LA PERSPECTIVA CURVILINEA EN LA ARQUITECTURA

(Con una nota sobre las curvaturas en los templos griegos)

POR

GUILLERMO YAÑEZ PARAREDA

Introducción

A lo largo de la historia del Arte ha existido un debate permanente entre *visión* y *representación*, y más concretamente entre el espacio visual y el espacio representado bidimensionalmente. Sus orígenes se remontan a la Antigüedad, pero adquiere cierta importancia en el Renacimiento, con el descubrimiento (¿o redescubrimiento?) de la perspectiva lineal, llamada también perspectiva artificial *(perspectiva artificialis, prattica o pingendi)*. En efecto, en ese momento histórico se hace patente la diferencia entre la perspectiva natural *(perspectiva naturalis o comunis)*, que nos ofrece la propia visión, y la perspectiva artificial, producto de la mente. Sin embargo, cuando el debate adquiere su mayor relieve y hasta podríamos decir dramatismo, es con la publicación en 1927 del ensayo *La perspectiva como forma simbólica* [1] del historiador de Arte Erwin Panofsky donde se hace la crítica más radical, hasta el momento, a la perspectiva renacentista.

Panofsky intenta proponer un modelo perspectivo curvilíneo basado en la *esfericidad* del espacio visual, de carácter dinámico, considerando el ángulo como magnitud fundamental y ofreciendo una imagen geométrica no euclidiana. Por el contrario, la perspectiva renacentista o artificial, se basa en la línea recta del espacio euclidiano, respondiendo así a un modelo de visión estática con campo visual más reducido.

A nuestro modo de ver, cualquier *modelo* teórico que trate de aproximarse a la visión humana y quiera resolverse con un dibujo sobre una superficie ha de ser inevitablemente artificial, y por tanto, al igual que la perspectiva lineal, todas las demás perspectivas curvilíneas que se proponen

como alternativas son en realidad *perspectivas artificiales,* con sus ventajas e inconvenientes como más adelante veremos.

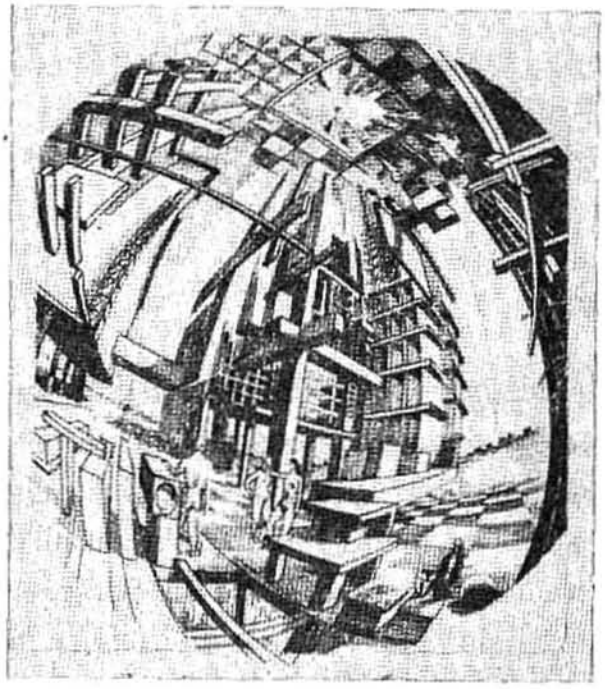


FIG. 1. Grabado realizado en perspectiva curvilínea (A. Flocon, 1968).

En este trabajo, aparte de comentar algunos de los modelos de perspectiva curvilínea ya propuestos, se analizan con más detalle dos de tipo esférico, incluyéndose al final una nota relativa a las curvaturas de los templos griegos. Para completarlo, y a modo de introducción, desarrollamos unos apartados en torno a: la *Optica* [2] de Euclides, la perspectiva renacentista y la reciente perspectiva curvilínea, recordando además algunos aspectos elementales de la visión humana, que en parte justifican los modelos perspectivos.

La "Optica" de Euclides

La historia de la Perspectiva no se puede separar de la historia de la Optica, ambas se inician prácticamente desde el momento en que el artista intenta llevar a cabo representaciones bidimensionales de una realidad tridimensional. La *Optica*[3] de Euclides (siglo III a.C.) es uno de los tratados más antiguos que estudian el problema de la visión, y posiblemente sirvió de referencia a algunos pintores de la Antigüedad clásica. Este tratado desarrolla sesenta y una proposiciones, o teoremas, basadas en doce postulados o suposiciones primeras.

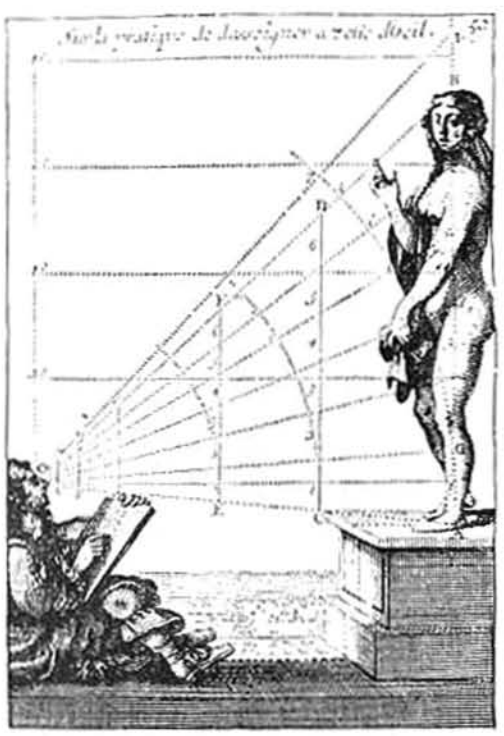


Fig. 2. Ilustración del arquitecto y matemático A. Bosse perteneciente a su tratado: *Traité des pratiques géométrales et perspectives, enseignées dans l'Académie Royale de peinture et sculpture*, Paris, 1665. En este grabado se apunta la diferencia entre la proyección sobre un plano y una superficie esférica.

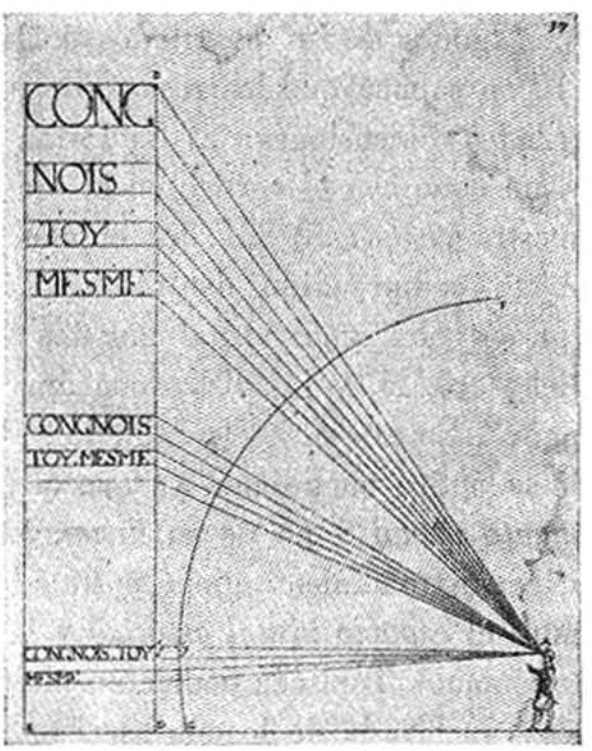


Fig. 3. Ilustración del libro: *Perspective, avec la raison des ombres et miroirs*, Londres, 1612, del arquitecto e ingeniero Salomón de Caus, que muestra el tamaño que hay que utilizar en las inscripciones sobre un muro según su altura.

Una de las hipótesis fundamentales sobre las que descansa la obra euclidiana consiste en el concepto de *cono visual,* atribuido a Pitágoras (siglo VI antes de Cristo), que establecía que los objetos se veían gracias a un haz de rayos que partiendo del ojo (vértice del haz) alcanzaba los objetos para después volver al punto de origen. Dicha hipótesis tuvo una vigencia generalizada hasta que Al-Hazen (aproximadamente 965-1039) comprendió el origen de los rayos visuales, situándolos en los objetos y no en el ojo; si bien hay que reconocer que Demócrito [4] (460-361 a.C.), muchos años antes, dijo que de los objetos se desprendían "ciertos simulacros" que tienen la misma forma que los objetos visibles y se reflejan en el ojo humano como un espejo, provocando la visión.

Algunos de los postulados de la óptica euclidiana son los siguientes: 1) "Se supone que los rayos que parten del ojo atraviesan un espacio de grandes dimensiones; 2) La forma del espacio que incluye nuestra visión es un cono con el vértice en el ojo y cuya base se sitúa en los límites de nuestra visión; 3) Sólo los objetos dentro del cono visual se ven; 4) Los objetos comprendidos dentro de un ángulo visual serán mayores cuanto mayor sea el ángulo visual que los comprende, menores cuanto menor sea dicho ángulo, y los vistos con ángulos iguales parecen ser del mismo tamaño". En este último postulado se basa la *concepción esférica de la visión* de la óptica euclidiana, ya que el tamaño de las cosas vistas depende del *ángulo visual* y no de su *distancia.* Nosotros nos atreveríamos a dar un origen astronómico a dicho postulado, puesto que existe una cierta analogía entre el *espacio visual esférico* y la virtual *bóveda celeste* que utilizan los astrónomos. También podríamos destacar algunas de las proposiciones como son: 1) "Nada de lo que es visto lo es inmediatamente en su totalidad". Curiosamente esta proposición concuerda con lo que actualmente sabemos sobre el proceso de *lectura* que realiza el ojo cuando enfoca un objeto dentro de su campo visual; 4) "Si sobre la misma recta se marcan varios segmentos iguales, el más lejano parecerá más pequeño; 10) Las partes más distantes de un plano que se extiende por debajo de los ojos parecerán más altas; 40) Las ruedas de un carro parecerán circulares unas veces y otras darán la impresión de ser óvalos".

En algunos pasajes de la *Optica* de Euclides se alcanza una gran sutileza [5] al suponer que los rayos visuales forman un haz discontinuo, lo que explicaría la limitación de la agudeza visual. Por otra parte, en la proposición 9 expone que: "el ángulo recto visto a gran distancia parece un arco", lo que justifica el que objetos rectangulares vistos desde lejos parecen redondearse. Esto último podría conectar en cierto modo con el problema de las curvaturas en los templos griegos, ya que de suponer cierto lo afirmado en dicho teorema, entre otras razones, ¿no se trataría, al introducir curvaturas convexas, de conseguir un efecto *ilusionista* de lejanía que psicológicamente aumentase el tamaño aparente de dichas construcciones?

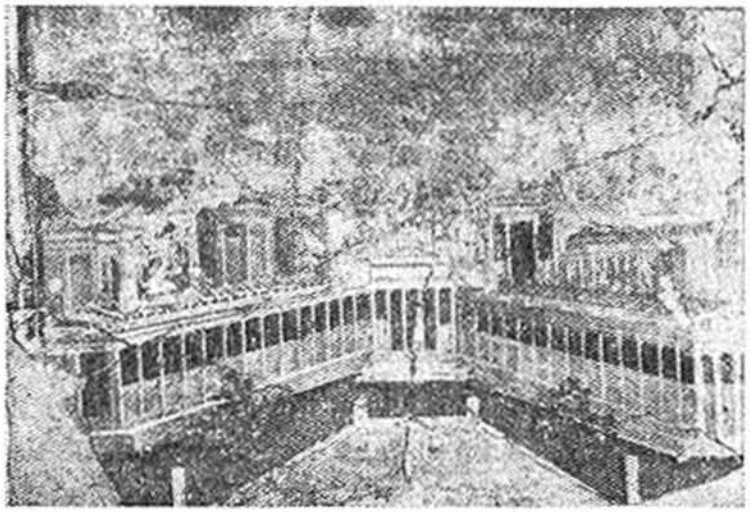


FIG. 4. Fresco de Pompeya (Nápoles, Museo Arqueológico Nacional).

El modelo de visión euclidiano del *cono visual emergente* describe gran parte de las leyes de la visión y se puede comprobar cómo alguna pinturas (Fig. 4) y mosaicos pompeyanos realizados entre cincuenta y veinticinco años a.C. obedecen en sus composiciones a las reglas que Euclides estableció. En estas pinturas, de clara intención escenográfica, no se llega aún, al parecer, a un *punto de fuga* único para las rectas paralelas, sino que más bien lo que se encuentran son múltiples puntos de fuga sobre un eje vertical u horizontal; son las perspectivas en "espina de pez", que se repe-

tirán en la pintura gótica tardía y prerrenacentista. Sin embargo en un corto pasaje del tratado de Vitruvio [6] *De architectura,* donde hace referencia a la *Scenografía,* da a conocer la existencia de un punto de concurso único de las rectas paralelas pertenecientes a la fachada lateral de un edificio. Este ha sido uno de los indicios, entre otros, que ha permitido llegar a pensar que el Renacimiento *redescubrió* la perspectiva lineal que ya se conocía en la Antigüedad.

