los dos procesos básicos para este autor en el proceso de desarrollo cognitivo del niño

Analizar. Esta habilidad cognitiva consiste en separar el todo en sus partes de acuerdo a un plan o una forma concreta de razonar.

Asimilación. La asimilación (del Lat. ad = hacia + similis = semejante) es un concepto psicológico introducido por Jean Piaget para explicar el modo por el cual las personas ingresan nuevos elementos a sus esquemas mentales preexistentes, explicando el crecimiento o cambio cuantitativo de éste.

Conflicto cognitivo. Fenómeno psicológico de contraste producido por la discrepancia entre las preconcepciones y significados previos de un alumno en relación con un hecho, concepto, procedimiento, determinado, y los nuevos significados que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Definición del concepto. La definición de un concepto matemático como una secuencia de palabras o una definición verbal del concepto, fruto de su evolución histórica

Geometría sintética. Se denomina al tipo de geometría que no necesita del plano cartesiano para realizar representaciones. Refiere normalmente euclidiana.

Horror infiniti. Se refiere a uno de los errores que encontró Sierpinska en sus estudios en relación con la adversión o miedo que les presenta la palabra a los estudiantes.

Imagen conceptual. La estructura cognitiva de un individuo asociada a un concepto matemático y que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados al concepto; se construye a lo largo de los años a través de experiencias de todo tipo y va cambiando según el individuo madura y halla nuevos estímulos.

Infinito actual. Característica de un objeto matemático que, concebido como unidad acabada, puede decirse que no es finito.

Infinito potencial. Característica de un proceso que puede continuarse eternamente sin llegar nunca a estar completo o acabado.

Límite matemático. En matemática, el límite es un concepto que describe la tendencia de una sucesión o una función, a medida que los parámetros de esa

sucesión o función se acercan a determinado valor. En cálculo (especialmente en análisis real y matemático) este concepto se utiliza para definir los conceptos fundamentales de convergencia, continuidad, derivación, integración, entre otros.

Matemática Transfinita. Hace referencia a los Número transfinito, que a su vez son números construido por Cantor para representar los cardinales de los conjuntos infinitos.

Método de exhaución. Es un método atribuido a Antifonte (430 a. C.) trató de determinar el área del círculo inscribiendo en él un mayor número de triángulos, cada vez más pequeños, hasta que su área se colmara. Un ejemplo más famoso del método exhaustivo o por agotamiento es el del cálculo de la longitud de una circunferencia efectuado por Arquímedes.

Obstáculos cognitivo. Es un tipo de obstáculo que aparecen en forma repetida, que además son resistentes y cuyo origen excede al propio sujeto.

Obstáculo didáctico. Es un tipo de obstáculo provocado por el sistema de enseñanza.

Obstáculo epistemológico. Es un tipo de obstáculo derivado del rol constitutivo del saber mismo.

Paradojas de Zenón. Las paradojas de Zenón son una serie de paradojas o aporías, ideadas por Zenón de Elea, para apoyar la doctrina de Parménides de que las sensaciones que obtenemos del mundo son ilusorias, y concretamente, que no existe

el movimiento (física). Racionalmente, una persona no puede recorrer un estadio de longitud, porque primero debe llegar a la mitad de éste, antes a la mitad de la mitad, pero antes aún debería recorrer la mitad de la mitad de la mitad y así eternamente hasta el infinito. De este modo, teóricamente, una persona no puede recorrer un estadio de longitud, aunque los sentidos muestran que sí es posible.

Paso al límite. Se comprende como el proceso que antecede a encontrar el valor numérico o valor límite. El proceso de paso al límite se caracteriza por una secuencia de acciones que continua de manera indefinida. A la vez que es la captura completa de esta secuencia, es decir abstraer el proceso indefinido como si se tratara de un proceso acabado.

Pensamiento aleatorio. Este tipo de pensamiento, llamado también probabilístico o estocástico, ayuda a tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, de azar, de riesgo o de ambigüedad por falta de información confiable, en las que no es posible predecir con seguridad lo que va a pasar. El pensamiento aleatorio se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial, e indirectamente en la estadística descriptiva y en la combinatoria.

Pensamiento espacial y sistemas geométricos. Se define como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales, contempla las actuaciones del sujeto en todas sus dimensiones y relaciones espaciales para interactuar de diversas maneras con los objetos situados en el espacio,

desarrollar variadas representaciones y, a través de la coordinación entre ellas, hacer acercamientos conceptuales que favorezcan la creación y manipulación de nuevas representaciones mentales.

Pensamiento numérico. Se refiere al desarrollo de los procesos curriculares y la organización de actividades centradas en la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración; la comprensión del sentido y significado de las operaciones y de las relaciones entre números, y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación.

Pensamiento matemático avanzado de los estudiantes. Se refiere al pensamiento que requiere de habilidades cognitivas tales como abstracción, análisis, síntesis, razonamiento lógico, visualización, argumentar, demostrar, conjeturar. Estas habilidades se refieren a niveles de escolaridad alto.

Pensamiento matemático avanzado erudito. Se refiere al cuerpo de matemática referida a cursos de alto nivel de formalismo, tal es el caso de análisis, álgebra superior, ecuaciones diferenciales entre otras.

Pensamiento matemático de los estudiantes. El pensamiento matemático es una capacidad. Es el elemento esencial que fomenta el desarrollo de la imaginación y creatividad y como tal el razonamiento lógico. Dentro de las competencias indispensables para el desarrollo del pensamiento matemático se mencionan: pensar, razonar, argumentar, comunicar, modelar, representar, usar el lenguaje simbólico, plantear y resolver problemas.

Pensamiento matemático erudito. Este pensamiento se refiere a toda la obra matemática y su producción fundamentada en el formalismo donde se compone de axiomas, definiciones, teoremas, lemas, corolarios. Otros denominan al pensamiento matemático erudito como el saber sabio.

Pensamiento métrico y los sistemas métricos de medida. Los conceptos y procedimientos propios de este pensamiento hacen referencia a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones.

Pensamiento numérico. Se refiere al desarrollo de los procesos curriculares y la organización de actividades centradas en la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración; la comprensión del sentido y significado de las operaciones y de las relaciones entre números, y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación.

Pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. Como su nombre lo indica, este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.

Razonamiento lógico. De manera deductiva, utilizando conocimientos de dos o más premisas para inferir si una conclusión es válida. De manera inductiva, Recolectando información y formulando hipótesis en base a dicha información.

Serie geométrica. En ella, dado un término, el siguiente resulta de multiplicar el término anterior por un valor fijo.

Síntesis. Esta habilidad cognitiva consiste en reunir el todo a través de cada una de sus partes que lo constituyen.

Teoría APOS. La teoría APOS es una interpretación de la teoría constructivista que se basa principalmente en el concepto de abstracción reflexiva, introducido por Piaget, para describir el desarrollo del pensamiento lógico en los niños, y extiende la idea a nociones matemáticas más avanzadas.

Visualización. Se utilizará en el sentido de representaciones geométricas o gráficas que ponga de manifiesto la representación de un determinado objeto y operaciones sobre este. Tal operar considera que el estudiantado represente, transforme, documente y argumente sus acciones al enfrentarse a una situación problema.

ANEXO N° 1: Prueba Diagnóstica

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE HONDURAS
UNAH TEC DANLI

II período 2011

Prueba Diagnóstica de Calculo I

Estudiante: _____

Número de Registro_____

Facilitador M.Sc. Marvin Roberto Mendoza Valencia

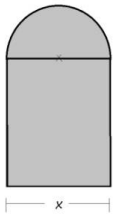
INDICACIONES GENERALES: Resuelva de manera clara, ordenada y nítida lo que a continuación se le solicita, deje plasmado todo el procedimiento, aunque lo considere incorrecto.

1. **Un rectángulo tiene un perímetro de 20m. Exprese el área del rectángulo como función de la longitud de uno de sus lados.**

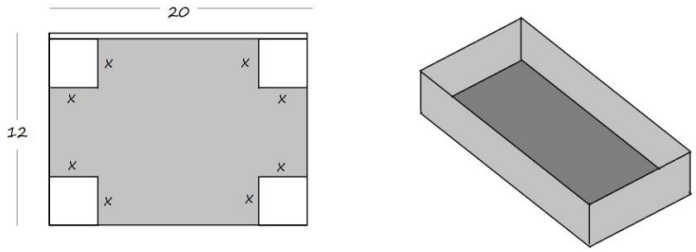
2. **Exprese el área de un triángulo equilátero como función de la longitud de uno de los lados.**

3. **Exprese el área de un cubo como función de su volumen.**

4. **Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 30ft, exprese el área A de ella como función del ancho x de la misma.**



5. **Debe construirse una caja con su parte superior abierta a partir de un trozo rectangular de cartón que tiene las dimensiones de 12in y 20in, recortando cuadrados iguales de lado x en cada una de las esquinas y, a continuación, doblando los lados como se ilustra en la figura. Exprese el volumen V de la caja como función de x.**



6. **El propietario de una casa corta el césped cada miércoles por la tarde. Trace una gráfica aproximada de la altura del césped como función del tiempo durante un periodo de cuatro semanas.**

7. **En la tabla, se muestra la población P (en miles) de San José, California desde 1984 a 1994. (se dan las estimaciones correspondientes a la mitad del año). Elabore una gráfica que muestre esta situación.**

F	1984	1986	1988	1990	1992	1994
P	695	716	733	783	800	812

8. Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$, encuentre

   $f(0), f(2), f(\sqrt{2}), f(1+\sqrt{2}), f(-x), f(x)$ y $f(2x)$.

9. **Encuentre el dominio de la función**

   c) $f(x) = \frac{x^4}{x^2+x-6}$

   d) $f(t) = \sqrt[3]{t-1}$

10. **Encuentre el dominio, rango, interceptos, intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento, además trace la gráfica de la función.**

    f) $f(x) = 3 - 2x$

    g) $f(x) = x^2 + 2x - 1$

    h) $h(x) = |2x|$

    i) $f(x) = \begin{cases} x & si\ x \leq 0 \\ x+1 & si > 0 \end{cases}$

j) $f(x) = \begin{cases} -1 & si\ x \leq -1 \\ 3x + 2 & si\ |x| < 1 \\ 7 - 2x & si\ x \geq 1 \end{cases}$

11. Se da la gráfica de una función f

b) Establezca el valor de f(x-1)

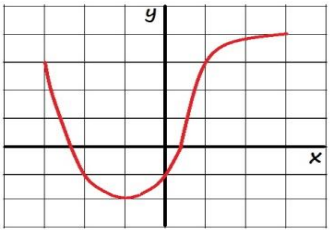
c) Estime el valor de f(2)

d) ¿Para cuales valores de x se tiene que f(x)=2?

e) Estime los valores de x tales que f(x)=0

f) Establezca el dominio y el rango de f

g) ¿En qué intervalo es f creciente?



12. Se proporciona las gráficas de f y g

a) Dé los valores de f(-4) y de g(3)

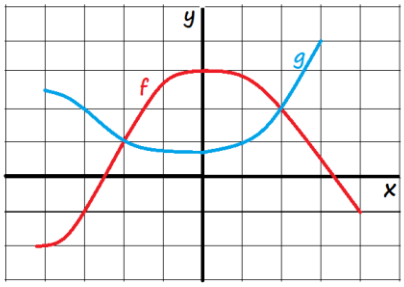
b) ¿Para cuales valores de x se tiene que f(x)=g(x)?

c) Estime la solución de la ecuación f(x)=-1

d) ¿En qué intervalo f es decreciente?

e) Dé el dominio y el rango de f

f) Dé el dominio y rango de g



ANEXO N° 2: Actividades Implementadas

Universidad Nacional Autónoma De Honduras

UNAH-TEC Danlí

ACTIVIDAD No. 1

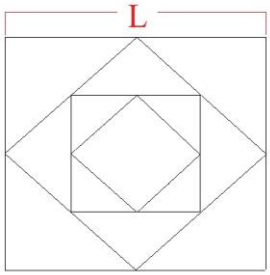
NOMBRE DEL ALUMNO: _____

FECHA: _____

INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta el siguiente problema, desarrolle cada uno como considere conveniente, no borre nada aun cuando crea que sea incorrecto. De preferencia trabaje con lápiz carbón y de forma ordenada.

Uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado L, se obtiene otro cuadrado, en el que volvemos a hacer la misma operación, y así se continua indefinidamente.

Calcular la suma de las áreas de los infinitos cuadrados



Universidad Nacional Autónoma De Honduras

UNAH-TEC Danlí

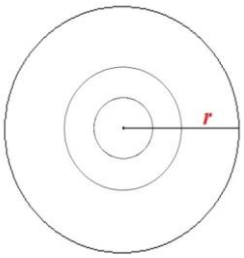
ACTIVIDAD No. 2

NOMBRE DEL ALUMNO: _____

FECHA: _____

INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta el siguiente problema, desarrolle cada uno como considere conveniente, no borre nada aun cuando crea que sea incorrecto. De preferencia trabaje con lápiz carbón y de forma ordenada.

Sobre un circulo de radio r, dibuje otro circulo concéntrico de radio r/2. Dibuje otro circulo concéntrico a los anteriores de radio r/4y así sucesivamente.



¿Qué sucede con las áreas de los círculos? Justifique su respuesta.

¿Hay alguna sucesión que te pueda ayudar a resolver el problema analíticamente?

Si la respuesta es afirmativa, escríbela.

¿Qué otras sucesiones se pueden formar en este problema?

Universidad Nacional Autónoma De Honduras

UNAH-TEC Danlí

ACTIVIDAD No. 3

NOMBRE DEL ALUMNO: _____

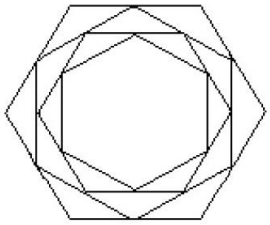
FECHA: _____

INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta el siguiente problema, desarrolle cada uno como considere conveniente, no borre nada aun cuando crea que sea incorrecto. De preferencia trabaje con lápiz carbón y de forma ordenada.

Sobre un hexágono regular, se traza otro hexágono uniendo los puntos medios del primero, enseguida, se traza otro hexágono uniendo los puntos medios del segundo hexágono, y así sucesivamente.

¿Qué sucede con las áreas de los hexágonos?

Justifique su respuesta.



Universidad Nacional Autónoma De Honduras

UNAH-TEC Danlí

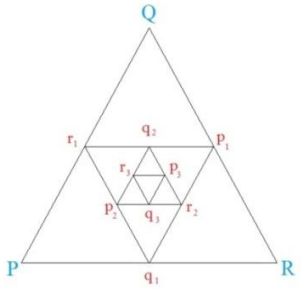
ACTIVIDAD No. 4

NOMBRE DEL ALUMNO: _____

FECHA: _____

INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta el siguiente problema, desarrolle cada uno como considere conveniente, no borre nada aun cuando crea que sea incorrecto. De preferencia trabaje con lápiz carbón y de forma ordenada.

PQR es un triángulo equilátero. Se divide cada lado del triángulo en dos partes iguales y se etiquetan los puntos medios como p1, q1 y r1. Considerando el triángulo p1 q1 r1, se vuelve a dividir cada lado y se etiquetan los puntos medios como p2, q2 y r2. El proceso se continúa de la misma manera.



¿Cuál será el área de la figura final? Explique su respuesta.

Si sumamos las áreas de los triángulos Pq1r1, Rp1q1 y Qp1r1 obtenemos ¾. Si ahora le sumamos las áreas de los triángulos p2q2r1, p1q2r2 y p2q1r2, obtenemos ¾ + 3/16. Si seguimos realizando estas sumas, ¿obtendremos un valor? Justifique su respuesta.

Si respondiste afirmativamente a la pregunta del inciso anterior ¿Cuál es ese valor? Justifique su respuesta.

Universidad Nacional Autónoma de Honduras
UNAH-TEC Danlí

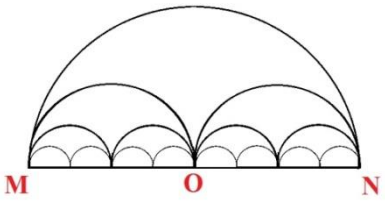
ACTIVIDAD No. 5

NOMBRE DEL ALUMNO: _____

FECHA: _____

INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta el siguiente problema, desarrolle cada uno como considere conveniente, no borre nada aun cuando crea que sea incorrecto. De preferencia trabaje con lápiz carbón y de forma ordenada.

Se construye un semicírculo con el segmento MN como diámetro. Luego, se divide MN en dos partes iguales MO y NO, y se construyen dos semicírculos como lo indica la figura. Se continua dividiendo y construyendo semicírculos.



¿Qué sucede con la longitud de la línea ondulada a medida que se disminuye la longitud de cada sub-segmento? Explique su respuesta.

Si suma las áreas determinadas por los semicírculos a medida que se disminuye la longitud de cada sub-segmento ¿obtendrás un valor? Explique su respuesta. Si respondiste afirmativamente a la pregunta del inciso anterior ¿Cuál es el valor? Justifique su respuesta.

Universidad Nacional Autónoma de Honduras

UNAH-TEC Danlí

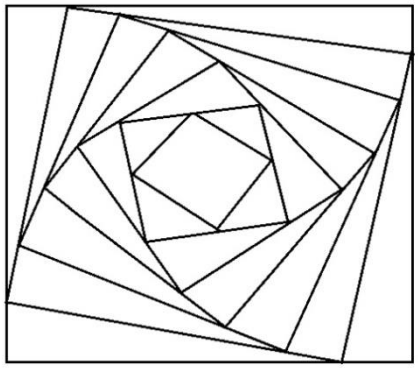
ACTIVIDAD No. 6

NOMBRE DEL ALUMNO: _____

FECHA: _____

INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta el siguiente problema, desarrolle cada uno como considere conveniente, no borre nada aun cuando crea que sea incorrecto. De preferencia trabaje con lápiz carbón y de forma ordenada.

Partiendo de un cuadrado grande, se traza otro al interior desplazando sus vértices como se observa en la figura: cada vértice esta sobre el lado del primer cuadrado a una distancia igual a 1 cm de su vértice. Se traza otro cuadrado siguiendo el mismo proceso y después otro más y así sucesivamente. ¿Hasta dónde se puede realizar esa construcción?



Universidad Nacional Autónoma de Honduras
UNAH-TEC Danlí

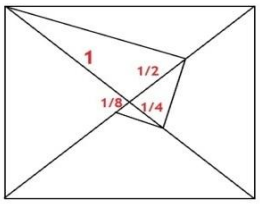
ACTIVIDAD No. 7

NOMBRE DEL ALUMNO: _____

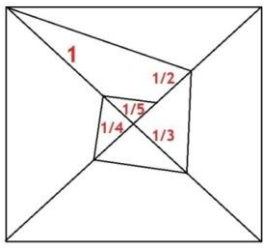
FECHA: _____

INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta el siguiente problema, desarrolle cada uno como considere conveniente, no borre nada aun cuando crea que sea incorrecto. De preferencia trabaje con lápiz carbón y de forma ordenada.

En un cuadrado cuya diagonal mide 2 unidades se dibuja una espiral como se indica en la figura. Las distancias de los extremos de los segmentos que componen la espiral al centro del cuadrado son 1, ½, ¼, 1/8,…



Se dibuja una nueva espiral, pero esta vez, las distancias de los extremos de los segmentos que componen la espiral al centro del cuadrado son 1, ½, 1/3, ¼, 1/5,…



¿Se puede continuar con la construcción de cada una de las espirales? Explique su respuesta.

¿Cuál es la longitud de cada una de las espirales? Justifique su respuesta.

Comparar los problemas y sus resultados.

Universidad Nacional Autónoma de Honduras

UNAH-TEC Danlí

ACTIVIDAD No. 8

NOMBRE DEL ALUMNO: _____

FECHA: _____

INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta el siguiente problema, desarrolle cada uno como considere conveniente, no borre nada aun cuando crea que sea incorrecto. De preferencia trabaje con lápiz carbón y de forma ordenada.

Una hormiga camina sobre una tira elástica. Inicia en un extremo y recorre 6 cm por minuto. Al inicio, la tira elástica tiene 24 cm. Después de cada minuto, el elástico se alarga 12 cm. Suponga que la tira se puede alargar indefinidamente de manera uniforme.

¿La hormiga llegara al otro extremo de la tira elástica? Explique su respuesta.

Si responde afirmativamente, ¿en cuánto tiempo llegará la hormiga al otro extremo?

Universidad Nacional Autónoma de Honduras
UNAH-TEC Danlí

ACTIVIDAD No. 9

NOMBRE DEL ALUMNO: _____

FECHA: _____

INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta el siguiente problema, desarrolle cada uno como considere conveniente, no borre nada aun cuando crea que sea incorrecto. De preferencia trabaje con lápiz carbón y de forma ordenada.

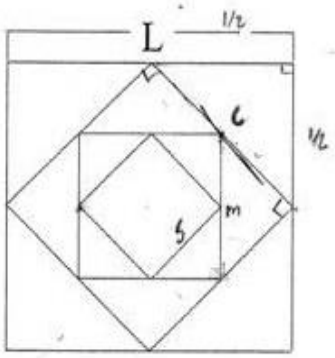
Dos trenes avanzan uno hacia el otro sobre una vía recta. Al inicio, se encuentran alejados uno del otro una distancia de 100 km. Los trenes van a una velocidad de 50 km/h. Una mosca que se desplaza a una velocidad de 100 km/h parte de uno de los trenes hacia el otro, inmediatamente regresa hacia el primer tren y parte hacia el otro, y así sucesivamente. ¿Qué distancia habrá recorrido la mosca entre el instante inicial y el momento de ser aplastada por el choque de los dos trenes?

ANEXO N° 3: Producciones Estudiantiles Por Actividad

ACTIVIDAD 1 – GRUPO 1

- Uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado L, se obtiene otro cuadrado, en el que volvemos a hacer la misma operación, y así se continua indefinidamente.

Calcular la suma de las áreas de los infinitos cuadrados



$m = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\ell\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\ell\right)^2}$

$m = \sqrt{\frac{2}{16}\ell^2 + \frac{2}{16}\ell^2}$

$m = \sqrt{2\left(\frac{2}{16}\ell^2\right)}$

$m = \sqrt{\frac{4}{16}\ell^2}$

$m = \frac{2}{4}\ell$

$m = \frac{1}{2}\ell$

$A\square = \frac{1}{4}\ell^2$

$c = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$c = \sqrt{\frac{\ell^2}{4} + \frac{\ell^2}{4}}$

$c = \sqrt{\frac{2\ell^2}{4}}$

$c = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell$

$A\square = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)^2$

$A\square = \frac{2}{4}\ell^2$

$A\square = \frac{1}{2}\ell^2$

$\ell^2 + \frac{1}{2}\ell^2 + \frac{1}{4}\ell^2 + \frac{1}{8}\ell^2 \ldots\ldots$ $r = \frac{1}{2} \div 1 = \frac{1}{2}$

$SA = \frac{a}{1-r}$

$SA = \frac{\ell^2}{1-\frac{1}{2}}$

$SA = \frac{\ell^2}{\frac{1}{2}} = 2\ell^2$

$s = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\ell\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\ell\right)^2}$

$s = \sqrt{\frac{1}{16}\ell^2 + \frac{1}{16}\ell^2}$

$s = \sqrt{2\left(\frac{1}{16}\ell^2\right)}$

$s = \sqrt{\frac{2}{16}\ell^2}$

$s = \frac{\sqrt{2}}{4}\ell$

$A\square = \frac{2}{16}\ell^2$

$A\square = \frac{1}{8}\ell^2$

ACTIVIDAD 1 – GRUPO 2

* Por pitágora podemos encontrar el valor de cada lado desconocido

$c^2 = \sqrt{(L/2)^2 + (L/2)^2}$

$c^2 = \sqrt{\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{4}}$

$\sqrt{c^2} = \sqrt{\frac{2L^2}{4}}$

$c = \frac{L\sqrt{2}}{2}$

Hemos observado que el área del cuadrado inscrito es igual a la mitad del área del cuadrado circunscrito y así sucesivamente

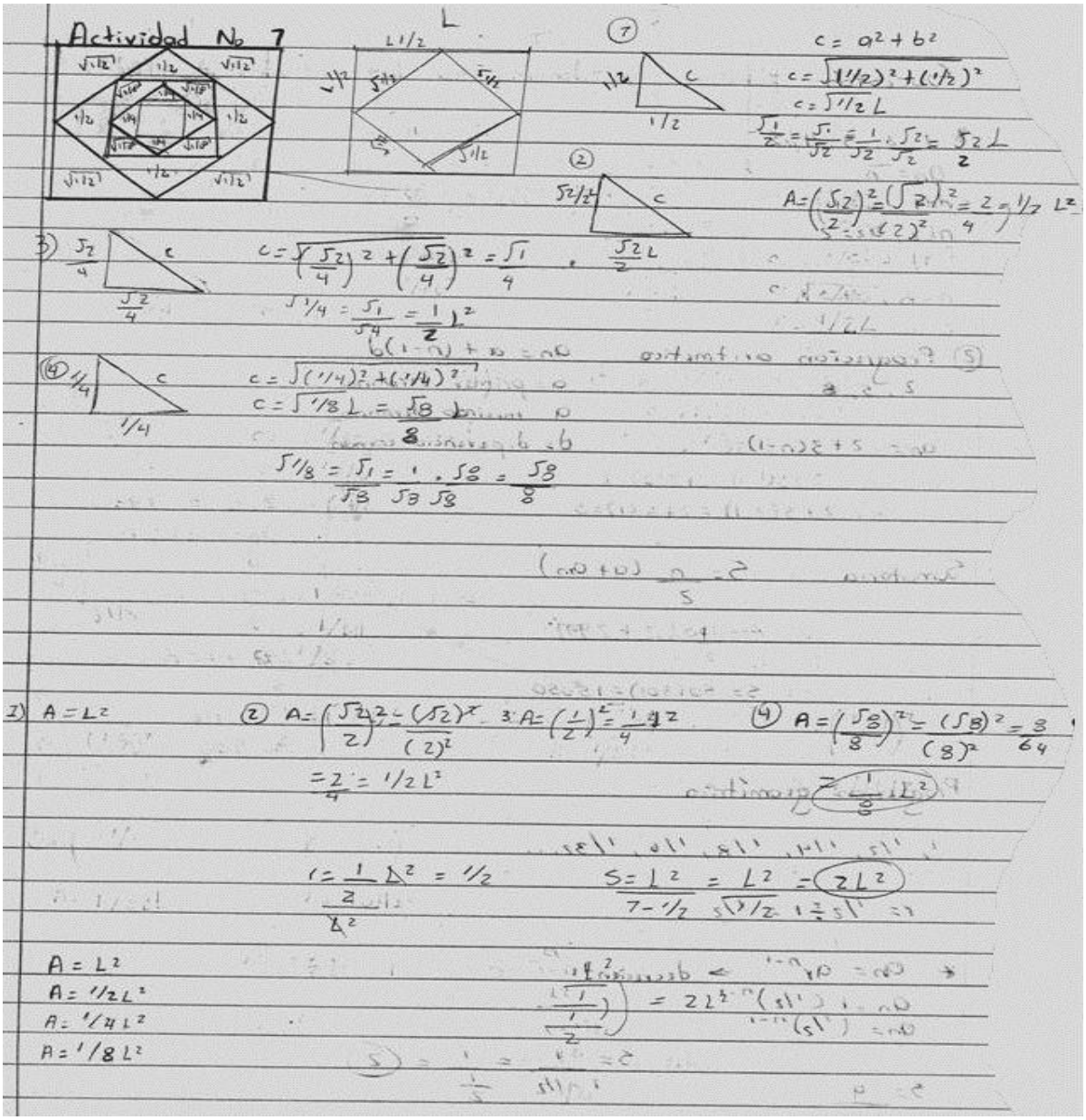
$L^2 + \frac{L^2}{2} + \frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{8} \dots$