La perspectiva renacentista y las distorsiones marginales

El arquitecto Brunelleschi fue, al parecer, el primero en realizar el trazado de una perspectiva lineal de un edificio, tal como la entendemos hoy día, es decir, haciendo uso de la *sección de la pirámide visual,* manteniendo el ojo en una posición fija (punto de estacionamiento). Por fin se había logrado encontrar un método matemático explícito que permitiera representar la visualización del espacio tridimensional sobre un plano. Este modelo visual monocular y estático se corresponde con un modelo geométrico que admite un tratamiento riguroso, y si bien constituye una buena aproximación a la visión real, lo hace a costa de una serie de restricciones que sin duda esquematizan el fenómeno real binocular y dinámico.

El método utiliza dos conceptos: el de la *pirámide visual* y el de la *sección.* El primero, como sabemos, era ya conocido en la Antigüedad, si bien aquí los rayos de luz no parten del ojo, sino de los objetos. Hay un pasaje del *Tratado de Pintura* [7] de Leonardo da Vinci (que para nosotros tiene una estrecha relación con lo que dijo Demócrito [8]) donde dice: "En el instante en que la luz se hace queda el aire colmado por las infinitas imágenes que causan los distintos cuerpos y colores que en su seno se disponen; el ojo se convierte en su blanco y piedra imán". Leonardo fue uno de los primeros que relacionaron el funcionamiento del ojo con el de una cámara oscura (Fig. 6) y así dice: "Todas las cosas que el ojo ve a través de pequeños orificios son vistas por ese ojo, pero conocidas del derecho" [9], con clara alusión a la imagen retínica invertida.

El concepto de sección y la precisión sobre el punto de vista único y fijo (vértice de la pirámide) es lo que constituyó un verdadero avance respecto a los sistemas prerrenacentistas de representación. Nos hemos apartado de la esfericidad de la óptica euclidiana, formada por una serie de reglas, para pasar a un modelo teórico sin ambigüedades y perfectamente operativo en el plano del cuadro (Fig. 7).

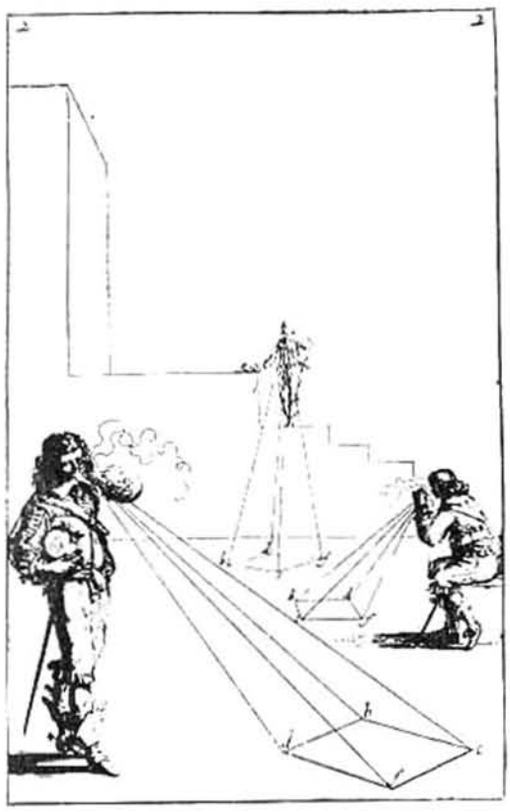


FIG. 5. La «pirámide visual», ilustración del libro de A. BOSSE, *Manière universelle de Mr. Desargues, pour pratiquer la perspective...* París, 1648.

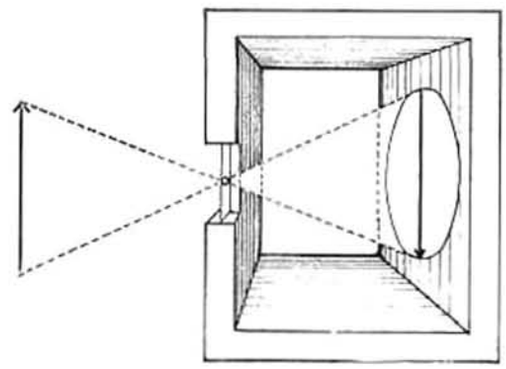


FIG. 6 LA CAMARA OSCURA.

FIG. 7. En esta ilustración del libro de BROOK TAYLOR, *New Principles of Linear Perspective,* Londres, 1749, se muestra el principio básico de la perspectiva lineal: la sección de la pirámide visual cuyo vértice está en el ojo del observador, *O*. La pirámide, en este caso, se apoya en los vértices de un cubo. En el plano del cuadro se representa dicha sección que es la perspectiva.

En el famoso tratado de Piero della Francesca *De prospectiva pingendi,* escrito hacia 1470 pero que no se imprimió hasta 1899, se exponen las partes de que se compone la *perspectiva artificialis:* "... la primera es el

órgano de la vista, es decir, el ojo; la segunda es la forma del objeto visto; la tercera es la distancia entre el ojo y el objeto; la cuarta son las líneas que se inician en la superficie del objeto y se dirigen al ojo; la quinta es el plano que está entre el ojo y el objeto donde quiera que uno intente colocar los objetos".

FIG. 8. *Perspectiva urbana*, pintura atribuida a PIERO DELLA FRANCESCA (1420-1492).

Pero sigamos con Leonardo, que en otro apartado de su *Tratado* [10], titulado *La Pared de Vidrio*, dice: "La perspectiva no es otra cosa que ver un lugar a través de un vidrio plano y perfectamente transparente [11], sobre cuya superficie han sido dibujados todos los cuerpos que están del otro lado del cristal. Estos objetos pueden ser conducidos hasta el punto del ojo por medio de pirámides que se cortan en dicho vidrio". Esto nos permite comprender la introducción del *plano del cuadro*, interpuesto entre el objeto y el observador, que secciona la pirámide visual como sustitución de la *pantalla transparente;* y análogamente, la sección sustituye a la impresión visual. Así, pues, las dos operaciones básicas, *proyección* desde un vértice y *sección* por el plano del cuadro, quedaban justificadas en cierta forma experimentalmente. Dichas operaciones serían la base de la Geometría proyectiva desarrollada posteriormente a partir de Desargues y Pascal.

Respecto a la simplificación monocular y fija que propone el modelo de la perspectiva lineal, conviene hacer algunas observaciones que nos permitan comprender hasta qué punto tienen su fundamento. En primer lugar, se puede comprobar que cuanto mayor es la coincidencia entre el punto de

vista del proyectista o pintor y el del observador, tanto mayor será la impresión de profundidad obtenida en la perspectiva. Este efecto se mejora notablemente si la distancia entre los ojos (6,5 cms. aproximadamente) es muy pequeña comparada con la que existe entre el centro de proyección y el plano del cuadro. Pero además hay que añadir que si observamos una escena conocida de antemano con un solo ojo, el cerebro la interpreta en relieve al tener en cuenta una información anterior. Vemos, por tanto, que las simplificaciones introducidas en dicho modelo se basan en ciertas experiencias que si se aprovechan adecuadamente pueden ofrecer una imagen bastante aproximada a la imagen visual.

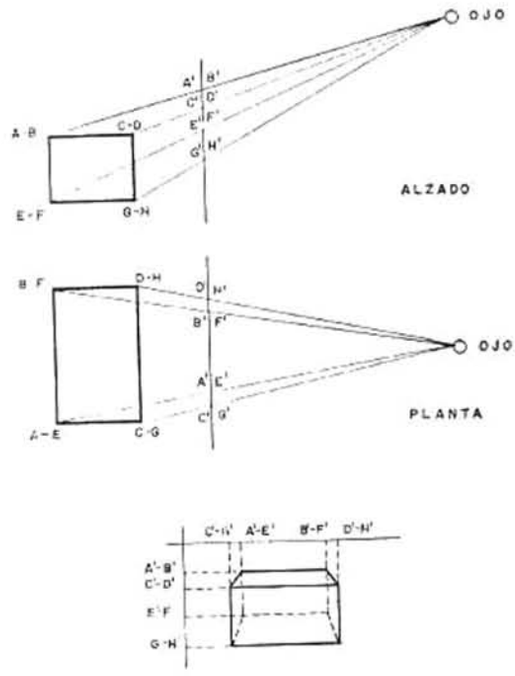


FIG. 9. COSTRUZIONE LEGITTIMA.

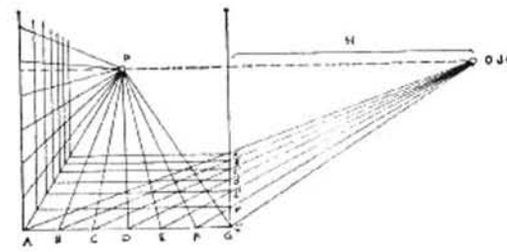
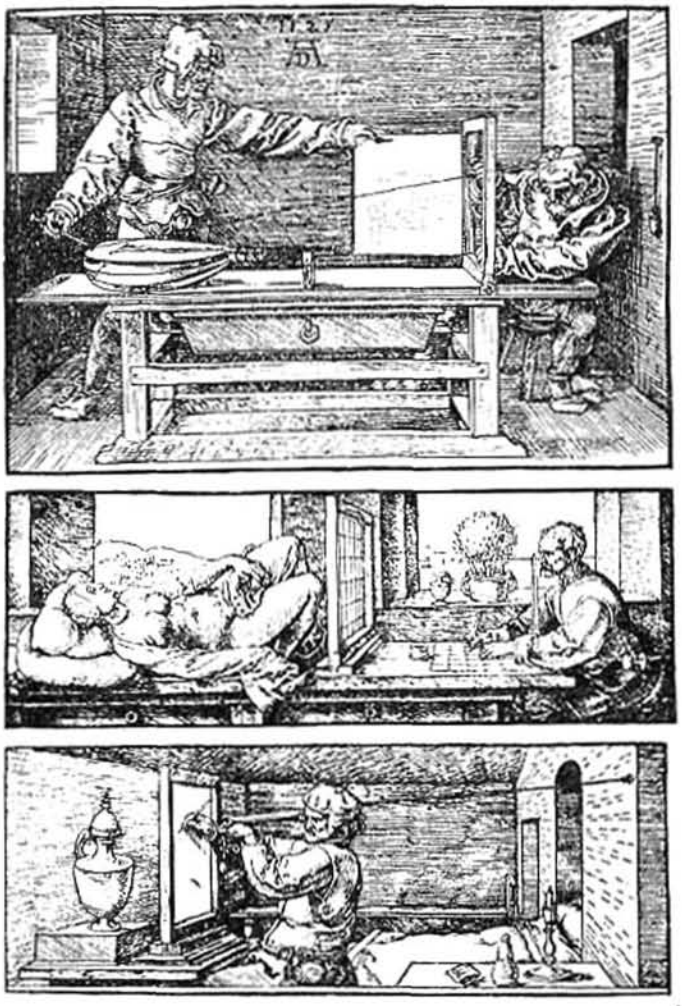


FIG. 10. CONSTRUCCION ABREVIADA

Una vez establecido el modelo perspectivo estaba preparado el camino para las distintas construcciones gráficas renacentistas como son: "*la construzione legittima*" (atribuida a Brunelleschi), más apropiada para el dibujo de edificios (Fig. 9) que utiliza el alzado y la planta de la sección piramidal; la *construcción abreviada* (Fig. 10), más empleada por los pintores, es una perspectiva central donde se combina con un dibujo auxiliar correspondiente a la sección lateral de la pirámide visual; esta construcción fue

descrita primero por Leon Battista Alberti. Por último podríamos destacar los instrumentos o máquinas de hacer perspectiva de Alberto Durero (Figuras 11, 12 y 13).



FIGS. 11, 12 y 13. Procedimientos mecánicos de ALBERTO DURERO para hacer perspectivas (1525).

Al llegar aquí conviene llamar la atención sobre un problema que surgió de la práctica de la perspectiva lineal y que ya advirtieron algunos artistas, entre ellos Leonardo. Nos estamos refiriendo a las *distorsiones marginales*. Parecía, pues, que el método no era todo lo perfecto que cabía esperar, ya que daba lugar en ocasiones a unas deformaciones situadas en las márgenes del dibujo. Para ilustrar estas aberraciones, Leonardo en su

Tratado [12] pone el ejemplo de la perspectiva de una columnata vista de frente (Figs. 14*a* y 14*b*), haciendo ver que, paradójicamente, las dimensiones de estas tienden a aumentar a medida que la columna representada se desplaza lateralmente en el dibujo. Qué duda cabe que esto contradice la observación real o perspectiva natural, en la cual las imágenes de las columnas laterales reducen su tamaño al aumentar la distancia al centro, debido a la disminución del ángulo visual. En la figura 15 se ilustra esto con segmentos de igual longitud.