$S = \frac{L^2}{1 - 1/2}$

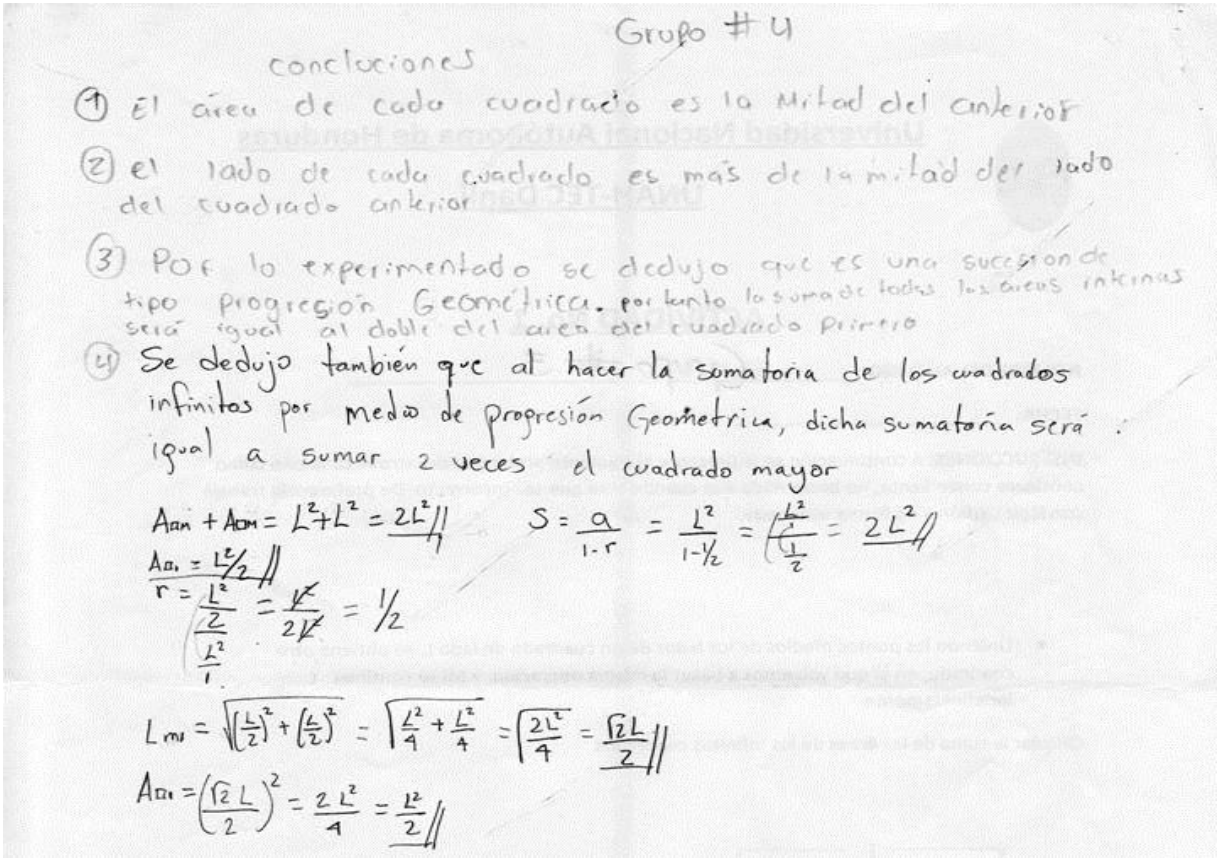
$= \frac{L^2}{\frac{1}{2}}$

$= 2L^2$

ACTIVIDAD 1 – GRUPO 3



ACTIVIDAD 1 – GRUPO 4



Grupo # 4

conclusiones

1. El área de cada cuadrado es la Mitad del anterior
2. el lado de cada cuadrado es más de la mitad del lado del cuadrado anterior
3. Por lo experimentado se dedujo que es una sucesión de tipo progresión Geométrica. por tanto la suma de todas las áreas internas será igual al doble del área del cuadrado primero
4. Se dedujo también que al hacer la sumatoria de los cuadrados infinitos por medio de progresión Geometrica, dicha sumatoria será igual a sumar 2 veces el cuadrado mayor

$A_{an} + A_{am} = L^2 + L^2 = 2L^2$ //

$S = \frac{a}{1-r} = \frac{L^2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{L^2}{\frac{1}{2}} = 2L^2$ //

$A_{a_1} = L^2/2$ //

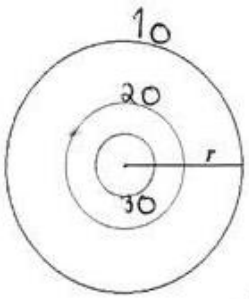
$r = \frac{\frac{L^2}{2}}{\frac{L^2}{1}} = \frac{L^2}{2L^2} = 1/2$

$L_{m1} = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{4}} = \sqrt{\frac{2L^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}L}{2}$ //

$A_{\square_1} = \left(\frac{\sqrt{2}L}{2}\right)^2 = \frac{2L^2}{4} = \frac{L^2}{2}$ //

ACTIVIDAD 2 – GRUPO 1

- Sobre un circulo de radio r, dibuje otro circulo concéntrico de radio r/2. dibuje otro circulo concéntrico a los anteriores de radio r/4 y así sucesivamente.
- ¿Qué sucede con las áreas de los círculos? Justifique su respuesta.
- ¿Hay alguna sucesión que te pueda ayudar a resolver el problema analíticamente?
- Si la respuesta es afirmativa, escríbel
- ¿Qué otras sucesiones se pueden formar en este problema?



1o $A = \pi r^2 = \pi r^2$

2o $A = \pi\left(\frac{1}{2}r\right)^2 = \frac{\pi}{4}r^2$

3o $A = \pi\left(\frac{1}{4}r\right)^2 = \pi\left(\frac{1}{16}r^2\right) = \frac{\pi}{16}r^2$

- Las Areas de los circulos se van reduciendo a 1/4. con respect al anterios

- Si hay una sucesión que puede ayudar a resolver el problema, se llama progresion geometrica.

No pueden haber otras Sucesion solo progresion Geométrica

$\pi r^2, \frac{\pi r^2}{4}, \frac{\pi r^2}{16}, \frac{\pi r^2}{64} \ldots$

r= suma de las areas

$$r = \frac{\pi r^2}{4} \div \frac{\pi r^2}{1} = \frac{\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

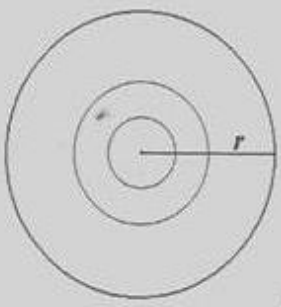
$$SA = \frac{\pi r^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\pi r^2}{\frac{3}{4}} = \frac{4\pi r^2}{3}$$

R// La suma de las areas tiende $\frac{4\pi r^2}{3}$ sin llegar a serlo porque nunca va llegar a un numero Final, o sea 0.

ACTIVIDAD 2 – GRUPO 2

INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta el siguiente problema, desarrolle cada uno como considere conveniente, no borre nada aun cuando crea que sea incorrecto. De preferencia trabaje con lápiz carbón y de forma ordenada.

- Sobre un circulo de radio r, dibuje otro circulo concéntrico de radio r/2. dibuje otro circulo concéntrico a los anteriores de radio r/4 y así sucesivamente.
- ¿Qué sucede con las áreas de los círculos? Justifique su respuesta.
- ¿Hay alguna sucesión que te pueda ayudar a resolver el problema analíticamente?
- Si la respuesta es afirmativa, escríbela.
- ¿Qué otras sucesiones se pueden formar en este problema?



$A_{C_1} = \pi r^2$ / $A_{C_2} = \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{4}$ $A_{C_3} = \pi\left(\frac{r}{4}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{16}$

* El área disminuye
El área del círculo inscrito representa ¼ del círculo circunscrito. (disminuye un 75% del área del circunscrito).

* Hay progresión geométrica.
πr^2; $\pi\left(\frac{r^2}{4}\right)$, $\pi\left(\frac{r^2}{16}\right)$...

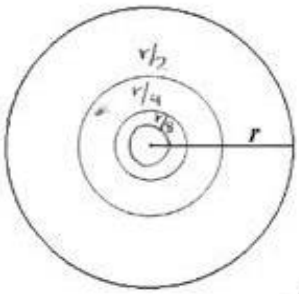
$S = \frac{\pi r^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\pi r^2}{3/4} = \frac{4(\pi r^2)}{3}$

ACTIVIDAD 2 – GRUPO 3

INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta el siguiente problema, desarrolle cada uno como considere conveniente, no borre nada aun cuando crea que sea incorrecto. De preferencia trabaje con lápiz carbón y de forma ordenada.

- Sobre un circulo de radio r, dibuje otro circulo concéntrico de radio r/2. dibuje otro circulo concéntrico a los anteriores de radio r/4 y así sucesivamente.

- ¿Qué sucede con las áreas de los círculos? Justifique su respuesta.
  R// El área va disminuyendo la cuarta parte con respecto a la anterior area.
- ¿Hay alguna sucesión que te pueda ayudar a resolver el problema analíticamente?
  Si
- Si la respuesta es afirmativa, escríbela.
  R// el radio de cada circulo concéntrico es la mitad del anterior.
- ¿Qué otras sucesiones se pueden formar en este problema?
  R// progresión Geométrica

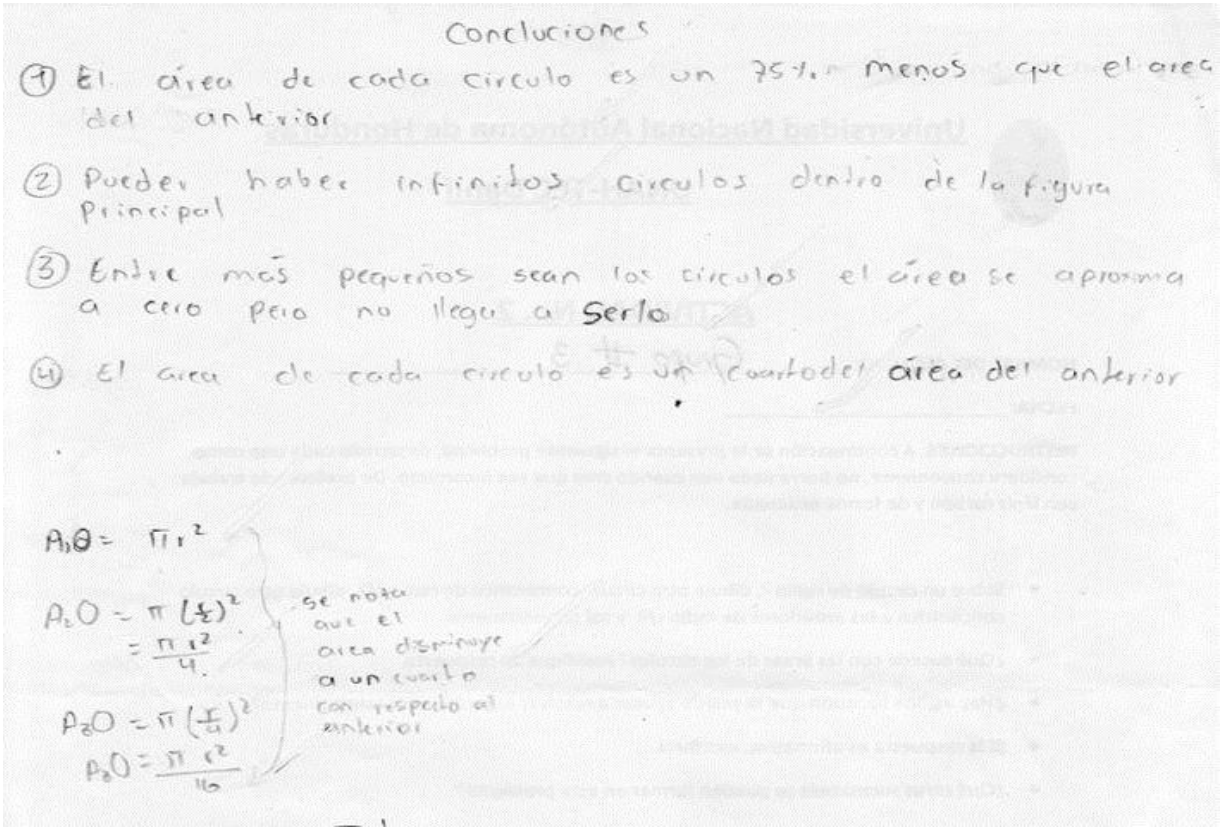


* $A = \pi r^2$
* $A = \pi (r/2)^2 = \pi r^2/4$
* $A = \pi (r/4)^2 = \pi r^2/16$
* $A = \pi (r/8)^2 = \pi r^2/64$
* $A = \pi (r/16)^2 = \pi r^2/256$

$$r = \frac{\pi r^2}{4} \div \frac{\pi r^2}{1} = 1/4$$

$$S = \frac{\pi r^2}{1 - 1/4} = \frac{4\pi r^2}{3}$$

ACTIVIDAD 2 – GRUPO 4



Conclusiones

1. El área de cada circulo es un 75% menos que el area del anterior
2. Pueden haber infinitos circulos dentro de la figura Principal
3. Entre más pequeños sean los circulos el área se aproxima a cero pero no llega a serlo
4. El area de cada circulo es un cuarto del área del anterior

$A_1\Theta = \pi r^2$

$A_2\Theta = \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{4}$

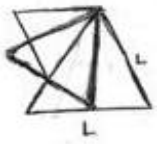
$A_3\Theta = \pi \left(\frac{r}{4}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{16}$

se nota que el area disminuye a un cuarto con respecto al anterior

ACTIVIDAD 3 – GRUPO 1

- Sobre un hexágono regular, se traza otro hexágono uniendo los puntos medios del primero, enseguida, se traza otro hexágono uniendo los puntos medios del segundo hexágono, y así sucesivamente.