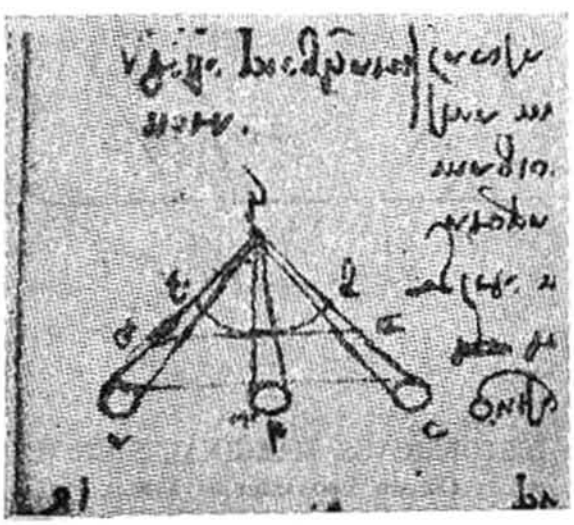


FIG. 14*a*. Dibujo de LEONARDO DA VINCI para ilustrar el problema de la perspectiva de una columnata *(Tratado de la Pintura)*.

En relación con este problema entre la perspectiva *natural* y la perspectiva *artificial*, Leonardo hace el siguiente comentario [13]: "La Perspectiva natural dice que, entre cosas de igual magnitud, la más remota parece menor. Y a la inversa, que la más próxima parece mayor; y que tal es la proporción de las disminuciones cual es la de las distancias. La perspectiva artificial, sin embargo, dispone cosas desiguales a diversas distancias, cuidando de que la menor esté más próxima al ojo que la mayor y, a tal distancia, que esa mayor parezca menor que todas las otras. Causa de esto es el plano vertical donde esa demostración es representada, cuyas partes todas,

y en toda la extensión de su altura, guardan desiguales distancias del ojo". Observamos en este comentario de Leonardo que apunta al plano del cuadro como causa de estas distorsiones que evidentemente, como veremos más tarde, tratarán de eliminarse con perspectivas curvilíneas que sustituyen dicho plano del cuadro por una superficie curva.

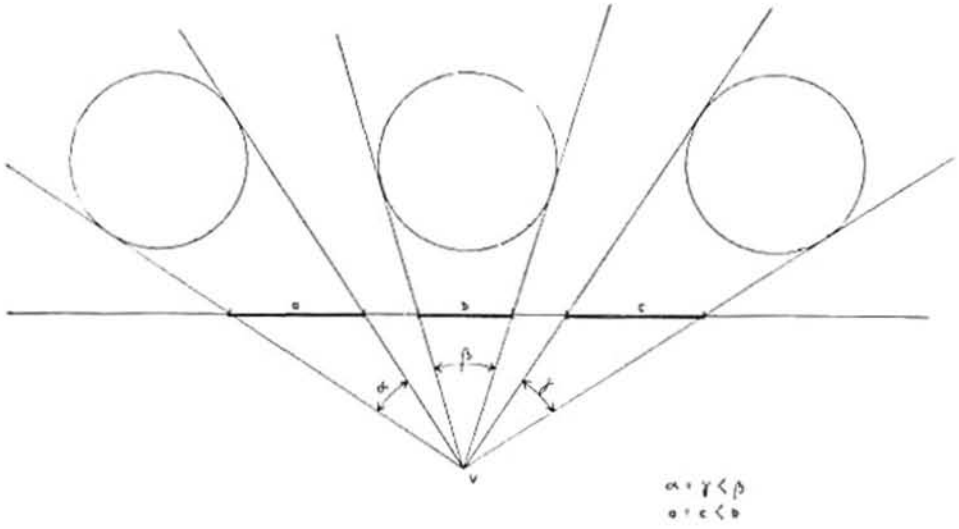


FIG. 14*b*. DISTORSIONES MARGINALES EN UNA COLUMNATA
(Según LEONARDO DA VINCI).

Las deformaciones marginales que se observan en las perspectivas lineales (Figs. 16, 17*a* y 17*b*) se pueden obtener también mediante la cámara fotográfica con orificio de pequeña abertura y sin lente, como ha mostrado Pirenne [14]. Dichas distorsiones son especialmente acusadas cuando se representan superficies de revolución. Así, por ejemplo, las imágenes de esferas resultan ser elipsoides. Tratadistas de la perspectiva, como La Gournerie [16], estudiaron las correcciones realizadas por algunos pintores renacentistas en sus pinturas para evitar dichas deformaciones (Figs. 18 y 19).

En el Renacimiento se dieron dos soluciones al problema. La primera consistía en combinar la perspectiva lineal con la perspectiva natural, haciendo uso de esta última, en forma intuitiva, como correctora de la primera. En la segunda solución ofrecida por Leonardo, que como tratadista

le preocupa especialmente este problema, propugna lo que él llama la *Perspettiva semplice*, que sencillamente consiste en aumentar la distancia del punto de vista hasta hacer desaparecer del plano del cuadro dichas aberra-

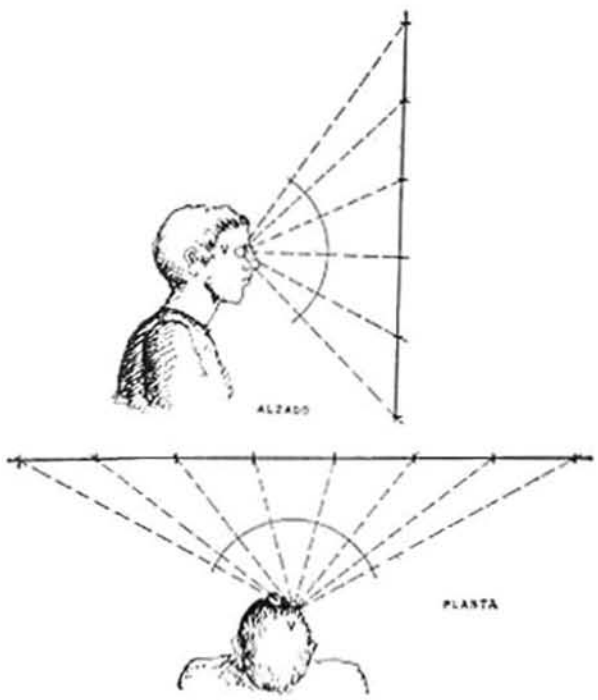


FIG. 15. Los valores de los ángulos visuales disminuyen al separarse del eje del cono visual para segmentos de igual longitud.

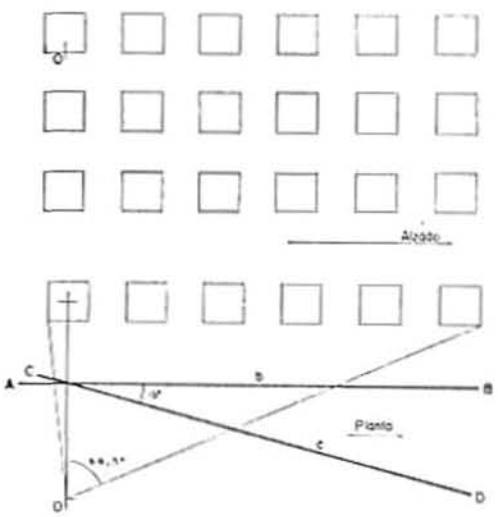


FIG. 16. Alzado y Planta de 18 cubos. Esta disposición se utiliza para realizar las dos perspectivas de la figura 17*a* y 17*b* con distinto plano del cuadro (PIRENNE, *Op. cit.*, p. 153).

ciones. Esta última solución, tan razonable, propone en definitiva una *limitación* al ángulo de abertura del cono de visión (Fig. 20).

Dejamos en este punto el debate renacentista y vamos a dar un salto en la historia que nos situará, en el próximo apartado, a finales del siglo XIX.

EN TORNO A LA PERSPECTIVA CURVILÍNEA

La *Optica fisiológica* [16] de Helmholtz, publicada por primera vez en 1866, junto con el trabajo del profesor del politécnico de Berlín Guido Hauck, *Die Subjektive Perspektive...* [17], de 1875, constituyen dos obras de gran importancia en este debate sobre la perspectiva, siendo además dos

antecedentes básicos al citado ensayo de Panosfky. Como acertadamente apunta Gioseffi [18], por una parte Helmholtz, en base a sus trabajos experimentales sobre la visión, plantea la *complejidad del acto visual* y la *imposibilidad* que tiene el artista de alcanzar una *copia exacta de la realidad;* y por otra Hauck, tomando como referencia el trabajo de los fisiólogos de la visión, realiza una crítica a la perspectiva renacentista (artificialis), que se proyecta sobre un plano, propugnando en su lugar la proyección sobre

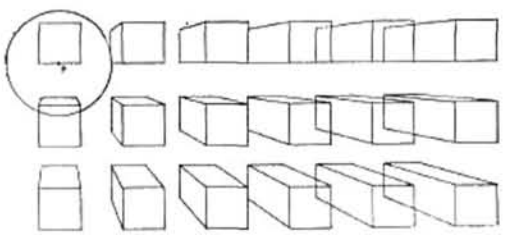


FIG. 17*a*. Perspectiva obtenida con el plano AB (ver Fig. 16). Obsérvese las distorsiones marginales (PIRENNE, *Op. cit.*, p. 154).

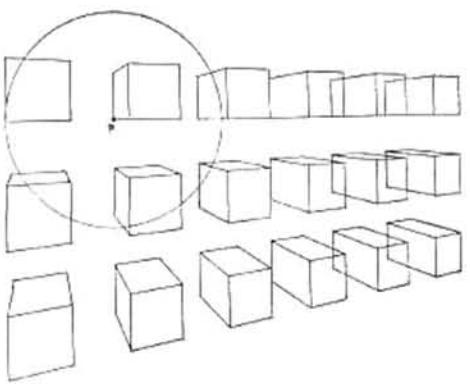


FIG. 17*b*. Perspectiva obtenida con el plano CD (ver Fig. 16). Las distorsiones marginales se reducen respecto a la figura 17*a*. Ambas perspectivas se han obtenido mediante un computador (PIRENNE, *Op. cit.*, p. 154).

una superficie curva basándose en la esfericidad de la imagen retínica (Figura 22) y del movimiento ocular. Hauck propone, por tanto, una *perspectiva curvilínea sobre una superficie cilíndrica* que a continuación se desarrollaría sobre un plano (Figs. 23 y 24).

En dicha perspectiva curvilínea cilíndrica las imágenes de las rectas horizontales paralelas serán curvas que se cortarán en dos puntos, mientras que las de las de las rectas verticales se conservan verticales en el dibujo. Sin embargo la operación de desarrollar el cilindro recto en el plano, pasando a éste las imágenes proyectadas en aquél, se hará siempre de forma aproximada, pues se parte de un prisma inscrito o circunscrito al cilindro. El grado de exactitud dependerá del número de lados que tenga el polígono de la base del prisma.

FIG. 18. RAFAEL, *La Escuela de Atenas*. La Gournierc detectó en esta pintura la corrección por perspectiva natural de la esfera situada a la derecha de la composición. Sin esta corrección su imagen sería un elipsoide.

Para evitar esta segunda operación de desarrollo sobre un plano, necesariamente inexacta y a veces laboriosa (dependiendo de la complejidad de las imágenes proyectadas en el cilindro), nosotros consideramos más apropiado utilizar *una segunda proyección sobre el plano del dibujo con vértice de proyección a distancia finita.* Obtendríamos así una perspectiva curvilínea cilíndrica más exacta y resuelta exclusivamente con procedimientos geométricos.

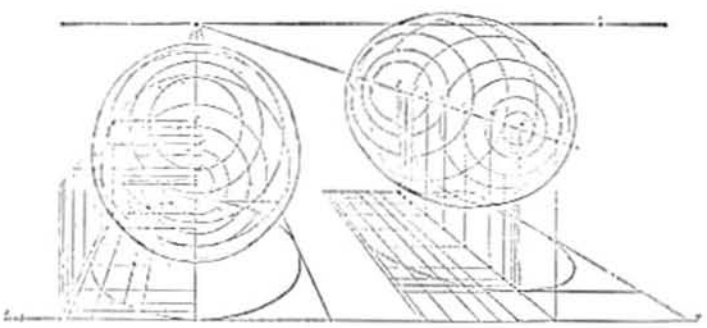


FIG. 19. Perspectiva lineal de dos esferas. Obsérvese la deformación tan acusada de la esfera representada a la derecha del dibujo cuya imagen es un elipsoide (Luigi y Pietro de SIMONI, *Spazio Prospettico*, Roma, Bonacci, 1976, p. 84).

Por otra parte, Hauck [19] realiza una aplicación al estudio de las curvaturas de los templos dóricos proponiendo la tesis de que su causa se debe a una corrección óptica del efecto de ilusión de Zöllner, que luego veremos.

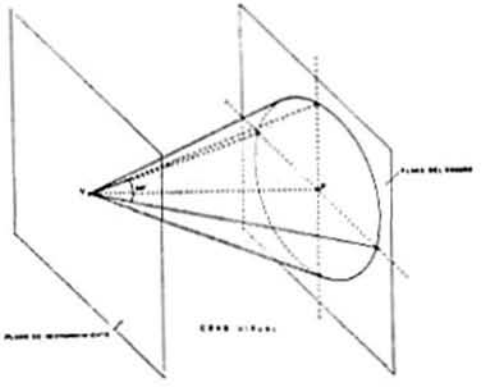


FIG. 20. Cono visual. Leonardo propugna que el objeto se debe situar dentro de un ángulo óptico de 28°, sin embargo mucho tratadistas posteriores convienen en un ángulo de 40°.

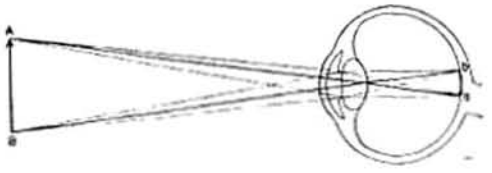


FIG. 22. Formación de la imagen retiniana.

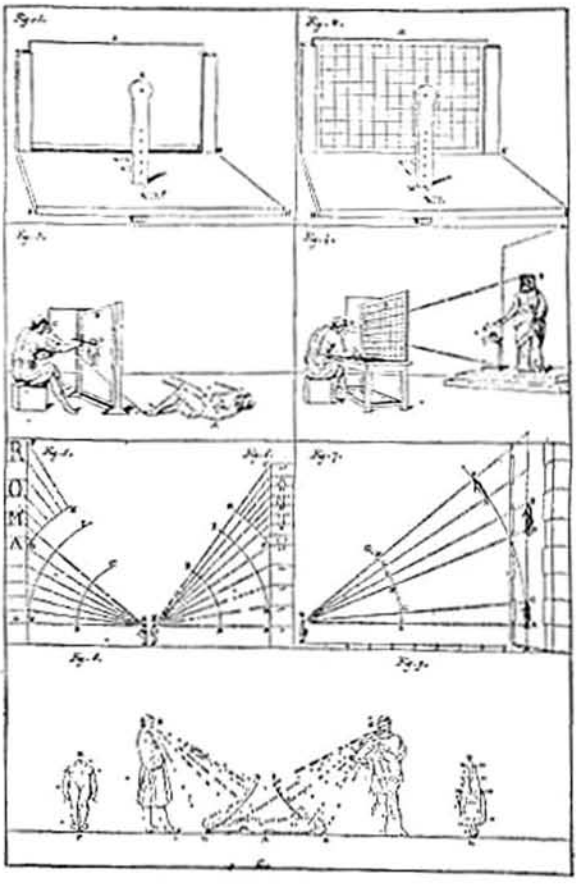


FIG. 21. Ilustraciones del libro *La prospettiva dimostrata con regole pratiche dall'architetto-prospettico ed incisore Giacomo Fontana*, Roma, 1851, en donde su autor, G. FONTANA, muestra la técnica de la perspectiva.

Recién publicado el trabajo de Hauck apenas tuvo repercusiones en el mundo cultural. Sin embargo, cincuenta años después constituyó un punto de partida importante, como ya hemos indicado, para el citado ensayo de Panosfky [20] sobre la perspectiva, en cuya concepción tuvieron también gran influencia las ideas de Cassirer contenidas en su obra *La Filosofía de las*

Formas Simbólicas (1923). En dicho ensayo se vuelve a poner sobre el tapete el debate entre la perspectiva natural y la artificial, y Panofsky lo hace radicalmente, considerando, en primer lugar, una "audaz abstracción" [21] las dos hipótesis fundamentales en las que se basa la perspectiva renacentista, es decir: 1.º) que miramos con un ojo inmóvil y 2.º) que la intersección plana de la pirámide visual deba considerarse como una reproducción adecuada de nuestra imagen visual. Ello lo justifica fundamentalmente (aparte de ciertas consideraciones respecto a la isotropía y homogeneidad del espacio) en que [22]: "... se prescinde de que vemos con dos ojos en constante movimiento y no con uno fijo, lo cual confiere al *campo visual* una forma esferoide...", y que "... en fin, pasa por alto un hecho importantísimo: el que en esta imagen retínica (prescindiendo totalmente de su *interpretación* psicológica y del hecho de la movilidad de la vista) estas formas son proyectadas no sobre una superficie plana, sino sobre una superficie cóncava..." Es evidente aquí la influencia del trabajo anterior de Hauck.

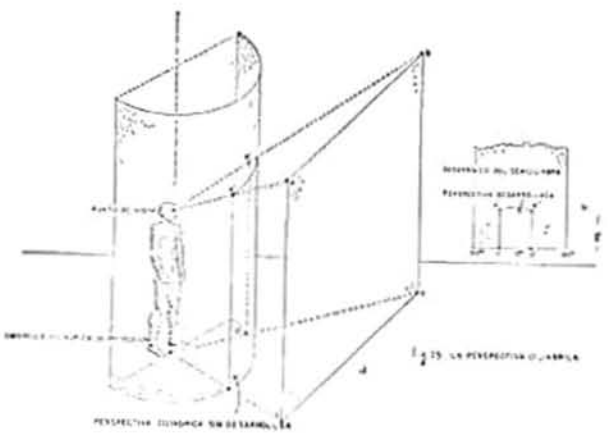


FIG. 23. LA PERSPECTIVA CILINDRICA.

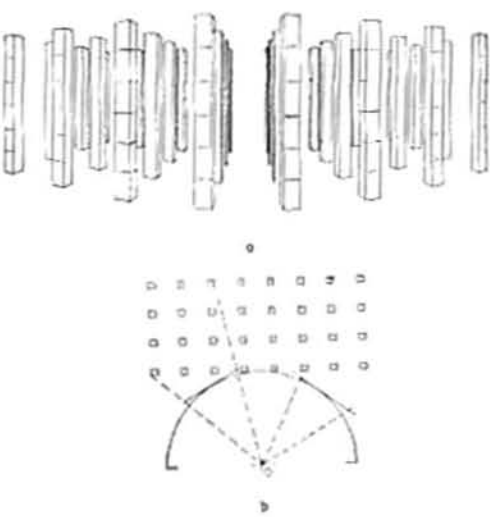


FIG. 24. *a)* Perspectiva curvilínea cilíndrica de un conjunto de pilares (Según HAUCK). *b)* Planta indicando la sección del cilindro, el punto de vista *O* y dos planos tangentes al cilindro que corresponden al prisma circunscrito que se utiliza en el desarrollo de la perspectiva sobre un plano.

En otro pasaje [23], después de presentar a las aberraciones marginales como aquello que distingue a la imagen perspectiva de la imagen retínica (que se pueden cuantificar por la diferencia existente entre la relación de los ángulos visuales y la relación de los segmentos obtenidos por la proyección sobre una superficie plana), propone una perspectiva curvilínea esférica sin concretar el método geométrico de proyección. A continuación hace una breve alusión crítica a la perspectiva curvilínea propuesta por Hauck, que se basa, como sabemos, en una proyección cilíndrica y no esférica como pretende Panofsky. Su argumentación es la siguiente: "Mientras la perspectiva plana proyecta las líneas rectas como tales líneas rectas, nuestro órgano visual las toma como curvas (considerándolas como curvas en sentido convexo desde el centro de la imagen); así, una cuadrícula (Fig. 25) [24] que objetivamente está formada por líneas rectas parece, al ser mirada de cerca, curvarse como un escudo, mientras que una cuadrícula objetivamente curva parece, por el contrario, plana y las líneas de fuga de un edificio, que en la construcción perspectiva se representan como rectas, deberían ser curvas, correspondiendo a la efectiva imagen retínica. Para ser precisos, incluso las verticales deberían sufrir una ligera curvatura (a diferencia de lo que ocurre en el dibujo de G. Hauck)" [25].

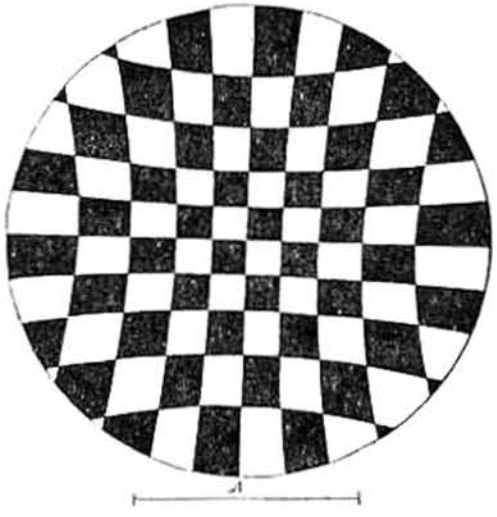


FIG. 25. Si se mira fijamente al centro de esta figura (mejor ampliada) con un solo ojo colocado a una distancia *A* se observa como se anula la curvatura de las líneas (HELMHOLTZ, *Op. cit.*).

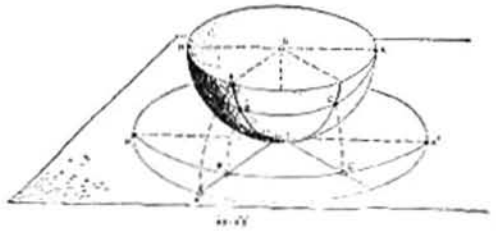


FIG. 26. TRANSFORMACION DE POSTEL.

Quisiéramos hacer aquí tres observaciones a propósito del texto de Panofsky: Primera, si bien las aberraciones ópticas existen en la perspectiva lineal y tienden a desaparecer al proyectarse sobre una superficie curva de revolución, sin embargo, las curvaturas que se introducen pueden llegar a ser muy exageradas, produciendo otra aberración gráfica en la imagen perspectiva que nosotros llamamos *aberración de curvatura,* la cual se puede apreciar fácilmente en los dibujos. Segundo, respecto al experimento de Helmholtz aludido en el texto de Panofsky, para demostrar las curvaturas subjetivas, hemos de decir que no es razón suficiente para justi-

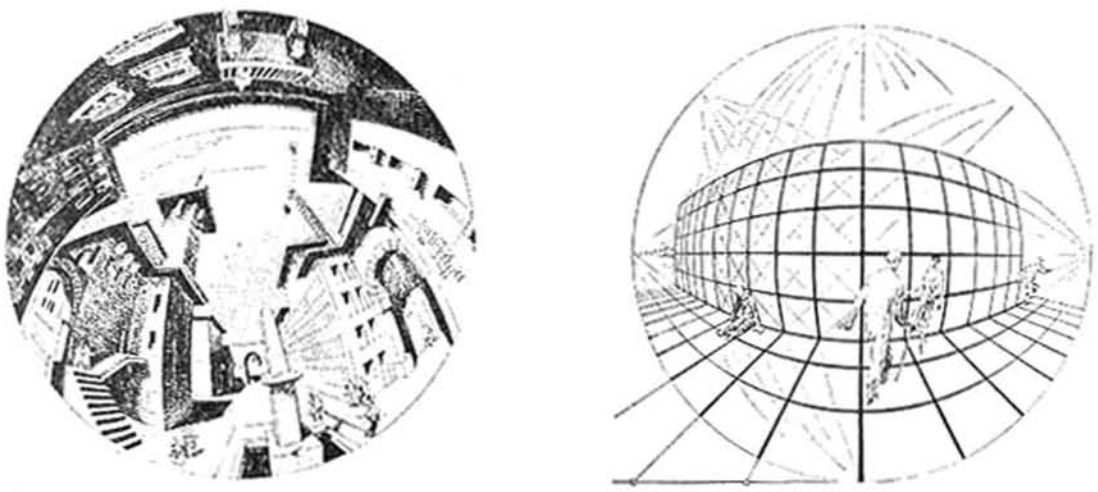


FIG. 27 *a* y *b*. Perspectivas curvilíneas mediante la transformación de Postel (BARRE y FLOCON, *Op. cit.* pp. 173 y 180).

ficar la perspectiva curvilínea, puesto que lo que realmente se está demostrando en dicho experimento es el efecto de distorsión en barrilete [26] (que compensa al efecto de distorsión en corsé de la figura) producido por el exceso de curvatura del cristalino. Tercero, la perspectiva curvilínea cilíndrica propuesta por Hauck puede ser, sin embargo, adecuada para representar edificios de poca altura.