- ¿Qué sucede con las áreas de los hexágonos?
Las áreas de los hexagonos se van reduciendo hasta casi llegar a cero pero nunca llegando.
- Justifique su respuesta.
Porque nunca vamos a tener un hexagono de lado 0.



$A_1\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2$

$A\Delta = \frac{B \cdot h}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}L^2 = \frac{L \cdot h}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}L^2(2) = L \cdot h$

$\frac{\sqrt{3}}{2}L^2 = L \cdot h$

$\frac{\sqrt{3}}{2}L^2 = h$

$\frac{\sqrt{3}}{2}L = h$

$\frac{6\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} = h$

$\frac{3}{4} = h$

$A_2\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2$

$A_2\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}L\right)^2$

$A_2\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}L^2\right)$

$A_2\Delta = \frac{3\sqrt{3}}{16}L^2$

$A_2\Delta = \frac{B \cdot h}{2}$

$\frac{B\sqrt{3}}{16}L^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}L \cdot h$

$2\left(\frac{3\sqrt{3}L^2}{16}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}L \cdot h$

$\frac{3\sqrt{3}}{8}L^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}L \cdot h$

$\frac{\frac{3\sqrt{3}}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}L = h$

$A_3 A = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}L\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{9}{16}L^2\right) = \frac{9\sqrt{3}}{64} L^2$

$A_1 H = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 (6) = \frac{6\sqrt{3}}{4} L^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} L^2$

$A_2 H = \frac{3\sqrt{3}}{16} L^2 (6) = \frac{18\sqrt{3}}{16} L^2 = \frac{9\sqrt{3}}{8} L^2$

$A_3 H = \frac{9\sqrt{3}}{64} L^2 (6) = \frac{54\sqrt{3}}{64} L^2 = \frac{27\sqrt{3}}{32} L^2$

$\frac{3\sqrt{3}}{2} L^2, \frac{9\sqrt{3}}{8} L^2, \frac{27\sqrt{3}}{32} L^2$

$R = \frac{9\sqrt{3}}{8} L^2 \div \frac{3\sqrt{3}}{2} L^2 \quad \frac{\frac{9\sqrt{3}}{8} L^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2} L^2} = \frac{18\sqrt{3}}{24\sqrt{3}} = \frac{3}{4}$

$R = \frac{27\sqrt{3}}{32} L^2 \div \frac{9\sqrt{3}}{8} L^2 = \frac{\frac{27\sqrt{3}L^2}{32}}{\frac{9\sqrt{3}}{8} L^2} = \frac{216\sqrt{3}}{288\sqrt{3}} = \frac{408}{144} = \frac{54}{72} = \frac{27}{36} = \frac{9}{12}$

$\frac{3}{4}$

$SA = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} L^2}{1-r} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} L^2}{1-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} L^2}{\frac{1}{4}} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} L^2$

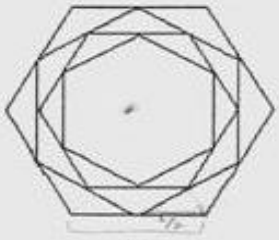
ACTIVIDAD 3 – GRUPO 2

- Sobre un hexágono regular, se traza otro hexágono uniendo los puntos medios del primero, enseguida, se traza otro hexágono uniendo los puntos medios del segundo hexágono, y así sucesivamente.

1) • ¿Qué sucede con las áreas de los hexágonos?

- Justifique su respuesta.

1) Van disminuyendo, el segundo representa un 75% del primero, es decir disminuye un 25% y así sucesivamente.



$A_1 \hexagon = \frac{3\sqrt{3}}{2} L^2$

$A_2 \hexagon = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)^2 (6)$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{18L^2}{4}\right)$

$\frac{L/2}{x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\frac{L}{2}\sqrt{3} = 2x$

$x = \frac{L\sqrt{3}}{4} \times 2$

$L' = \boxed{\frac{L\sqrt{3}}{2}}$

$A_3 \hexagon = \frac{9\sqrt{3}}{8} L^2$

$r = \frac{9\sqrt{3}}{8} L^2 \div \frac{3\sqrt{3}}{2} L^2$

$r = \boxed{\frac{3}{4}}$

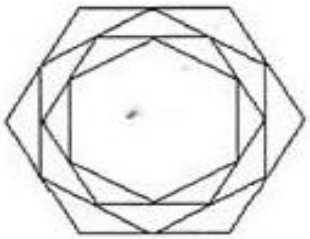
$S = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} L^2}{1 - 3/4}$

$S = 6\sqrt{3} L^2$

ACTIVIDAD 3 – GRUPO 3

- Sobre un hexágono regular, se traza otro hexágono uniendo los puntos medios del primero, enseguida, se traza otro hexágono uniendo los puntos medios del segundo hexágono, y así sucesivamente.

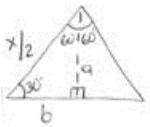
- ¿Qué sucede con las áreas de los hexágonos?
  Van disminuyendo 3/4 con respecto al anterior.
- Justifique su respuesta.
  El area de cada hexagono se va acercando a cero, pero nunca sera cero.



① $A = \frac{1}{2} n L a$ $\quad a = \frac{\sqrt{3}}{2} x$

$A = \frac{1}{2}(6x)(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

$\boxed{A = \frac{3\sqrt{3}x^2}{2}}$



Semejanza de triangulos

$\frac{x/2}{b} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2b = \frac{\sqrt{3}x}{2}$

$\Rightarrow \boxed{b = \frac{\sqrt{3}x}{4}}$

② $A = \frac{1}{2} n L a$

$A = \frac{1}{2}(6)(\frac{\sqrt{3}}{2}x)(\frac{3}{4}x)$

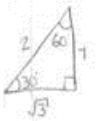
$\boxed{A = \frac{9\sqrt{3}x^2}{8}}$

$a = \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}x) = \frac{3}{4}x$

Semejanza de triangulos

$\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}x}{b} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2b = \frac{3x}{4}$

$\boxed{b = \frac{3x}{8}}$



③ $A = \frac{1}{2} n L a$

$A = \frac{1}{2}(6)(\frac{3}{4}x)(\frac{3\sqrt{3}x}{8})$

$\boxed{A = \frac{27\sqrt{3}x^2}{32}}$

$a = \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{3}{4}x) = \frac{3\sqrt{3}x}{8}$

④ $A = \frac{1}{2} n L a$

$A = \frac{1}{2}(6)(\frac{3\sqrt{3}x}{8})(\frac{9x}{16})$

$\boxed{A = \frac{81\sqrt{3}x^2}{128}}$

$a = \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{3\sqrt{3}x}{8}) = \frac{9x}{16}$

$r = \frac{\frac{9\sqrt{3}x^2}{8}}{\frac{3\sqrt{3}x^2}{2}} = \frac{18\sqrt{3}x^2}{24\sqrt{3}x^2} = \frac{3}{4}$

⑤ $A = \frac{1}{2} n L a$

$A = \frac{1}{2}(6)(\frac{9}{16}x)(\frac{9\sqrt{3}x}{32})$

$\boxed{A = \frac{243\sqrt{3}x^2}{512}}$

$a = \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{9}{16}x) = \frac{9\sqrt{3}x}{32}$

$S = \frac{a}{1-r}$

$S = \frac{\frac{3\sqrt{3}x^2}{2}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}x^2}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{12\sqrt{3}x^2}{2} = \boxed{6\sqrt{3}x^2}$

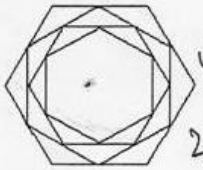
ACTIVIDAD 3 – GRUPO 4

- Sobre un hexágono regular, se traza otro hexágono uniendo los puntos medios del primero, enseguida, se traza otro hexágono uniendo los puntos medios del segundo hexágono, y así sucesivamente.
- ¿Qué sucede con las áreas de los hexágonos?
- Justifique su respuesta. Procedimiento

1) Encontramos el A del primer Hexag.

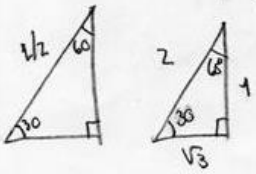
$A = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4} L^2\right)$

$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} L^2 \rightarrow H_1$.



2) Encontramos el lado del segundo Hexagono:

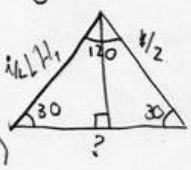
☆ utilizamos Semejanza



$L:2 :: BW:\sqrt{3}$

$BW = \frac{\frac{\sqrt{3}L}{2}}{2}$

$BW = \frac{\sqrt{3}L}{4}$



$LH_2 = 2(BW)$

$LH_2 = \frac{\sqrt{3}L}{2}$

3) Encontramos el A del H_2:

$A_2 = \frac{9\sqrt{3}^2}{8}$

☆ Encontramos la razón:

$r = \frac{\frac{9\sqrt{3}L^2}{8}}{\frac{3\sqrt{3}L^2}{2}} = \frac{3}{4}$

☆ Conclusiones:

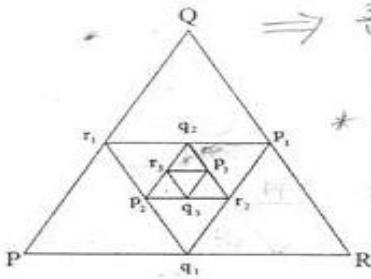
1) Las Áreas disminuyen 3/4 (0.25) al siguiente Hexagono.

2) Las Áreas se acercaran a cero a medida que encontremos mas áreas para ellos llegaran a ser 0.

3) Podemos encontrar infinitas Áreas y lados de los Hexagonos.

ACTIVIDAD 4 – GRUPO 1

- PQR es un triangulo equilátero. Se divide cada lado del triangulo en dos partes iguales y se etiquetan los puntos medios como p1, q1 y r1. considerando el triangulo p1 q1 r1, se vuelve a dividir cada lado y se etiquetan los puntos medios como p2, q2 y r2. El proceso se continúa de la misma manera.
- ¿Cual será el área de la figura final? Explique su respuesta.
- Si sumamos las áreas de los triángulos Pq1r1, Rp1q1 y Qp1r1 obtenemos ¾. Si ahora le sumamos las áreas de los triángulos p2q2r1, p1q2r2 y p2q1r2, obtenemos ¾ + 3/16. Si seguimos realizando estas sumas, ¿obtendremos un valor? Justifique su respuesta.
- Si respondiste afirmativamente a la pregunta del inciso anterior ¿Cuál es ese valor? Justifique su respuesta.



$\Rightarrow \frac{3}{4}, \frac{3}{4}+\frac{3}{16}, \frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}, \frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}+\frac{3}{256}$

$* \frac{\frac{1}{16}}{4} (=\frac{1}{64}(3)=\frac{3}{64}$

$* \frac{\frac{1}{64}}{4} = \frac{1}{256}(3) = \frac{3}{256}$

$\Rightarrow \frac{3}{4}, \frac{15}{16}, \frac{63}{64}, \frac{55}{256}$

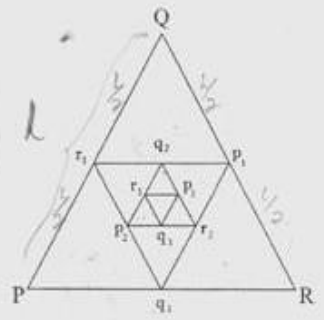
$r = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{4}} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$

SA: $\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = 1$

- El area de la Figura Final va ser muy cerca de 0 pero nunca cerlo.
- Vamos a obtener un valor muy cerca de 0. El valor tiende a 1 o se que se va a acercar a el pero sin cerlo.

ACTIVIDAD 4 – GRUPO 2

- PQR es un triangulo equilátero. Se divide cada lado del triangulo en dos partes iguales y se etiquetan los puntos medios como p1, q1 y r1. considerando el triangulo p1 q1 r1, se vuelve a dividir cada lado y se etiquetan los puntos medios como p2, q2 y r2. El proceso se continúa de la misma manera.
- ¿Cual será el área de la figura final? Explique su respuesta.
- Si sumamos las áreas de los triángulos Pq1r1, Rp1q1 y Qp1r1 obtenemos ¾. Si ahora le sumamos las áreas de los triángulos p2q2r1, p1q2r2 y p2q1r2, obtenemos ¾ + 3/16. Si seguimos realizando estas sumas, ¿obtendremos un valor? Justifique su respuesta.
- Si respondiste afirmativamente a la pregunta del inciso anterior ¿Cuál es ese valor? Justifique su respuesta.



1) $A_1\Delta = \frac{\sqrt{3}l^2}{4}$ $A_2\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2$ $A_3\Delta = \frac{\sqrt{3}l^2}{64}$

$= \frac{\sqrt{3}l^2}{16}$

El área de la figura final tendrá a 0 pero nunca llegará a serlo.