Es de destacar, en el ensayo que estamos comentando, como su autor encuentra en la *Optica* de Euclides otra de sus argumentaciones básicas para la crítica hacia la perspectiva renacentista; aún más, incluso llega a

lanzar la atrevida tesis de que la Antigüedad clásica estaba habituada a una perspectiva que no era plana. A este respecto dice [27]: "Por eso una época cuya visión estaba condicionada por la representación del espacio, expresada mediante una rigurosa perspectiva plana, debía redescubrir la curvatura de nuestro, digamos, mundo visual esférico. Estas curvaturas no eran evidentes para una época habituada a ver perspectivamente, pero no según la perspectiva plana: la Antigüedad clásica. En las obras de los ópticos y teóricos de arte de la Antigüedad (incluyendo igualmente a los filósofos) nos encontramos continuamente con observaciones de este tipo: lo recto es visto como curvo y lo curvo como recto; las columnas para no parecer curvadas deben poseer su éntasis (sabemos que en el período clásico era relativamente débil); el epistilo y el estilobato deben ser construidos curvos si se quiere evitar que aparezcan flexados. Las famosas curvaturas de los templos dóricos, por ejemplo, manifiestan las consecuencias prácticas de estos conocimientos. La óptica de la Antigüedad, que había madurado estas nociones, era básicamente contraria a la perspectiva plana. El hecho de que la óptica de la Antigüedad conozca la modificación esférica de las cosas vistas, encuentra su fundamento, o por lo menos su correspondencia, en el hecho aún más importante de que la teoría clásica, respecto a las modificaciones de dimensión, se ajustaba más que la perspectiva del Renacimiento a la estructura efectiva, representándose la configuración del campo visual como una esfera".

Aquí conviene hacer una puntualización respecto a las curvaturas, por cuanto la imagen esférica *acentuaría* dichas curvaturas y no las eliminaría, como equivocadamente se supone [28], lo que comprenderemos después de ver la perspectiva curvilínea esférica.

Por otra parte, las dimensiones visuales en la imagen retínica están determinadas por el ángulo de visión y no por la distancia existente entre los objetos y el ojo (como antes apuntábamos, estos constituye una clara *analogía* con la astronomía de posición donde los astros son localizados en la esfera celeste según coordenadas angulares y sus tamaños aparentes según el cono visual que subtienden); la diferencia aparente entre dos dimensiones iguales vistas a distancias diferentes estaría determinada por la rela-

ción de los ángulos visuales correspondientes, según el octavo teorema de Euclides.

Posteriormente, el profesor de fisiología Pirenne [29] discrepa de Panofsky principalmente en dos aspectos: en primer lugar, la *Optica* de Euclides no está en total desacuerdo con la perspectiva renacentista. En segundo lugar, respecto a la imagen curvilínea producida en la retina, que para Panofsky y Hauck constituye un punto de partida básico para propugnar la perspectiva curvilínea, hace la siguiente e importante advertencia: "... la imagen retínica no es lo que vemos, lo que vemos es el mundo exterior". Lo cual no excluye la existencia de ciertas líneas curvas en algunas obras de arte debidas a curvaturas subjetivas que puedan tener su origen en la visión binocular próxima.

Llegados a este punto queremos hacer hincapié en una cuestión que nos parece fundamental, y que ya hemos apuntado antes, respecto a la polémica entre la óptica euclidiana y la perspectiva renacentista, y es que no son comparables al mismo nivel, pues mientras la segunda propone un *método de representación* claramente definido, la primera no pasa de ser un *conjunto de proposiciones* y reglas respecto a la visión natural, pero que no resuelve el paso siguiente que es la representación de dicha visión.

El historiador de arte Gombrich en su obra *Arte e Ilusión* [30], que constituye un estudio sobre psicología de la representación pictórica, parece ponerse implícitamente del lado de Pirenne al cuestionar la visión curva calificándola en cierto modo de irrealista [31]; en este sentido hace alusión a ciertas confusiones respecto a la perspectiva lineal que se han visto reforzadas por frases poco afortunadas (y quizá influidas por el cubismo) como aquella de Herbert Read (que recoge Gombrich [32]) que dicen: "No siempre nos damos cuenta de que la teoría de la perspectiva desarrollada en el siglo XIV es una convención científica; es meramente una de las maneras de describir el espacio, y no tiene validez absoluta".

Si bien otros autores como F. Hohenberg [33] (1956) y D. Gioseffi [34] (1963) han tratado el tema de la perspectiva curvilínea, son A. Flocon y R. Taton, con la publicación de su libro *La Perspective* [35], quienes abogan entusiasta y decididamente por una perspectiva curvilínea esférica como

alternativa a la perspectiva lineal, que ellos denominan clásica. Según Flocon y Taton los inconvenientes de la perspectiva clásica (deformaciones laterales, conservación del paralelismo en rectas paralelas al plano del cuadro, campo de visión reducida y punto de vista fijo y obligatorio) podrían ser superados mediante una perspectiva curvilínea de campo visual completo que represente sobre el plano del cuadro la imagen hemiesférica de la visión.

Posteriormente A. Barre y A. Flocon publican *La perspective curviligne* [36], donde exponen más ampliamente su propuesta, que se concreta en una perspectiva curvilínea basada en la *transformación de Postel* (Fig. 26). Esta transformación, que no es precisamente una proyección geométrica, se basa en última instancia en la rectificación de la circunferencia. Recordemos que este problema, conocido como la cuadratura del círculo, trajo de cabeza a los geómetras griegos de la Antigüedad que se propusieron resolverlo, inútilmente, con regla y compás. Ahora bien, este procedimiento equivale a construir un segmento de medida igual al número π dado el segmento unidad, cosa que es imposible como demostró Lindemann [37] en 1882.

Por tanto la transformación de Postel no es un procedimiento exacto y, en nuestra opinión, tampoco elegante por no ser puramente geométrico. Sin embargo los propugnadores de este tipo de perspectiva curvilínea quitan importancia a la imposibilidad de trazar arcos trascendentes, ya que el error puede ser despreciable y además en dicha perspectiva (que más bien es un ábaco) las divisiones que se realicen sobre la superficie esférica son equivalentes a las realizadas en el plano, es decir, al dividir el arco de circunferencia en partes iguales se trasladan al plano manteniendo la igualdad entre segmentos.

Ahora creemos que ha llegado el momento de recordar algunos aspectos elementales sobre el funcionamiento del ojo humano que es el protagonista de fondo en nuestra exposición.

El ojo funciona [38], en primera aproximación, como una cámara oscura dotada de un diafragma *(iris)*, una lente variable *(cristalino)* y una pantalla curva *(retina)* donde se proyecta la imagen visual (Fig. 28). Su forma es aproximadamente esférica con un diámetro de unos 25 mm., si bien en la parte frontal, donde se sitúa la córnea, tiene una curvatura mayor. En un corte transversal y de fuera hacia dentro, el sistema óptico del ojo está constituido por la córnea transparente, el humor acuoso, el cristalino y el humor vítreo, separados por superficies de revolución del mismo eje. El cristalino varía de forma y se comporta como una lente elástica debido a la acción del músculo ciliar. Al ser una lente de curvatura variable permite la acomodación, es decir, enfocar un objeto con nitidez a cualquier distancia comprendida entre el infinito y unos 15 cms. delante del ojo. Cuando el músculo ciliar no está contraido el cristalino enfoca al infinito formando la imagen sobre la retina *(ojo emétrope)*. Cuando, por el contrario, se quiere enfocar a poca distancia se contrae adquiriendo una forma más esférica. Los extremos del intervalo dentro del cual es posible la visión distinta se denominan *punto remoto* y *punto próximo*. El primero en un ojo normal está en el infinito. El segundo entre 20 y 15 cms., aunque hay que tener en cuenta que se aleja mucho con la edad *(presbicia)*.

Los índices de refracción [39] del humor acuoso y del humor vítreo son iguales y próximos al del agua: 1,336. El cristalino, que está formado por diversas capas cuyo índice de refracción aumenta de la periferia al centro (reduciendo así las aberraciones de esfericidad), tiene un índice medio de 1,437, que difiere poco de los anteriores, y por tanto la mayor parte de la refracción de la luz se produce en la córnea.

Delante del cristalino se encuentra un diafragma, el iris, cuya abertura, denominada *pupila*, varía entre 2 y 8 mm. de diámetro. Su función consiste en regular la cantidad de luz que penetra en el ojo, así, si el nivel de brillo del campo de visión es alto, se contrae, y si es bajo, se dilata. El ojo se puede adaptar a variaciones de brillo comprendidas entre 1 y 100.000. En dicha adaptación colabora también el mecanismo receptor de la retina.

La superficie interna del ojo, donde se proyecta la imagen visual, es la retina, que tiene forma esférica y que en realidad es una expansión del nervio óptico, el cual a su vez es una prolongación del cerebro. Está cons-

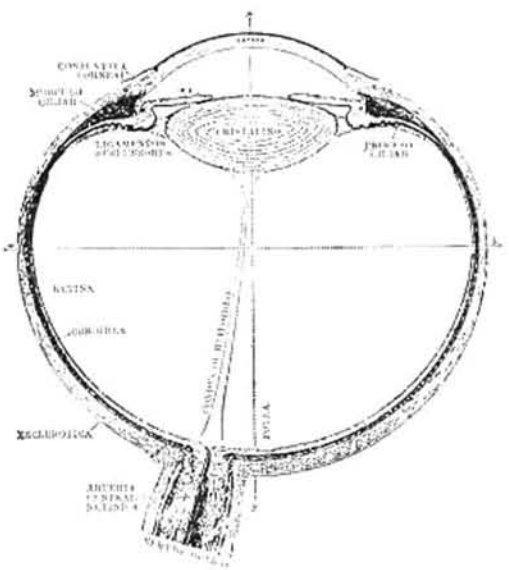


FIG. 28. Sección horizontal del ojo humano (SCHÄFER, *Quain's Anatomy*, III, 3, London, 1894; reproducido en PIRENNE, *Op. cit.*, p. 51).

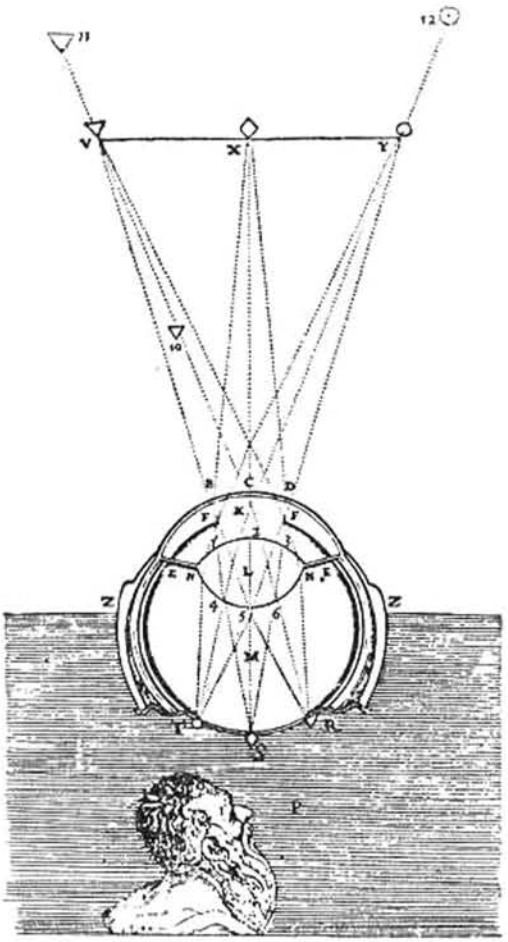


FIG. 29. La imagen retínica en el ojo según el experimento de Descartes en el ojo de un buey (DESCARTES, *La Dioptique*, Leyden, 1637).

tituida por los *conos* y *bastoncitos,* elementos histológicos de forma cónica y cilíndrica respectivamente, así como de un líquido azulado que se encuentra entre ellos, llamado *púrpura visual.* La luz, al alcanzar la retina, genera en sus células visuales reacciones fotoquímicas que son causa, a su vez, de impulsos eléctricos que se transmiten por el nervio óptico hasta la zona de la corteza cerebral especializada en la visión. Así en el cerebro se elabora la otra "imagen", la que realmente "vemos". Esta imagen es denominada

por Kepler imagen *rerum*, en contraposición a la imagen *picturae*, formada en la retina y que es susceptible de estudio óptico y geométrico. Como muy bien dice U. Neisser [40] (coincidiendo con Pirenne): "... el hecho es que *no vemos* la imagen retiniana, *se ve* con la ayuda de la imagen retiniana". Debido a esa segunda elaboración de la imagen rerum se puede comprender fácilmente como las experiencias, visuales y no visuales (táctiles, etc.), anteriores, así como los condicionamientos culturales, pueden influir en su constitución definitiva.

La imagen *picturae* fue observada por Descartes utilizando el ojo de un buey (Fig. 29). Para ello raspó la parte posterior del globo ocular con el fin de hacerla transparente y llevó a cabo un experimento que consistió en colocar el ojo en un agujero practicado en la contraventana de una habitación, pudiendo observar por detrás la imagen invertida. Posteriormente se han realizado experimentos análogos con ojos de conejos albinos para observar a través de la pared del globo ocular la geometría de las imágenes retínicas procedentes de conjuntos de lámparas que configuraban líneas paralelas. Las imágenes retínicas obtenidas, naturalmente, concuerdan con las que resultan en las perspectivas curvilíneas de tipo esférico.

En el lugar por donde el nervio óptico penetra en el ojo no existen conos ni bastones y, por lo tanto, tampoco existe la visión, es el *punto ciego*. Por el contrario, hay otra zona en la retina (de unos 2 mm. de diámetro) llamada mancha amarilla, pero sobre todo en su parte central, donde existe una pequeña cavidad, llamada *fovea centralis* (de unos 0,25 mm. de diámetro), que contiene sólo conos, en donde la visión es mucho más nítida y aguda. Por ello el movimiento de giro del ojo dentro de la fosa orbitaria tratará de situar la imagen que estamos enfocando en ese momento sobre la fovea. Esta impone, por tanto, una importante restricción al tamaño del campo visual, pues, si en principio podría ser el correspondiente a un cono de vértice el centro de la pupila y con una abertura de unos 150° en sentido horizontal y 120° en sentido vertical, se reduce a 2° para asegurar una visión nítida. Ello es la causa de la gran movilidad del ojo que en realidad efectúa un verdadero "barrido" del objeto, existiendo una cierta analogía con el que se realiza en una pantalla de televisión, basado en la persistencia de

la imagen. En efecto, el ojo se "pasea" por el objeto a gran velocidad permitiendo la vista casi simultánea y con nitidez de todo lo comprendido dentro del contorno aparente del objeto. El ojo está en constante movimiento, en su mayor parte en forma inconsciente, incluso cuando se supone fijo el punto a observar; debido a ello la visión monocular no es una simple proyección central sobre la retina, sino una *superposición de innumerables proyecciones retínicas.* En esta posición fija pero de ojo móvil, el cono visual, con visión bastante nítida, aumentaría virtualmente de 2° a valores comprendidos entre 30 y 40°. Estas aberturas del ángulo cónico son las que se emplean con más frecuencia en la práctica de la perspectiva lineal.

Se puede decir, por tanto, que la imagen *rerum* se "construye" con el material informativo que proporciona la *pluralidad de imágenes picturae.* Por otra parte, la restricción del cono visual *instantáneo* a 2° reduce las aberraciones del campo que se puedan producir en el ojo.

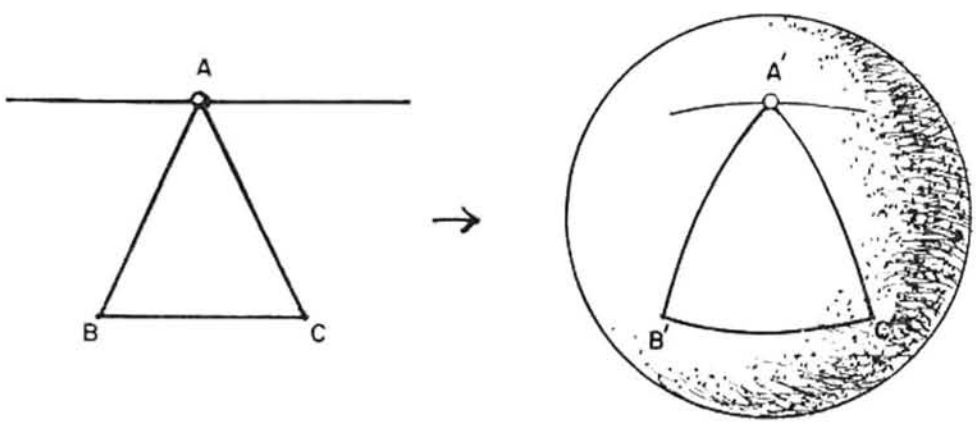


FIG. 30. Modelo de geometría no-euclídea de Riemann donde el plano se convierte en la superficie de una esfera, los puntos del plano se convierten en puntos de la superficie esférica y las líneas rectas son círculos máximos.

La perspectiva curvilínea esférica tendría, en parte, su justificación en lo antes expuesto, es decir, en el hecho de dar una imagen simultánea y sintética correspondiente a una pluralidad de conos visuales que en su conjunto quedan comprendidos dentro de un ángulo (mayor de 30°) e igual o menor a 180°, cumpliéndose, además, el cuarto postulado de la *Optica* de Euclides. Esta perspectiva curvilínea daría una imagen curva del espacio

correspondiente a una *geometría no euclídea* de Riemann [41], donde los puntos del plano del cuadro se convierten en puntos de la superficie esférica y las líneas rectas en círculos máximos. Por tanto, dos rectas paralelas son dos segmentos de círculos máximos que no cumplen el postulado de las paralelas (Fig. 30).

Veamos a continuación dos sistemas de perspectiva curvilínea esférica de construcción netamente geométrica.

Perspectiva curvilínea esférica con el segundo vértice de proyección a distancia infinita

Tanto para reducir las deformaciones marginales como para dar una imagen visual esférica que *sintetice* las numerosas perspectivas que el ojo pueda obtener desde distintas posiciones de giro dentro de la fosa orbitaria, se puede proponer una perspectiva curvilínea consistente en un *sistema de doble proyección:* en primer lugar se proyecta el objeto sobre una superficie esférica y después esta imagen se proyecta en un plano. Así, pues, se considera una semiesfera (Fig. 31), situada delante del plano de desvanecimiento, en principio de radio cualquiera y cuyo centro coincide con el punto principal. Además se considera como plano del cuadro el propio plano de desvanecimiento. En otras palabras, realizamos la proyección de todos los elementos del espacio situados delante del plano del cuadro desde el punto principal P o punto de vista sobre la superficie esférica, obteniendo una primera imagen curva. Esta imagen es precisamente la que corresponde a la esfera virtual antes citada, pero como no podemos manejar dicha superficie como plano del cuadro, realizamos una segunda proyección, en este caso cilíndrica ortogonal, de dicha imagen esférica sobre el plano del cuadro definitivo.

De esta forma tenemos definido este nuevo sistema de representación, mediante los siguientes elementos: el punto principal P o de vista, que a su vez es el centro de la esfera y centro o vértice de la primera proyección; la semiesfera como superficie de representación o primer "plano" del cua-

dro (determinada por su traza t_e); el segundo plano del cuadro π, que es el definitivo, y por último el segundo centro de proyección, que es el punto impropio $V\infty$, que establece la dirección perpendicular al segundo plano del cuadro donde se representa la proyección definitiva.

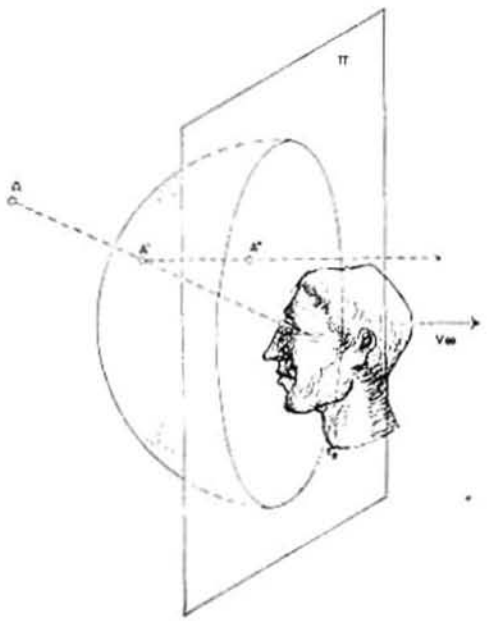


FIG. 31

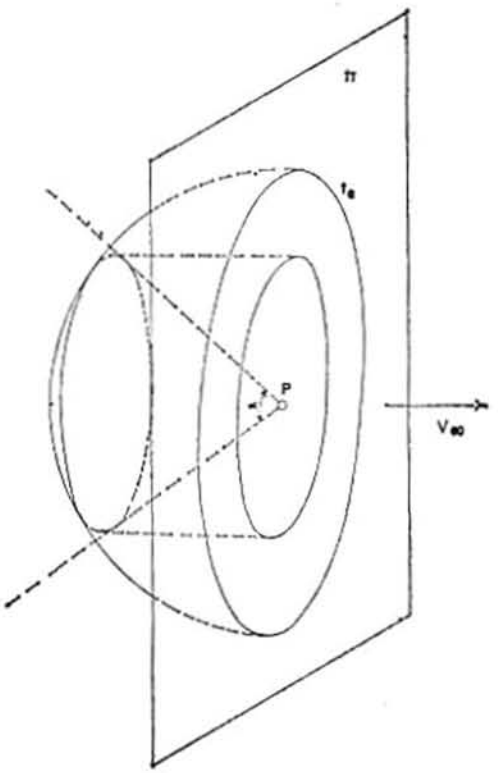


FIG. 32

En este sistema, si queremos reducir el campo visual, podemos establecer un ángulo cónico determinado α inferior a 180° (Fig. 32), determinándose mediante la intersección del cono de visión correspondiente con la semiesfera; de esta forma se establece el casquete esférico, dentro del cual se realiza la primera proyección desde *P*. La segunda proyección desde $V\infty$ quedaría por tanto limitada dentro del círculo de proyección de dicho casquete esférico concéntrico con la traza de la esfera [42].

Al objeto de poder representar cualquier forma espacial dentro de este sistema, será necesario, en primer lugar, saber representar los elementos geométricos fundamentales que componen cualquier figura, a saber: los

puntos, las rectas y los planos. En este trabajo, y para evitar extendernos excesivamente, consideramos suficiente tratar solamente la representación de rectas y puntos.

Representación de la recta

Supongamos que una recta r cuya traza con el plano del cuadro π es ^{T}r. Si proyectamos esta recta desde P (Fig. 33), el plano proyectante que se genera corta la semiesfera según una circunferencia correspondiente a un círculo máximo. Esta circunferencia es la primera imagen r', la cual se proyecta a continuación desde $V\infty$ obteniendo su segunda imagen r''. Como esta última imagen es la proyección cilíndrica de una circunferencia sobre un plano será una elipse, y solamente en el caso de que el plano proyectante generado sea perpendicular al cuadro, la segunda proyección de la recta será también una recta que pase por P. Para determinar esta recta se procederá igual que en el sistema central de representación [43], utilizando, además de su traza, el punto límite $^{L''}r$, que es la segunda proyección del punto de infinito de la recta.

Así, pues, la imagen de la recta será un arco de elipse comprendido entre $^{T'}r$, proyección de la traza ^{T}r, y $^{L''}r$, ya que representamos solamente la semirrecta situada delante del plano del cuadro (Fig. 34). En estos arcos de elipse el eje mayor coincide con el diámetro de la esfera, siendo el eje menor variable. Para su trazado se puede utilizar la construcción por afinidad, al existir esta relación geométrica entre dichas elipses y el círculo traza de la esfera (Fig. 35). La afinidad es ortogonal, siendo su eje coincidente con el diámetro del círculo traza de la esfera que pasa por $^{T'}r$.

Representación del punto

Al igual que en el sistema central [44], un punto no queda determinado por su imagen A'', sino que hay que dar otro elemento geométrico al que

pertenezca, como es la recta, ya que en nuestro caso no vamos a utilizar por ahora el plano. Así, pues, la posición de un punto quedará determinada mediante la intersección del rayo proyectante del punto desde P con la recta r a que pertenece, reflejándose esto en las imágenes correspondientes Fig. 36).

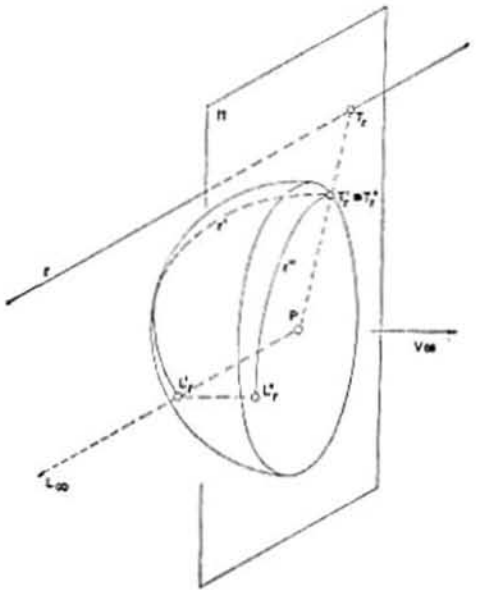


FIG. 33

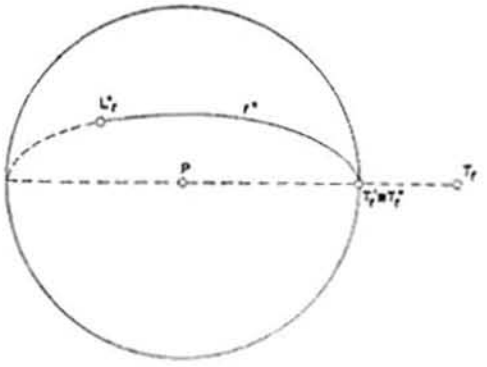


FIG. 34

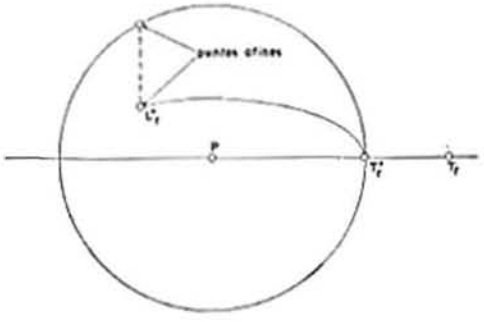


FIG. 35

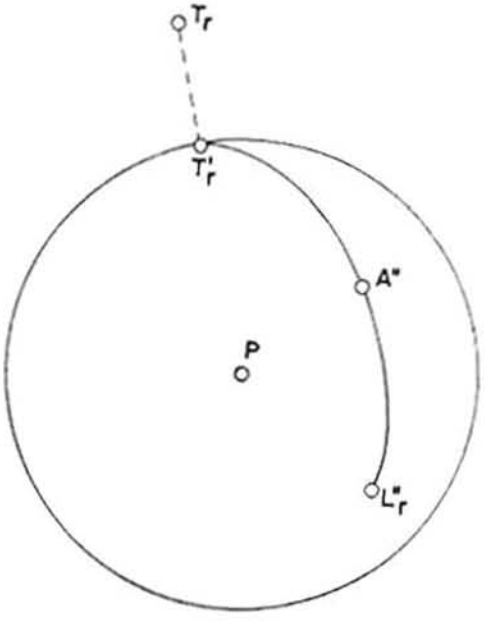


FIG. 36

Crítica a la perspectiva curvilínea con el segundo vértice de proyección a distancia infinita