$r = \frac{\sqrt{3}l^2}{16} \div \frac{\sqrt{3}l^2}{4} = \frac{1}{4}$

$S = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}l^2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4\sqrt{3}l^2}{12}$

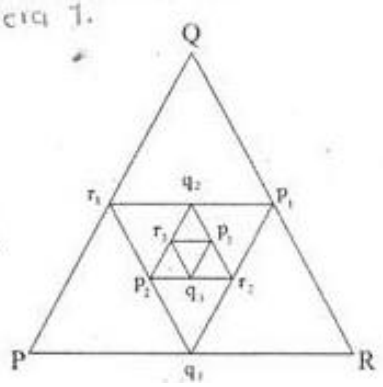
$S = \frac{\sqrt{3}l^2}{3}$

2) Si obtendremos un valor
Iría aumentando pero nunca igualaría el valor del triangulo PQR

ACTIVIDAD 4 – GRUPO 3

INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta el siguiente problema, desarrolle cada uno como considere conveniente, no borre nada aun cuando crea que sea incorrecto. De preferencia trabaje con lápiz carbón y de forma ordenada.

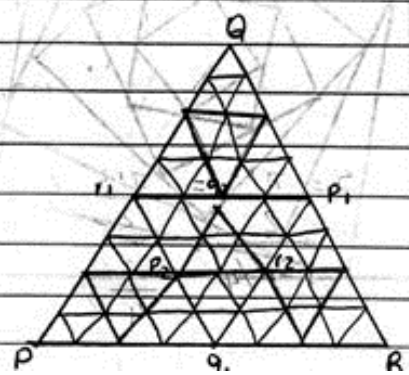
- PQR es un triangulo equilátero. Se divide cada lado del triangulo en dos partes iguales y se etiquetan los puntos medios como p1, q1 y r1. considerando el triangulo p1 q1 r1, se vuelve a dividir cada lado y se etiquetan los puntos medios como p2, q2 y r2. El proceso se continúa de la misma manera.

- ¿Cual será el área de la figura final? Explique su respuesta.
  Sera muy cerca de cero, pero nunca sera cero.
- Si sumamos las áreas de los triángulos Pq1r1, Rp1q1 y Qp1r1 obtenemos ¾. Si ahora le sumamos las áreas de los triángulos p2q2r1, p1q2r2 y p2q1r2, obtenemos ¾ + 3/16. Si seguimos realizando estas sumas, ¿obtendremos un valor? Justifique su respuesta.
  Si, porque podemos dividir los triangulos infinitamente.
- Si respondiste afirmativamente a la pregunta del inciso anterior ¿Cuál es ese valor? Justifique su respuesta.
  Al sumar las areas el valor se va acercando mu ho a 1, pero nunca sera 1.
- 

ACTIVIDAD 4 – GRUPO 4

) El area se aproxima a cero pero nunca llega a serlo, se pueden hacer infinitos triangulos.

)



$\frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \frac{3}{256} + \frac{3}{1024}$

0.984375

0.99609375

0.999043100

Se acerca a 1 pero nunca llega a 1

ACTIVIDAD 5 – GRUPO 1

- Se construye un semicírculo con el segmento MN como diámetro. Luego, se divide MN en dos partes iguales MO y NO, y se construyen dos semicírculos como lo indica la figura. Se continua dividiendo y construyendo semicírculos.
- ¿Qué sucede con la longitud de la línea ondulada a medida que se disminuye la longitud de cada sub-segmento?
- Explique su respuesta.
- Si suma las áreas determinadas por los semicírculos a medida que se disminuye la longitud de cada sub-segmento ¿obtendrás un valor? Explique su respuesta.
- Si respondiste afirmativamente a la pregunta del inciso anterior ¿Cuál es el valor? Justifique su respuesta.

$S = \frac{\alpha}{360} \pi r$

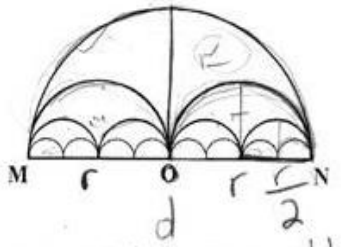
$S = \frac{1}{2} \pi r$ $\quad \overline{ON} = r$

$S = \frac{1}{2} \pi \frac{r}{2}$

$S = \frac{\pi r}{4}$

$S = \frac{1}{2} \pi \frac{r}{4}$

$S = \frac{\pi r}{8}$



• la longitud de la linea ondulada va disminuyendo en un 50%

$A_{10} = \frac{\pi r^2}{2}$ $\quad \frac{\pi r^2}{2}$ $\quad \frac{\pi r^2}{2}$

$A_{20} = \frac{\pi (\frac{1}{2}r)^2}{2} = \frac{\pi (\frac{1}{4}r^2)}{2} = \frac{\frac{\pi r^2}{4}}{\frac{2}{1}} = \frac{\pi r}{8}$ $\quad \frac{\pi r^2}{8}(2) = \frac{\pi r^2}{4}$

$A_{30} = \frac{\pi (\frac{1}{4}r)^2}{2} = \frac{\pi (\frac{1}{16}r^2)}{2} = \frac{\frac{\pi r^2}{16}}{2} = \frac{\pi}{32}$ $\quad \frac{\pi r^2}{32}(4) = \frac{\pi r^2}{8}$

$A_{40} = \frac{\pi (\frac{1}{8})^2}{2} = \frac{\pi (\frac{1}{64}r^2)}{2} = \frac{\frac{\pi r^2}{64}}{2} = \frac{\pi r^2}{128}$ $\quad \frac{\pi r^2}{128}(8) = \frac{\pi r^2}{16}$

$r = \frac{\pi r^2}{4} \div \frac{\pi r^2}{2}$ $\quad \frac{\pi r^2}{2}, \frac{\pi r^2}{4}, \frac{\pi r^2}{8},$

$r = \frac{\frac{\pi r^2}{4}}{\frac{\pi r^2}{2}}$ $\quad \frac{2\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{1}{2}$

$SA = \frac{\frac{\pi r^2}{2}}{1 - 1/2} = \frac{\frac{\pi r^2}{2}}{\frac{1}{2}} = \pi r^2$

R/ Si se obtiene un valor que es $2\pi r^2$, destacando que es el valor mas proximo a el nunca va a ser $2\pi r^2$ aunque va llegar muy cerca de el.

ACTIVIDAD 5 – GRUPO 2

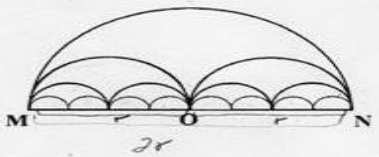
- Se construye un semicírculo con el segmento MN como diámetro. Luego, se divide MN en dos partes iguales MO y NO, y se construyen dos semicírculos como lo indica la figura. Se continua dividiendo y construyendo semicírculos.

1) • ¿Qué sucede con la longitud de la línea ondulada a medida que se disminuye la longitud de cada sub-segmento?

- Explique su respuesta.

2) • Si suma las áreas determinadas por los semicírculos a medida que se disminuye la longitud de cada sub-segmento ¿obtendrás un valor? Explique su respuesta.

- Si respondiste afirmativamente a la pregunta del inciso anterior ¿Cuál es el valor? Justifique su respuesta.



1) Disminuye la longitud de la línea ondulada disminuye proporcionalmente a como va disminuyendo cada segmento, debido a que la longitud del radio disminuye.

$A_1 \cap = \frac{\pi r^2}{2}$

$A_2 \cap = \frac{\pi(\frac{r}{2})^2}{2}$

$A_3 \cap = \frac{\pi r^2}{8}$

$r = \frac{\pi r^2}{8} \div \frac{\pi r^2}{2}$

$r = \frac{1}{4}$

$S = \frac{\pi r^2}{2}$

$1 - \frac{1}{4}$

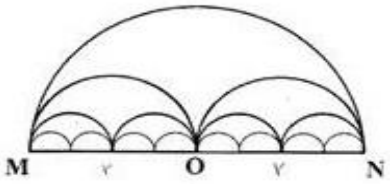
$S = \frac{2\pi r^2}{3}$

2) Si, obtendremos un valor igual al área de del semicírculo MN, es decir, si sumamos las áreas de los semicírculos MO, NO nos dará el área del MN. y así sucesivamente

ACTIVIDAD 5 – GRUPO 3

- Se construye un semicírculo con el segmento MN como diámetro. Luego, se divide MN en dos partes iguales MO y NO, y se construyen dos semicírculos como lo indica la figura. Se continua dividiendo y construyendo semicírculos.

- ¿Qué sucede con la longitud de la línea ondulada a medida que se disminuye la longitud de cada sub-segmento?
  R/ su perímetro va disminuyendo
- Explique su respuesta.
  R/ cada semicirculo se divide en dos semicirculos mas pequeños
- Si suma las áreas determinadas por los semicírculos a medida que se disminuye la longitud de cada sub-segmento ¿obtendrás un valor? Explique su respuesta.
  Si, por que se pueden hacer infinitos semicirculos
- Si respondiste afirmativamente a la pregunta del inciso anterior ¿Cuál es el valor? Justifique su respuesta.
  R/ es un número infinitamente pequeña, que se va acercar a cero, pero nunca llegara hacer cero.



S

① $A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi r^2}{2}$

② $A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi (r/2)^2}{2} = \boxed{\pi r^2/8}$

③ $A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi (r/4)^2}{2} = \boxed{\pi r^2/32}$

④ $A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi (r/8)^2}{2} = \boxed{\pi r^2/128}$

$$r = \frac{\frac{\pi r^2}{8}}{\frac{\pi r^2}{2}} = \frac{2\pi r^2}{8\pi r^2} = \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\pi r^2/2}{1-1/4} = \frac{\pi r^2/2}{3/4} = \frac{4\pi r^2}{6} = \boxed{\frac{2\pi r^2}{3}}$$

ACTIVIDAD 5 – GRUPO 4

- Se construye un semicírculo con el segmento MN como diámetro. Luego, se divide MN en dos partes iguales MO y NO, y se construyen dos semicírculos como lo indica la figura. Se continua dividiendo y construyendo semicírculos.
- ¿Qué sucede con la longitud de la línea ondulada a medida que se disminuye la longitud de cada sub-segmento?
- Explique su respuesta.
- Si suma las áreas determinadas por los semicírculos a medida que se disminuye la longitud de cada sub-segmento ¿obtendrás un valor? Explique su respuesta.
- Si respondiste afirmativamente a la pregunta del inciso anterior ¿Cuál es el valor? Justifique su respuesta.

$A_{\Delta} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \frac{D^2}{4}}{2} = \frac{\pi D^2}{8}$

$A_{\Delta_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi D^2}{8}\right) = \frac{\pi D^2}{16}$

$r = \frac{\frac{\pi D^2}{16}}{\frac{\pi D^2}{8}} = \frac{8\pi D^2}{16\pi D^2} = \frac{1}{2}$

D/8 D/2 = r D D/2 D/4 D/4 D/4 D/4

$S = \frac{\frac{\pi D^2}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\pi D^2}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi D^2}{8} = \frac{\pi D^2}{4}$

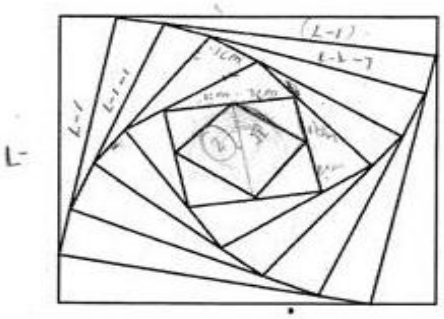
Conclusiones

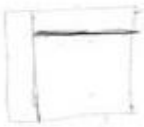
1) La longitud del arco de los semicírculos menores va disminuyendo con respecto al diámetro que va disminuyendo también. Pero visto en grados, la medida nunca va a cambiar, ya que la medida de un semicírculo es 180° y los menores también serán igual.

2) A medida se va disminuyendo el semicírculo, se divide en dos semicírculos, los cuales al hacer la sumatoria de esos semicírculos dará igual al área del segmento mayor, y así sucesivamente.

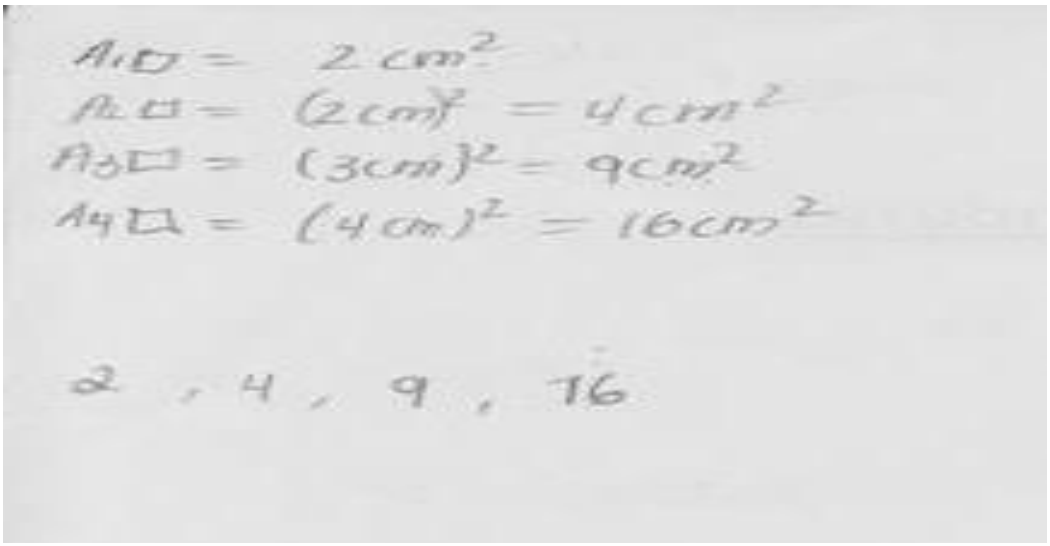
ACTIVIDAD 6 – GRUPO 1

- Partiendo de un cuadrado grande, se traza otro al interior desplazando sus vértices como se observa en la figura: cada vértice esta sobre el lado del primer cuadrado a una distancia igual a 1 cm de su vértice. Se traza otro cuadrado siguiendo el mismo proceso y después otro mas y así sucesivamente. ¿hasta dónde se puede realizar esa construcción?