La utilización de un vértice impropio como segundo centro de proyección sobre el plano del cuadro π da lugar, como acabamos de ver, a representar rectas del espacio visual según arcos de elipse. Si bien la construcción de estos arcos se puede realizar mediante la conocida afinidad ortogonal que se establece entre dichas elipses y el círculo traza de la esfera, no deja, sin embargo, de complicar notablemente las construcciones geométricas. Esto nos obliga a buscar una mayor simplificación de las mismas sin modificar sensiblemente las imágenes. Para ello existe una proyección

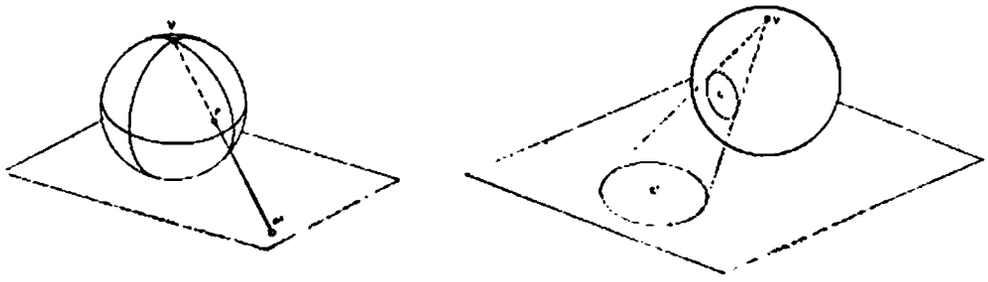


Fig. 37. PROYECCION ESTEREOGRAFICA

con el segundo vértice a distancia finita que nos puede resolver el problema y es la *proyección estereográfica de la superficie esférica*[45] (Fig. 37). En efecto, en esta proyección las circunferencias situadas sobre la superficie esférica siempre se proyectan como circunferencias o rectas, lo cual facilita enormemente las construcciones gráficas.

Aparte del problema de la construcción de los arcos de elipse, en esta perspectiva curvilínea las representaciones gráficas tienen una excesiva curvatura (como ocurre en todas las representaciones esféricas), si bien hemos eliminado el problema de las distorsiones marginales.

Perspectiva curvilínea esférica con el segundo vértice de proyección a distancia finita (aplicación de la proyección estereográfica)

La proyección estereográfica de una superficie esférica sobre un plano consiste en la proyección de todos los puntos de dicha superficie desde uno de ellos, V, sobre un plano π perpendicular al diámetro que pasa por V [46].

Como en la proyección estereográfica el plano del cuadro es paralelo al plano tangente a la esfera en el centro de proyección, tendremos que en la primera proyección de la perspectiva curvilínea el vértice, O, coincide con el centro de la esfera, y en la segunda proyección el vértice, V, es un punto de la esfera situado en la perpendicular al plano del cuadro. La proyección estereográfica tiene las siguientes propiedades [47]: 1.ª) Se conservan los ángulos de líneas homólogas. Es decir, si dos líneas que están en la superficie esférica se cortan en un punto de ésta, P, al proyectarlas estereográficamente sus imágenes se cortarán en P' bajo ese mismo ángulo. 2.ª) Las circunferencias pertenecientes a la superficie esférica al proyectarse sobre el plano del cuadro se representan también como circunferencias. Si las circunferencias situadas sobre la esfera pasan por el centro de proyección, se representan como rectas.

La conservación de los ángulos, en esta proyección, proporciona una cierta semejanza entre la figura situada en la esfera y su proyección en el cuadro en zonas reducidas donde no influye mucho la variación de su distancia al centro; por ello se utiliza mucho en cartografía. Esto puede suponer una ventaja, desde el punto de vista de la representación en perspectiva, cuando se utiliza un ángulo cónico reducido.

Como el plano del cuadro que escogemos para la segunda proyección es el que pasa por el centro de la esfera, la cortará según un círculo máximo que coincide con el círculo de distancia en proyección cónica.

Utilizando este sistema para la segunda proyección se simplifica la construcción de las imágenes de las rectas del espacio ya que se convierten en arcos de circunferencia de muy sencillo trazado. Para ello se utilizarán

circunferencias que pasen por tres puntos conocidos. Dos de estos puntos corresponderían a los extremos de un diámetro, donde se situarán los puntos límites; el tercer punto se podrá construir utilizando el abatimiento de un plano proyectante [48].

Representación de rectas en perspectiva curvilínea estereográfica

A continuación vamos a ilustrar la representación de algunas rectas más utilizadas en arquitectura en este sistema de representación:

a) *Recta del plano geometral perpendicular a la línea de tierra:* Sea la recta *a;* para su primera proyección sobre la superficie esférica se utiliza el plano proyectante Φ determinado por O y a, obteniéndose a' que pasa $L'a$ y A'. Su segunda proyección desde V será a'' *determinada por* A' y $L''a$ (Fig. 38).

En la figura siguiente (Fig. 39) se ha trazado un conjunto de rectas paralelas perpendiculares a la línea de tierra y contenidas en el geometral.

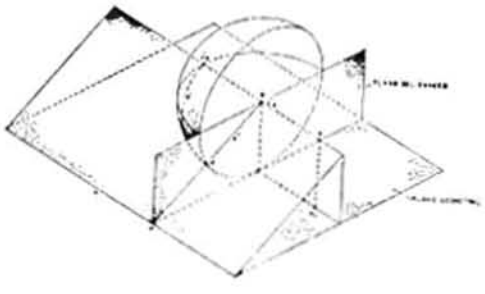


Fig. 38. PERSPECTIVA DEL PLANO GEOMETRAL PERPENDICULAR A LA L. T. (Perspectiva libre).

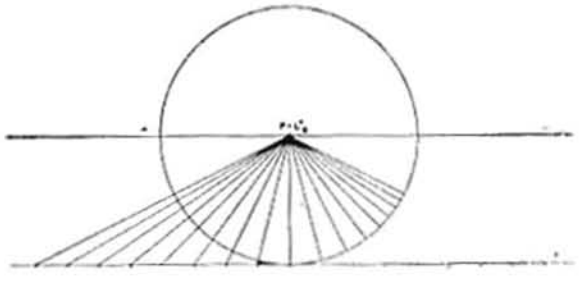


Fig. 39. RECTA DEL PLANO GEOMETRAL PERPENDICULAR A LA L. T. (Representación curvilínea).

b) *Recta del plano geometral paralela a la línea de tierra:* Sea la recta b (Fig. 40); su primera proyección, desde O sobre la superficie esférica, se obtiene en forma análoga al caso anterior, utilizando un plano pro-

yectante λ que la contiene, obteniéndose dos puntos límites: $^{L'}b$. Como es necesario un tercer punto para determinar el arco de circunferencia trazamos otro plano proyectante θ perpendicular a la línea de tierra que determina A (en perspectiva estereográfica el ángulo de dos planos proyectantes aparece en verdadera magnitud), el cual se proyecta en A' desde O en la superficie esférica y en A'' en el plano del cuadro. En la figura 41 se muestra la construcción sobre el plano del cuadro. Para lo cual, apoyán-

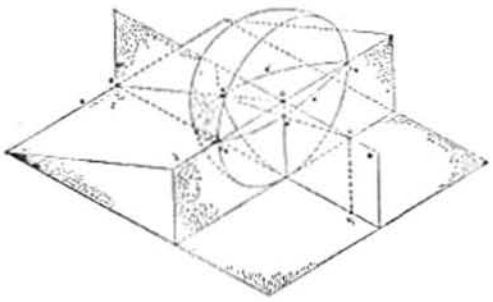


FIG. 40. RECTA DEL PLANO GEOMETRAL PARALELA A LA L. T. (Perspectiva libre).

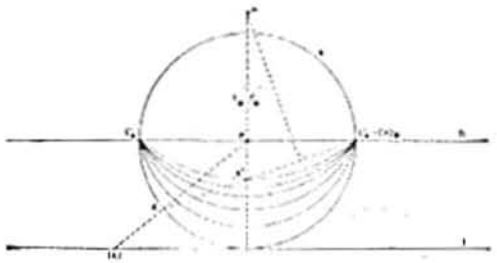


FIG. 41. RECTA DEL PLANO GEOMETRAL PARALELA A LA L. T. (Representación curvilínea).

donos en el abatimiento auxiliar sobre dicho plano, se proyecta *(A)* desde *P*, obteniéndose A', la cual se proyecta estereográficamente desde *(V)*, obteniéndose A''. Con los dos puntos límites $^{L'}b$ y A'' trazamos el arco de circunferencia que representa la recta *b* en el plano del cuadro. Se han dibujado análogamente una serie de rectas paralelas a la *b*.

c) *Recta perpendicular al plano geometral:* Sea la recta *c;* en la figura 42 los puntos $^{L'}c$ son los puntos límites que se hallarán trazando por *O* la paralela a *c*. Como es necesario conocer la representación de un tercer punto para trazar el arco de circunferencia, hacemos uso del plano proyectante de la recta. Se procedería como en el caso anterior, mediante un abatimiento auxiliar sobre el plano del cuadro obtendríamos A' proyectando desde *O* y, posteriormente, A'' proyectando desde *(V)*. En la figu-

ra 43 se ha dibujado la recta vertical en representación curvilínea. En la figura 45 se muestra la perspectiva curvilínea estereográfica de un pilar; la situación espacial se describe en la figura 44 en perspectiva libre. La figura 46 muestra dos perspectivas, una lineal y otra curvilínea, de una misma columnata. Partiendo de una perspectiva lineal se puede pasar a una curvilínea estereográfica trasladando los datos desde una malla lineal a otra curvilínea [49]. Así se ha realizado la figura 47.

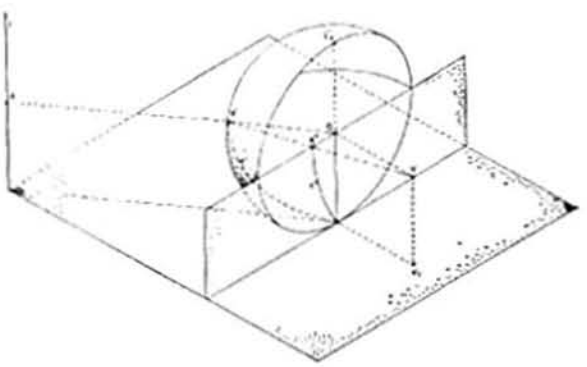


FIG. 42. RECTA PERPENDICULAR AL PLANO GEOMETRAL (Perspectiva libre).

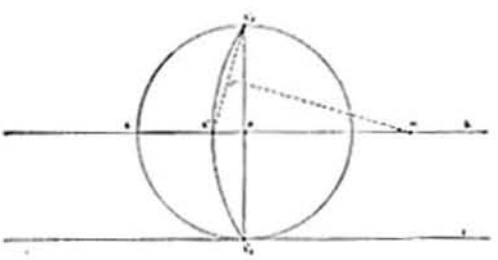


FIG. 43. RECTA PERPENDICULAR AL PLANO GEOMETRAL (Representación curvilínea).

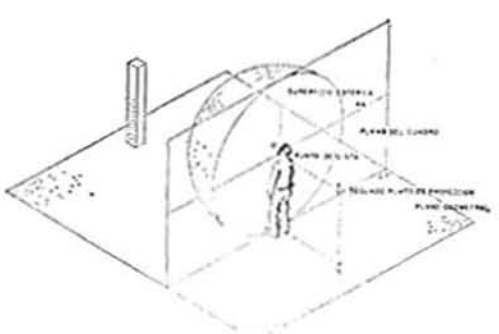


FIG. 44. Situación especial en perspectiva libre.