- Esta construcción se puede realizar hasta que el penultimo cuadrado tenga base 2 porque es el ultimo numero que se puede dividir entre dos y es 1.

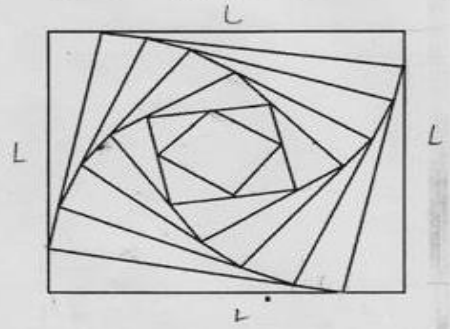


ACTIVIDAD 6 – GRUPO 2

- **Partiendo de un cuadrado grande, se traza otro al interior desplazando sus vértices como se observa en la figura: cada vértice esta sobre el lado del primer cuadrado a una distancia igual a 1 cm de su vértice. Se traza otro cuadrado siguiendo el mismo proceso y después otro mas y así sucesivamente. ¿hasta dónde se puede realizar esa construcción?**

Area del ultimo cuadrado que se puede formar $(\sqrt{2})^2 = 2$

- La Construcción se podría construir hasta llegar a un cuadrado de Lados $\sqrt{2}$ Es decir que su área sería de 2.

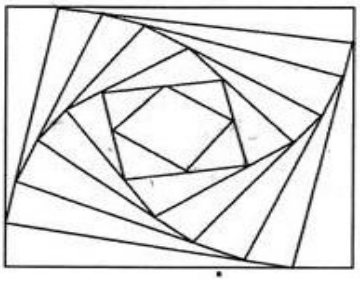


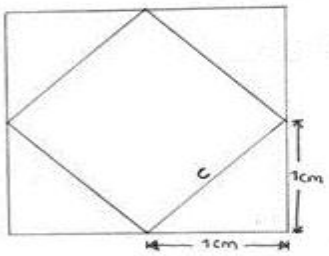
$A_{\square} = L^2$

ACTIVIDAD 6 – GRUPO 3

Partiendo de un cuadrado grande, se traza otro al interior desplazando sus vértices como se observa en la figura: cada vértice esta sobre el lado del primer cuadrado a una distancia igual a 1 cm de su vértice. Se traza otro cuadrado siguiendo el mismo proceso y después otro mas y así sucesivamente. ¿hasta dónde se puede realizar esa construcción?

R/ Se puede realizar hasta que el cuadrado tenga una longitud de $\sqrt{2}$cm (1.41cm) en cada uno de sus lados.



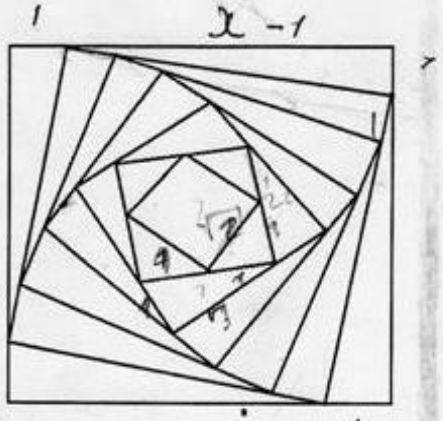


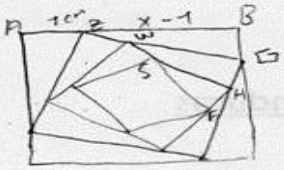
$c = \sqrt{(1cm)^2 + (1cm)^2}$

$\boxed{c = \sqrt{2}\,cm}$

ACTIVIDAD 6 – GRUPO 4

- Partiendo de un cuadrado grande, se traza otro al interior desplazando sus vértices como se observa en la figura: cada vértice esta sobre el lado del primer cuadrado a una distancia igual a 1 cm de su vértice. Se traza otro cuadrado siguiendo el mismo proceso y después otro mas y así sucesivamente. ¿hasta dónde se puede realizar esa construcción?





$\overline{ZG} = \sqrt{(x-1)^2 + 1^2}$

$\overline{ZG} = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

$\overline{SF} = \sqrt{(WH-1)^2 + 1^2}$

$\overline{WH} = \sqrt{(\overline{ZG}-1)^2 + 1^2}$

$\overline{WH} = \sqrt{x^2 - 2x + 4 - 2\sqrt{x^2-2x+2}}$

$\overline{SF} = \sqrt{x^2 - 2x + 6 - 2\sqrt{x^2-2x+2} - 2\sqrt{x^2-2x+4-2\sqrt{x^2-2x+2}}}$

- Si llegamos a un cuadrado de lado dos entonces podríamos dibujar un cuadrado más que tendría $\sqrt{2}$ de lado, después el procedimiento no continuaría.
- según lo descubierto tendríamos que el límite de cuadros estaría limitado por el cuadrado de lado $\sqrt{2}$
- También podemos decir que el número de cuadrados estaría determinado por la longitud del lado del primer cuadrado.

ACTIVIDAD 7- GRUPO 1

-Si es posible continuar con la construccion pues en ambos casos el denominador se va haciendo mas grande y esto afecta toda la fraccion pues la va haciendo mas pequeña, y más pequeña pero nunca se llega a Cero

- La longitud seria:

Espiral 1 :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=1.96875$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}=1.9922$$

Y asi le agregamos mas valores y vemos que se acerca a 2 y como en un punto le seguiremos agregando valores muy muy pequeños la suma sera 2

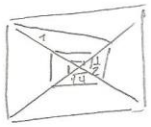
Espiral 2:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}=2.82$$

Si agregamos mas valores la sucesion crece y no pudimos determinar un valor para su suma

ACTIVIDAD 7-GRUPO 1

a)



la figura tiende hacia cero, se acerca a cero pero si puede continuarse esta construcion pues se acerca a cero pero nunca podra ser cero. si sumamos los valores de la espiral tendriamos:

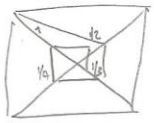
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1.875$$

Vemos que el denominador aumenta con potencias de dos, podriamos decir entonces que es 2^x y para mas valores de x tendriamos:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}=1.9609$$

$2^4 \quad 2^5 \quad 2^6 \quad 2^7 \quad 2^8$

esto quiere decir que la suma se acerca a dos

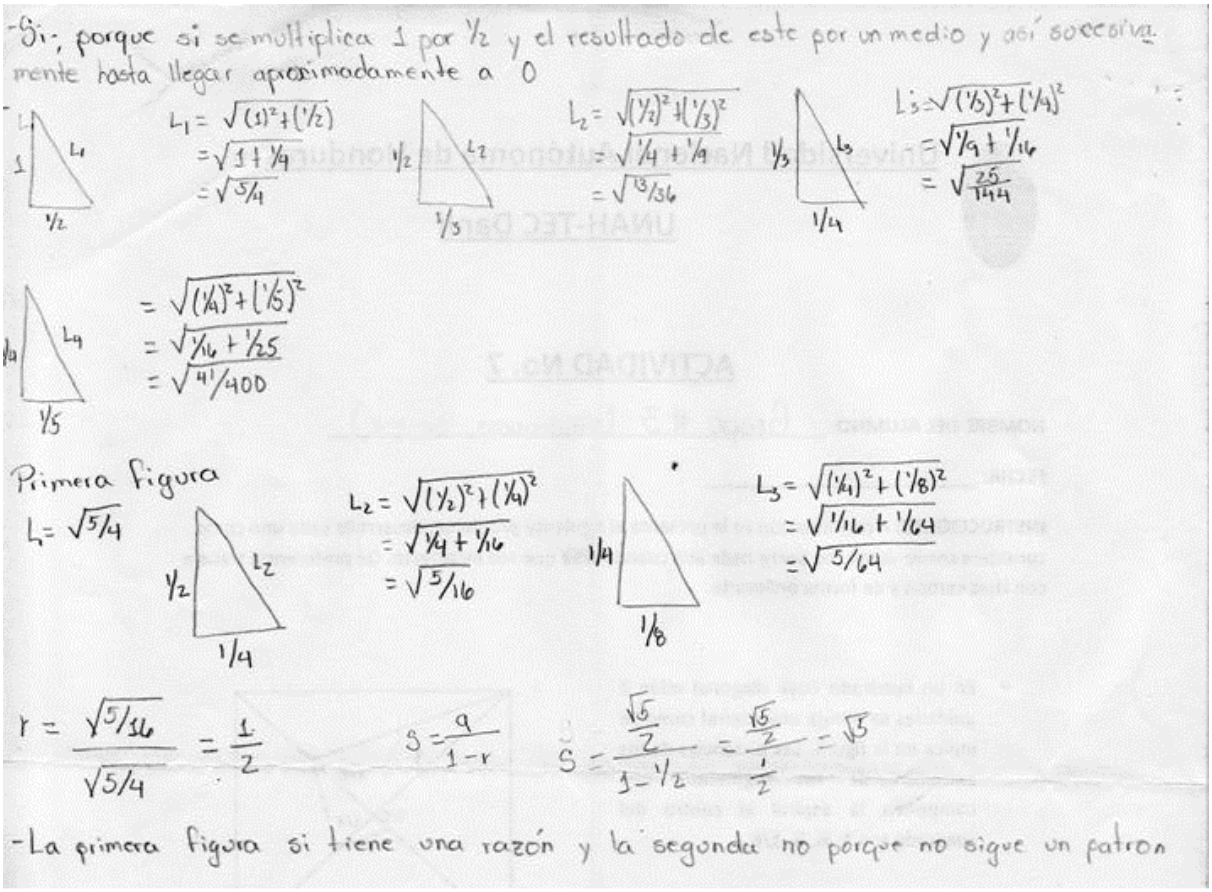


En la otra espiral la construcion se puede continuar por la misma razon que la anterior pero esta vez la suma seria:

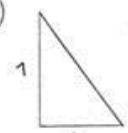
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=2.28$$ toma valores de $\frac{1}{x}$

pero al agregarle mas valores. la suma se hace mas grande sin terminar o acercarse hacia un numero fijo

ACTIVIDAD 7 – GRUPO 3



ACTIVIDAD 7-GRUPO 4

① 

$C=\sqrt{(1)^2+(1/2)^2}$

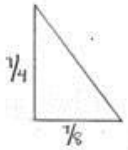
$C=\sqrt{5/4}$

$C=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$C=\sqrt{(1/2)^2+(1/4)^2}$

$C=\sqrt{5/16}$

$C=\frac{\sqrt{5}}{4}$

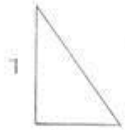


$C=\sqrt{(1/4)^2+(1/8)^2}$

$C=\sqrt{5/64}$

$C=\frac{\sqrt{5}}{8}$

$r=\frac{\frac{\sqrt{5}}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}=\frac{1}{2}$

② 

$C=\sqrt{(1)^2+(1/2)^2}$

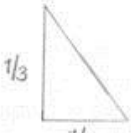
$C=\sqrt{5/4}$

$C=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$C=\sqrt{(1/2)^2+(1/3)^2}$

$C=\sqrt{13/36}$

$C=\frac{\sqrt{13}}{6}$



$C=\sqrt{(1/3)^2+(1/4)^2}$

$C=\sqrt{25/144}$

$C=\frac{5}{12}$

$r=\frac{\frac{\sqrt{13}}{6}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{2\sqrt{13}}{6\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{13}}{3\sqrt{5}}$

- Si se puede continuar con la construcción de los espirales. Por que se puede seguir formando los espirales infinitamente.
- La longitud de cada uno de los espirales sera un valor muy, pero muy pequeño, que se acercara a "cero", pero nunca sera "cero".

→ • Tambien observamos que en el primer cuadro los espirales tienen una razon de 1/2, en su longitud con respecto al anterior.
Y en el segundo cuadro los espirales no tienen una razón.

ACTIVIDAD 8 – GRUPO 1

INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta el siguiente problema, desarrolle cada uno como considere conveniente, no borre nada aun cuando crea que sea incorrecto. De preferencia trabaje con lápiz carbón y de forma ordenada.

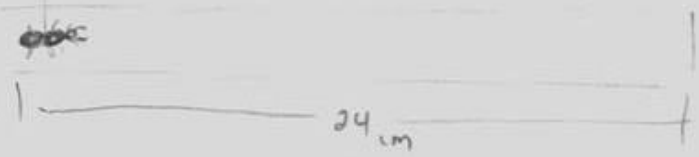
- Una hormiga camina sobre una tira elástica. Inicia en un extremo y recorre 6 cm por minuto. Al inicio, la tira elástica tiene 24 cm. Después de cada minuto, el elástico se alarga 12 cm. Suponga que la tira se puede alargar indefinidamente de manera uniforme.
- ¿la hormiga llegara al otro extremo de la tira elástica? Explique su respuesta.
- Si responde afirmativamente, ¿en cuánto tiempo llegará la hormiga al otro extremo?

$V = \frac{d}{t}$ $d = 6(1) = 6$

$tV = d$

$t = \frac{d}{v}$

$v = 6\ cm/min$ $t = \frac{24}{6} = 4\ min$



La hormiga no podria llegar al final ya que tardaria 4 minutos en llegar al otro lado y el elastico se alarga 12cm cada minuto. (el elastico se alarga 12cm)

ACTIVIDAD 8 – GRUPO 2

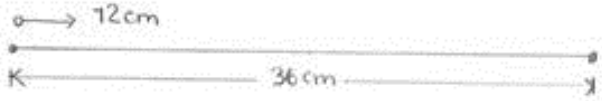
INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta el siguiente problema, desarrolle cada uno como considere conveniente, no borre nada aun cuando crea que sea incorrecto. De preferencia trabaje con lápiz carbón y de forma ordenada.

- Una hormiga camina sobre una tira elástica. Inicia en un extremo y recorre 6 cm por minuto. Al inicio, la tira elástica tiene 24 cm. Después de cada minuto, el elástico se alarga 12 cm. Suponga que la tira se puede alargar indefinidamente de manera uniforme.
- ¿la hormiga llegara al otro extremo de la tira elástica? Explique su respuesta.
- Si responde afirmativamente, ¿en cuánto tiempo llegará la hormiga al otro extremo?

No, porque entre mas minutos recorra la hormiga, mas aumenta la la longitud de la tira elastica, ya que por cada minuto que avanza la hormiga el elastico se alargo 12 cm.

ACTIVIDAD 8 – GRUPO 3

* La hormiga en 1min recorre 6cm



* La hormiga en 2 min recorre 12cm.

* La hormiga en 3 min recorre 78cm.

R// La hormiga nunca llegaría al otro extremo de la tira elastica porque la tira aumenta el doble de lo que la hormiga camina.

ACTIVIDAD 8 – GRUPO 4

INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta el siguiente problema, desarrolle cada uno como considere conveniente, no borre nada aun cuando crea que sea incorrecto. De preferencia trabaje con lápiz carbón y de forma ordenada.

- Una hormiga camina sobre una tira elástica. Inicia en un extremo y recorre 6 cm por minuto. Al inicio, la tira elástica tiene 24 cm. Después de cada minuto, el elástico se alarga 12 cm. Suponga que la tira se puede alargar indefinidamente de manera uniforme.
- ¿la hormiga llegara al otro extremo de la tira elástica? Explique su respuesta.
- Si responde afirmativamente, ¿en cuánto tiempo llegará la hormiga al otro extremo?

$V_{de}H = 6\frac{cm}{min}$

$V_{del}E = 12\frac{cm}{min}$

$d_oE = 24cm$

$r = \frac{6\frac{cm}{min}}{12\frac{cm}{min}} = \frac{1}{2}$

- la razón del avance de la hormiga con respecto al crecimiento del elástico es de 1/2. la hormiga recorre 1 cm y el elástico crece 2 cm. osea que el elástico se estiende el doble de lo que camina la hormiga

- como el elástico crece indefinidamente y lo hace a mayor velocidad que el avance de la Hormiga entonces esta nunca llegara al final

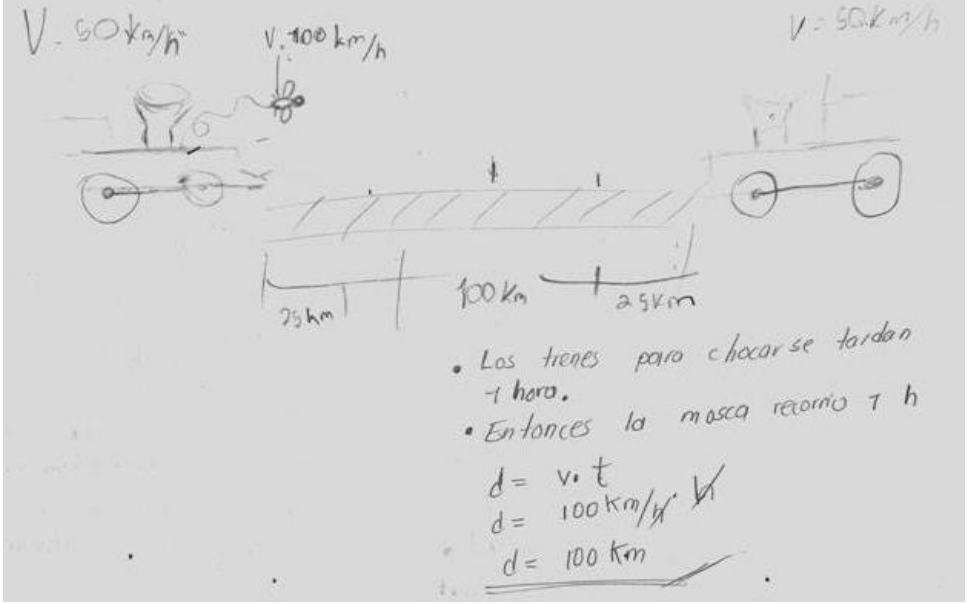
- la distancia del elástico depende del tiempo.
- la distancia que recorre la hormiga depende del tiempo

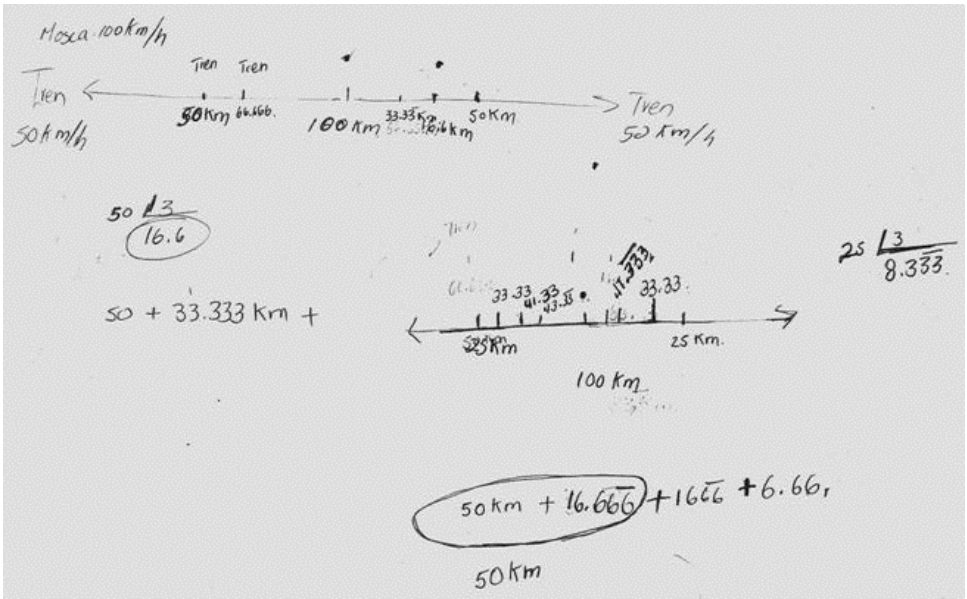
- Por cada minuto que pasa el final del elastico se aleja a 6cm más ya que en un inicio estaa24cm el final. pero si recorre 6cm en un minuto y el elástico crece 12cm la diferencia ahora es de 30 cm hasta el final. y así mismo en dos minutos recorre 12cm pero el elastico crece a 48cm y ahora la diferencia es de 36cm hasta el final

ACTIVIDAD 9 – GRUPO 1

INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta el siguiente problema, desarrolle cada uno como considere conveniente, no borre nada aun cuando crea que sea incorrecto. De preferencia trabaje con lápiz carbón y de forma ordenada.

- Dos trenes avanzan uno hacia el otro sobre una vía recta. Al inicio, se encuentran alejados uno del otro una distancia de 100 km. Los trenes van a una velocidad de 50 km/h. Una mosca que se desplaza a una velocidad de 100 km/h parte de uno de los trenes hacia el otro, inmediatamente regresa hacia el primer tren y parte hacia el otro, y así sucesivamente. ¿Qué distancia habrá recorrido la mosca entre el instante inicial y el momento de ser aplastada por el choque de los dos trenes?





ACTIVIDAD 9 – GRUPO 2

INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta el siguiente problema, desarrolle cada uno como considere conveniente, no borre nada aun cuando crea que sea incorrecto. De preferencia trabaje con lápiz carbón y de forma ordenada.

- Dos trenes avanzan uno hacia el otro sobre una vía recta. Al inicio, se encuentran alejados uno del otro una distancia de 100 km. Los trenes van a una velocidad de 50 km/h. Una mosca que se desplaza a una velocidad de 100 km/h parte de uno de los trenes hacia el otro, inmediatamente regresa hacia el primer tren y parte hacia el otro, y así sucesivamente. ¿Qué distancia habrá recorrido la mosca entre el instante inicial y el momento de ser aplastada por el choque de los dos trenes?

La mosca recorre $\frac{2}{3}$ de camino cuando se encuentra con el tren porque la mosca recorre el doble de lo que recorren los trenes. Es decir, cuando el tren recorre $\frac{1}{3}$ la mosca recorre $\frac{2}{3}$

* La mosca habría recorrido una distancia aproximada a los 100 Km pero no los 100 Km.

ACTIVIDAD 9 – GRUPO 3

INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta el siguiente problema, desarrolle cada uno como considere conveniente, no borre nada aun cuando crea que sea incorrecto. De preferencia trabaje con lápiz carbón y de forma ordenada.

- Dos trenes avanzan uno hacia el otro sobre una vía recta. Al inicio, se encuentran alejados uno del otro una distancia de 100 km. Los trenes van a una velocidad de 50 km/h. Una mosca que se desplaza a una velocidad de 100 km/h parte de uno de los trenes hacia el otro, inmediatamente regresa hacia el primer tren y parte hacia el otro, y así sucesivamente. ¿Qué distancia habrá recorrido la mosca entre el instante inicial y el momento de ser aplastada por el choque de los dos trenes?

R// La mosca recorrio 100 Km en un tiempo de 1 hora antes de ser aplastada por el choque de los trenes...

mosca: 1 min (1.67 Km)
Tren: 1 min (0.8 Km)

* mosca: 40 min (66.8 Km) * Tren: 40 min (33 Km)

* mosca: 13 min y 30 seg (22.5 Km) * Tren: 13 min y 30 seg (10.8 Km)

* mosca: 4 min y 30 seg (7.5 Km) * Tren: 4 min y 30 seg (3.6 Km)

* mosca: 1 min y 30 seg (2.5 Km) * Tren: 1 min y 30 seg (1.2 Km)

* mosca: 30 seg (0.83 Km) * Tren: 30 seg (0.4 Km)

ACTIVIDAD 9 – GRUPO 4

INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta el siguiente problema, desarrolle cada uno como considere conveniente, no borre nada aun cuando crea que sea incorrecto. De preferencia trabaje con lápiz carbón y de forma ordenada.

- Dos trenes avanzan uno hacia el otro sobre una vía recta. Al inicio, se encuentran alejados uno del otro una distancia de 100 km. Los trenes van a una velocidad de 50 km/h. Una mosca que se desplaza a una velocidad de 100 km/h parte de uno de los trenes hacia el otro, inmediatamente regresa hacia el primer tren y parte hacia el otro, y así sucesivamente. ¿Qué distancia habrá recorrido la mosca entre el instante inicial y el momento de ser aplastada por el choque de los dos trenes?

- llegue a la conclusion de que la distancia recorrido se acerca a 97 pero nunca llega aserlo

- la distancia recorrida de la mosca en determinado tiempo es igual a la suma de la distancia recorrido por los dos trenes en dicho trempo

- la distancia depende del tiempo de vuelo

ANEXO N° 4: Etapas Complementarias De La Evolución Del Límite

Elaboración realizada con base a Bagni (2005), Ferrante (2009) y Molfino (2010).
Se citan en este apartado a diferentes matemáticos por sus aportes en la gestación de lo que conocemos como análisis, complementando el aporte de los griegos mencionado anteriormente en el capítulo dos.

Kepler (1571-1630).
Se le atribuye el **Método de los infinitésimos.** Este método era utilizado para resolver problemas relacionados con volúmenes o áreas. La premisa que parte el método de Kepler consiste en pensar que todos los cuerpos se descomponen en infinitas partes, infinitamente pequeñas, de áreas o de otros volúmenes conocidos. Los trabajos realizados por Kepler aparecen en Nova Stereometria Doliolum Vinatorum en 1615. Galileo posteriormente utilizará un método semejante para mostrar que el área encerrada bajo la curva tiempo-velocidad es el espacio.

Cavalieri (1598-1647).
Se le atribuye **el Método de los indivisibles.** Este método se utilizó principalmente para determinar áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos. Cavalieri representaba estos objetos mediante una superposición de elementos cuya dimensión era una unidad menor que aquella a evaluar. A pesar de no considerarse un antecesor del cálculo, fue el que impregnó a muchos bien pensantes hombres que un infinitésimo es un "cero pequeño".

Cavalieri fue uno de los primeros en decir que la tangente a una curva estaba definida por dos puntos sucesivos sobre la misma, dado que es como un collar de cuentas muy pequeñas, una al lado de otra; es el que sostuvo que una superficie estaba conformada por líneas sin ancho y que un volumen por un montón de superficies sin espesor.

Fermat (1601-1665)

Se le atribuye los **Método de Fermat y el Método de las tangentes.** El primero método era usado comúnmente para buscar extremos de curvas. Lo aplicó a las "parábolas e hipérbolas de Fermat" y parte de considerar que en una "cumbre" o en un "valle" de la curva, cuando E es pequeño, los valores de la función f(x) y f(x+E) están tan próximos que se pueden tomar iguales. El método consiste en hacer f(x+E)=f(x), dividirlo por E y tomar E=0. No obstante que Fermat no habla de límite explícitamente, la noción de sus métodos está bastante cerca del concepto actual de límite que se conoce. Fermat explica su segundo método de la siguiente manera, si se traza sobre las tangentes a las líneas curvas donde parece plantear un método para calcular tangentes en un punto de cualquier curva. Fermat sólo lo utiliza con la parábola. Descartes, crea una ampliación del método de Fermat y, considera que la curva y su tangente en un punto coinciden en un entorno pequeño de dicho punto. Lo que pretende Descartes con la ampliación del método de Fermat es dibujar la recta tangente en el punto P=(x, f(x)) y, para ello, calcula la subtangente utilizando un criterio de semejanza de triángulos. En la práctica, para obtener los segmentos necesarios se considera f(x+E)-f(x), luego se dividía por E y se tomaba E=0, lo que equivale para la matemática actual hallar el límite funcional en la abscisa de un punto P.

Isaac Barrow (1630-1677)

Realizó aportes al cálculo, entre ellos se encuentra el método de Barrow. Este método es similar al de Fermat, con la diferencia que aparecen dos incrementos en x e y que equivalen a los Δx y Δy utilizados en la actualidad.

Los métodos de los distintos matemáticos que se han mencionado en esta etapa dieron origen a las ideas que para engendraron lo que se conoce hoy día como análisis infinitesimal. Estos métodos surgieron por las exigencias de la mecánica, de la astronomía y de la física. También el álgebra aportó herramientas necesarias para que algunos de estos métodos se desarrollaran, destacando el método de las coordenadas, que facilitó el estudio de las curvas. Cabe señalar que estos métodos funcionaban de forma separada y no se tenía conciencia de su generalidad; les faltaba algo que provocara armonía que les diera ese carácter de universalidad. Hasta este momento histórico faltaba el concepto de límite. En esta etapa entran en escena los creadores de lo que hoy conocemos como Cálculo Diferencial e integral, los matemáticos **Newton y Leibniz**.

Newton (1648-1727)

Creador de la teoría o el método conocido como "fluxiones". Este método tiene su enfoque en la naturaleza geométrico-mecánica para tratar de forma general los problemas del análisis infinitesimal. Newton propone el método de las fluxiones, para estudiar las magnitudes variables, introducidas como abstracción de las diferentes formas del movimiento mecánico continuo denominadas fluentes.

Según Newton, todas las fluentes son variables dependientes y tienen un argumento común, el tiempo. Posteriormente Newton introduce las velocidades de la corriente de los fluentes a las que denominó fluxiones. La teoría de fluxiones se origina para resolver dos problemas: la determinación de la relación entre fluxiones. Esta teoría

establece que conocidas la relación entre fluentes y el recíproco o dada la relación entre fluxiones, se pueden encontrar las fluentes.

Para resolver estos problemas, Newton aplicó métodos basados en el uso de cantidades infinitamente pequeñas. Estos trabajos de Newton se expuestos en la obra Methodus Fluxionum Et Serierum Infinitorum que se publicó en 1736.

Newton publica en 1704 en su obra Tractatus Quadratura Curvarum, la cual explicita el método de las razones primeras y últimas, en la que el incremento de la variable se anula, lo que supone la explicitación de una idea de límite un tanto metafísica. A manera de ejemplo, se resuelve el siguiente problema "Fluya una cantidad x uniformemente; ha de encontrarse la fluxión de la cantidad x_n. En este tiempo, la cantidad x, al fluir, se convierte en x+o, la cantidad x_n resultará $(x+o)_n$; que por el método de las series infinitas es x_n+nox_n-1+ ((n2-n)/2) o2x_n-2+ etc. Y los incrementos o y nox_n-1+ ((n2- n)/2) o2xn-2+ etc., estarán entre sí como 1 y nx_n-1+ ((n2-n)/2) oxn-2+ etc. Desvanézcanse ahora aquellos incrementos, y su última razón será 1 a nx_n-1. Y por eso, la fluxión de la cantidad x es a la fluxión de la cantidad x_n como 1 a nx_n-1".

Newton publica en su obra Principia Mathematica una definición del concepto de límite, donde se refiere como: cantidades, y la razón de cantidades, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales.

Leibnitz (1646-1716)

Se le atribuye padre del cálculo al igual que Newton. Este matemático se preocupó por la claridad de los conceptos y el aspecto formal de la matemática. Leibnitz contribuye al nacimiento del análisis infinitesimal con su teoría sobre las diferenciales. Este matemático encontró que la pendiente de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas, cuando estas diferencias se hacen infinitamente pequeñas. También Leibnitz usa la notación que se utiliza actualmente para referirse a diferenciales, pero no aclara lo que, para él significa infinitamente pequeño.

La concepción del límite en esta etapa es de tipo geométrica de límite puesto que se trabaja en problemas geométricos. La noción de límite se encuentra implícita, y se ve una evolución de su estatus en relación a la visión griega pasando de ser una noción que ni siquiera se explicita a otra noción, con los infinitésimos, las razones primeras y últimas de Newton que se constituyen en una herramienta para resolver problemas.

Con Leibnitz surge la idea de límite como aproximación, donde se tienen que cumplir ciertas condiciones. Por una parte, la aproximación tiene que ser indefinida, es decir, tiene que existir la posibilidad de tomar aproximaciones cada vez mejores, cosa que se consigue en todos los métodos revisados. Con Newton esta posibilidad se encuentra claramente la posibilidad que los objetos se han de aproximar más que cualquier diferencia dada, lo cual implica que el límite debe ser la mejor de todas las aproximaciones posibles.

Segunda Etapa comprende la segunda mitad del siglo XVIII

A esta etapa se le denomina **Transformación de los fundamentos del análisis infinitesimal**. Se caracteriza por el uso de infinitésimos pequeños y grandes, que surgen de la teoría de las razones primeras y últimas de Newton, los matemáticos de la época obtienen solución para muchos de sus problemas. La dificultad más importante para el desarrollo del análisis infinitesimal fue la necesidad de extender las operaciones del análisis a un mayor número de funciones, para lo que se requería una idea clara de dependencia funcional y, para ello, fue necesario investigar el significado del concepto de función y sus manipulaciones algebraicas.

Los matemáticos del siglo XVIII, que se preocuparon de la fundamentación del análisis, intentaron eliminar lagunas y clarificar los matices místicos sin percatarse de la necesidad del concepto de límite. En esta etapa se presentan las principales preocupaciones de loa matemáticos de la época de lo que conocemos como análisis.

Euler (1707-1743)

Toma como punto de partida el cálculo diferencial de Leibnitz y el método de fluxiones de Newton y los integra en una rama más general de las matemáticas, que, desde entonces, se llama análisis y centra su estudio en los procesos infinitos. Euler plantea la regularidad de las funciones, introduciendo la función continua como sumas, productos y composiciones de funciones elementales.

D'Alembert (1717-1783)

Su aporte en el análisis es la creación de la teoría de los límites al modificar el método de las primeras y últimas razones de Newton. D´Alembert enuncia la siguiente definición de límite: Se dice que una cantidad es límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se la pueda suponer, sin que, no obstante la cantidad que se aproxima

pueda sobrepasar a la cantidad a la que se aproxima; de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea absolutamente asignable". En esta definición de límite las variables son monótonas y el límite unilateral, es decir, la magnitud que se aproxima no le puede superar, y así, aunque la aproximación es objetiva no se puede tener un control completo de la misma.

Lagrange (1736-1813)

Su aporte en el análisis es el desarrollo de funciones en series de potencias Los resultados conseguidos en su trabajos con series le hicieron creer que se podían evitar los límites y continuó haciendo desarrollos en series de potencias, sin darse cuenta de que la convergencia de las mismas necesitaba del concepto de límite.

Tercera etapa, comprendida desde el Siglo XIX hasta principios del siglo XX

Esta etapa es conocida como **la Aritmetización del análisis**. Se caracteriza por las obras de un gran número de matemáticos que reflejaban la necesidad objetiva de construcción de la teoría de límites. Los matemáticos de la época anhelaban sentar las base del análisis matemático y una reconstrucción radical de este último. Fueron determinantes para lograr el cometido de los matemáticos de la época, la clarificación del concepto de función, la aparición de nuevos problemas matemáticos y físicos, y la evolución de la enseñanza de las matemáticas.

Tras la Revolución Francesa, la matemática pasa a ser una disciplina obligatoria en la Escuela Normal Superior y en la Politécnica. Los matemáticos se ven obligados a enseñar análisis matemático y, por tanto, tienen que apoyarse en unas bases rigurosas. En esta etapa son notables los aportes de Cauchy, Bolzano y Weierstrass.

Cauchy (1789-1857)

Retoma el concepto de límite de D'Alembert, rechazando el planteamiento de Lagrange. Cauchy prescinde de la geometría, de los infinitésimos y de las velocidades de cambio, dándole un carácter más aritmético, más riguroso pero aún impreciso. Cauchy en 1821 propone la siguiente definición de límite: "cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás".

Cauchy define además infinitésimos como una cantidad variable que converge a cero. Cauchy basa todo el análisis en el concepto de límite.

Bolzano (1781-1848)

Su aporte al análisis es la definición de continuidad basada en la de límite. De hecho la obra de Bolzano se desarrolla de forma paralela a la de Cauchy, basada en la misma idea de límite.

Weierstrass (1815-1897)

Su aporte más significativo es la definición formal de límite con la contribuyó con notoriedad a la aritmetización del análisis. Weierstrass criticó la expresión la variable se acerca a un límite puesto que, según él, esto requiere tiempo y movimiento, y dio una formulación métrica, puramente estática, definición bastante cercana a la que se utiliza hoy en día. Esta definición, que introduce Weierstrass, es la siguiente:

"Si, dado cualquier ε, existe un no, tal que para $0<n<no$, la diferencia $f(xo\pm n)-L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x=xo$".

La noción de límite es ya, en esta etapa, una noción matemática que sirve como soporte a otras como la continuidad, la derivada y la integral, hecho que ha contribuido a un uso universalizado de la misma.

Sin embargo, esta definición, que evoluciona desde la concepción dinámica de Cauchy a una concepción estática, no es el final de un largo proceso evolutivo, ya que en el siglo XX surgen concepciones de tipo topológico, ligadas a la generalización de los conceptos del cálculo a conjuntos no necesariamente numéricos, lo que constituye **una cuarta etapa en el desarrollo del concepto.**

ANEXO N° 5: Demostración De La No Numerabilidad De IR

Esta demostración es una elaboración realizada a partir de Dauben (1990). Según este autor, la prueba original de Cantor demuestra que el intervalo [0,1] no es numerable, es decir, no se puede enumerar la lista de todos los reales dentro del intervalo (siempre habrán más). Se extiende a todos los reales, ya que es posible equipotenciar estos al intervalo. Se puede demostrar que lo que es válido para el intervalo [0,1] lo es para cualquier otro, por grande que sea (exceptuando el intervalo [0,0] que está vacío).

Dauben (1990), presenta esta demostración es por reducción al absurdo que realizó Cantor. Parte de lo siguiente, se supone que el intervalo [0,1] es infinito numerable. Para ello se elabora una secuencia de los números, (r1, r2, r3,...), como se sabe que los reales entre 0 y 1 pueden ser representados solamente escribiendo sus decimales.

Luego se colocan los números en la lista (no necesariamente en orden). Se considera los decimales periódicos, como 0.499... = 0.500..., como los que tienen infinitos nueves. La secuencia puede tener aspecto similar a:

r1 = 0. 5 1 0 5 1 1 0...

r2 = 0. 4 1 3 2 0 4 3...

r3 = 0. 8 2 4 5 0 2 6...

r4 = 0. 2 3 3 0 1 2 6...

r5 = 0. 4 1 0 7 2 4 6...

r6 = 0. 9 9 3 7 8 3 8...

r7 = 0. 0 1 0 5 1 3 5...

...

Por la hipótesis que se hace y por la construcción de la lista que debe contener todos los números reales entre 0 y 1. Se construye un número x que debería estar en la lista. Para eso se usan los números de la diagonal.

r1 = 0. 5 1 0 5 1 1 0...

r2 = 0. 4 1 3 2 0 4 3...

r3 = 0. 8 2 4 5 0 2 6...

r4 = 0. 2 3 3 0 1 2 6...

r5 = 0. 4 1 0 7 2 4 6...

r6 = 0. 9 9 3 7 8 3 8...

r7 = 0. 0 1 0 5 1 3 5...

…

El número x se define como: al dígito xk le corresponde el k-ésimo dígito de rk+ 1 (si fuera un nueve, le asigno el dígito cero).

Entonces, para un x= 0.6251346.... El número x es un número real. Pero cuál es este número. Si se quiere decir que x está en el n-ésimo lugar de la lista, esto no es cierto, ya que el elemento n-ésimo dígito de rn es distinto al de x. En consecuencia esta no es una lista completa de los reales en el intervalo [0,1].

Lo anterior refleja una contradicción, que nace de la premisa de suponer que estos números son infinitos numerables.

Dauben (1990) menciona que para extender este resultado al campo R se tiene que establecer una relación biyectiva entre este intervalo y los reales. Esto es posible por la función:

$$f : (0,1) \to \mathbb{R}$$ Definida por $$f(x) = \tan\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right).$$

Con esto se puede decir que hay tantos números reales como reales hay entre 0 y 1.

En relación al problema anterior demostrado por Cantor, Dauben (1990) menciona que Cantor había propuesto a Dedekind un problema parecido e importante. Este problema preguntaba: "¿Será posible poner en correspondencia una superficie de manera que a cada punto de la superficie le correspondiera un único punto de la recta, y recíprocamente?". Cantor consideraba que la respuesta debería ser negativa, no conseguía, ni tampoco Dedekind, dar razón para tal creencia.

Siguiendo a Dauben (1990), quien sigue relatando que en 1877, Cantor pudo enviar la noticia a Dedekind de que, a diferencia de la opinión matemática prevaleciente en relación a la pregunta anterior, era posible establecer una correspondencia biunívoca entre recta y plano. La demostración consistía en representar cada punto de un cuadrado por un par ordenado de coordenadas en notación decimal. Las representaciones decimales de las coordenadas se entremezclan conforme a un procedimiento especificado, con la finalidad de generar un único desarrollo decimal. Este decimal era asociado luego con un punto del segmento rectilíneo. El proceso completo es reversible. Este hallazgo encontrado, según Dauben (1990) tomó por sorpresa a Cantor, quien exclamó "¡Lo veo, pero no lo creo!".

Este método se aplica a la proyección estereográfica de IC haciendo viable el cierre de este conjunto al mostrarlo con un solo infinito y que se corresponde al polo norte de una esfera.

Proyección estereográfica del plano complejo extendido sobre la esfera de Riemann

Fuente: Dauben, J. (1990, pág.42).