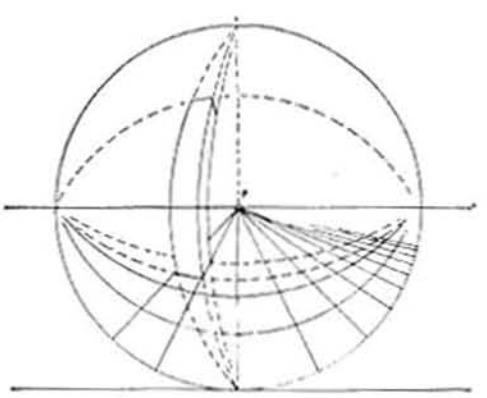


FIG. 45. Perspectiva curvilínea estereográfica de un pilar.

Crítica de la perspectiva curvilínea estereográfica

Si bien con la perspectiva curvilínea hemos superado los problemas debidos a las aberraciones o distorsiones marginales que aparecían en la perspectiva lineal, sin embargo, es evidente que nos aparece otra *deformación*, en este caso debido a la mayor o menor curvatura que tengan los arcos de circunferencia en la imagen gráfica (Fig. 46), lo que nosotros denominamos *aberración por curvatura.*

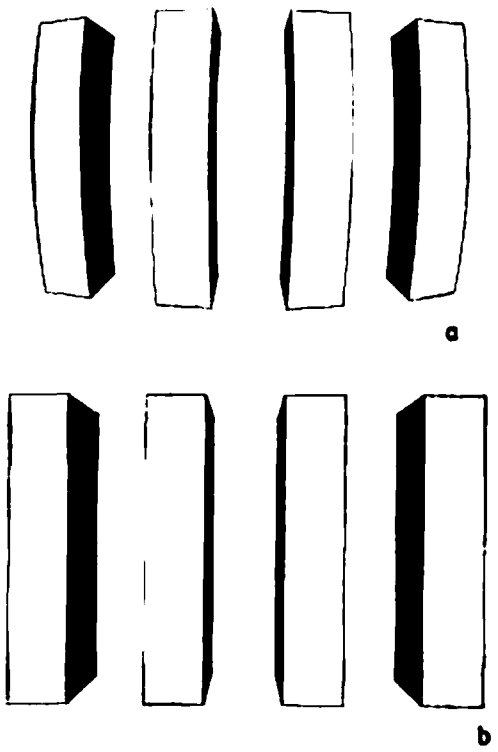


Fig. 46. *a)* Perspectiva curvilínea estereográfica de una columnata. *b)* Perspectiva lineal de la misma columnata.

Esta imagen gráfica, en perspectiva curvilínea, con su acentuada curvatura no concuerda con la imagen visual del espectador. Las rectas que se representan por arcos de circunferencia tendrán mayor o menor curvatura según que la *semiesfera virtual de visión* sea mayor o menor. En efecto, si

utilizamos una semiesfera reducida de radio, R, la imagen estereográfica nos dará arcos de circunferencia que tendrán una curvatura mayor que si la esfera correspondiente fuese de radio R' mayor, es decir:

$$\frac{1}{R} > \frac{1}{R'}$$

Las imágenes obtenidas en dos esferas de distinto radio y concéntricas son homotéticas, con centro en O (primer vértice de proyección). Por otra parte, una vez escogido el tamaño de la esfera de representación las imágenes también serán afectadas por la escala del dibujo, ya que será necesaria la reducción para acomodar la perspectiva al tamaño del papel.

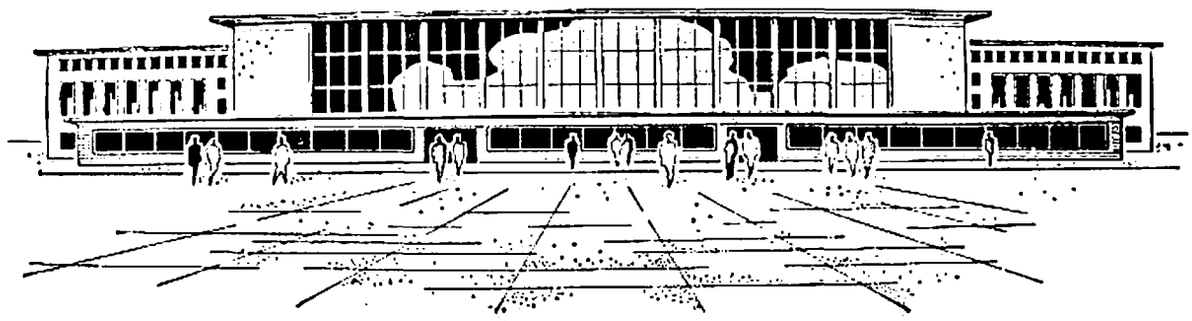


FIG. 47. Perspectiva estereográfica de la estación de Viena (HOHENBERG, *Op. cit.*, p. 151).

Estos dos factores, *tamaño de la esfera* y *escala del dibujo*, afectan a la curvatura con que vemos las imágenes en este sistema de representación. Este tipo de perspectiva, si bien tiene ventajas respecto a la perspectiva lineal o clásica al eliminar las aberraciones marginales cuando nos salimos del cono visual permitido, exige, sin embargo, obviar el problema de la *deformación por curvatura*, lo cual requiere imágenes a *tamaño real*, cosa que no ocurría con la perspectiva lineal [50].

En el paso de la imagen retiniana a la imagen visual (cerebral), al parecer, se produce una reducción de la curvatura de la imagen retiniana en el cerebro, que equivale a un aumento del radio de la esfera virtual de proyección.

En otro orden de cosas, el concepto de curvatura nos permitirá agrupar la proyección cilíndrica (proyección con centro impropio) y la curvilínea estereográfica de tal forma que se puede decir que *la proyección cilíndrica es un caso particular de perspectiva curvilínea,* en la que la curvatura es nula, es decir, el resto de la perspectivas curvilíneas corresponderán a una curvatura finita. En efecto, en la figura 48 se muestra cómo, al disminuir la curvatura, la superficie esférica σ tiende a confundirse con el plano del cuadro π, mientras V tiende al punto $V\infty$ del infinito, en cuyo caso la perspectiva curvilínea se confunde con una proyección cilíndrica ortogonal.

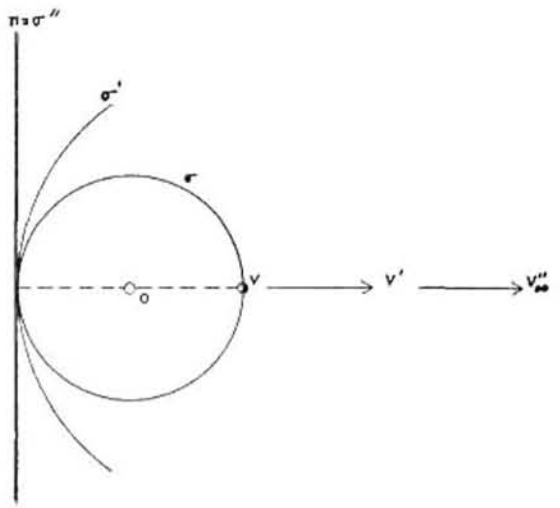


FIG. 48

NOTA SOBRE LAS CURVATURAS EN LOS TEMPLOS GRIEGOS

Vamos a tratar aquí, brevemente, un asunto estudiado desde mediados del siglo pasado por los investigadores de la arquitectura griega, como es el de las curvaturas de los estilobatos y entablamentos de los templos griegos. En nuestra opinión, el problema de las curvaturas aún no ha sido suficientemente aclarado y por lo tanto se puede considerar todavía como un

problema abierto. Sin embargo, como veremos, tiene cierta relación con la óptica y la perspectiva curvilínea.

FIG. 49. El Partenón.

Si miramos de frente una fachada preponderantemente larga, compuesta por líneas horizontales y verticales, parece como si las rectas horizontales a izquierda y derecha se curvaran acercándose a la línea de horizonte, siendo convexas o cóncavas dichas curvas según su posición, superior o inferior respectivamente en relación a dicha línea de referencia. Por otra parte, las rectas verticales, en forma análoga, parecen juntarse en los extremos de la recta vertical que pasa por el punto principal. Estas curvaturas subjetivas se producen con visión binocular cercana y al abarcar un campo visual amplio. Ello concuerda con el modelo de perspectiva curvilínea antes expuesto basado en la esfericidad de la visión y que en cierto modo propugnaba la óptica de la Antigüedad. Así, al objeto de reflejar en la imagen perspectiva estas curvaturas, se puede pensar en utilizar la perspectiva curvilínea.

Remontándonos al origen del problema, parece ser que un breve pasaje del tratado vitruviano [51], donde alude al trazado de la curvatura del estilobato mediante un procedimiento llamado de los "scamillos impares" [52] (mal

interpretado por todos los tratadistas de Vitruvio hasta Aurés), constituyó una de las pistas para comprobar la existencia de las curvaturas en el estilobato y el entablamento del Partenón y posteriormente en otros templos griegos (Fig. 50).

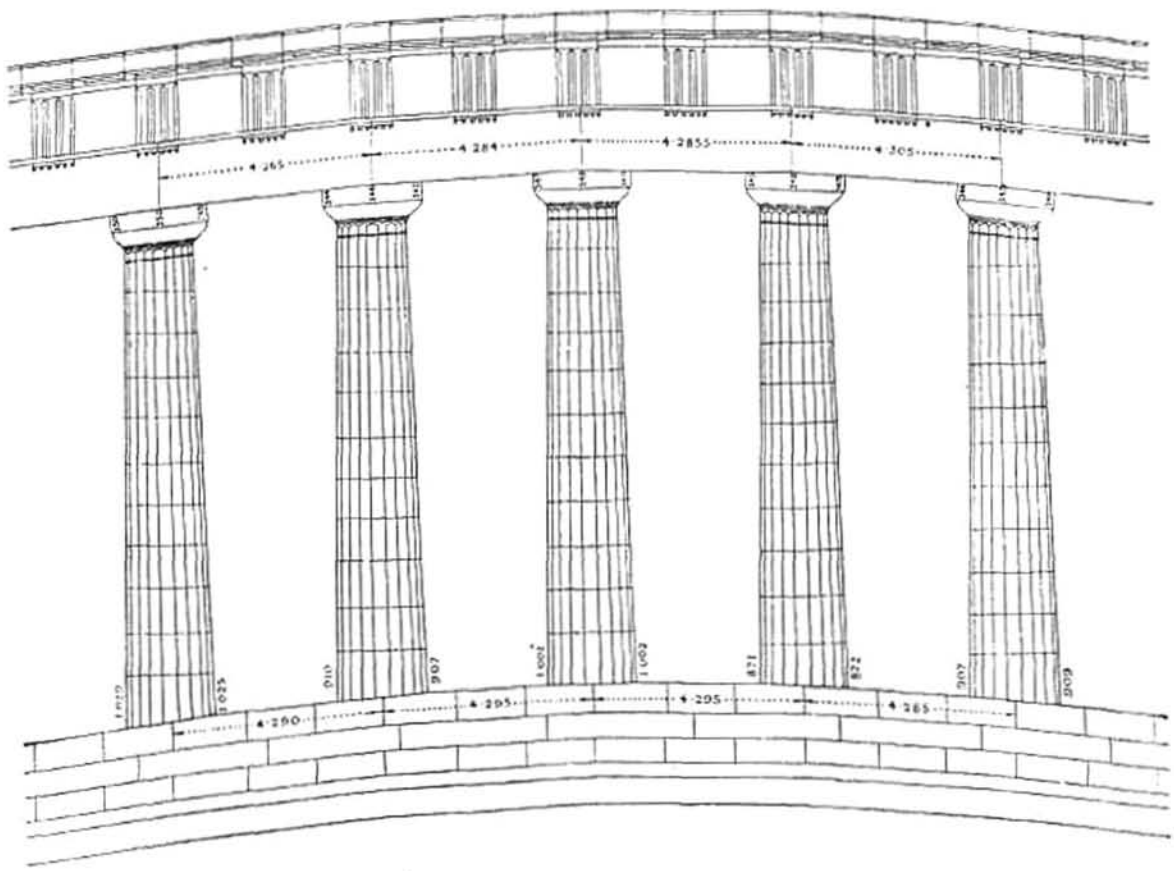


FIG. 50. Dibujo de BALANOS, *Op. cit.*, indicando las curvaturas.

En efecto, Penrose midió en 1846 la flecha en el centro de la curvatura (convexa hacia arriba) que tenía un valor de 0,065 m. en las fachadas este y oeste y de 0,123 m. en las fachadas laterales [53]. Posteriormente, Balanos [54] perfeccionó estas medidas, que eran: 0,065 m. y 0,119 m., respectivamente (Fig. 51).

La pregunta era inmediata: ¿cuál es la causa de dichas curvaturas? Vitruvio fue quizá uno de los primeros que escribió sobre esta cuestión justificando la curvatura convexa del estilobato para compensar el efecto

visual de concavidad que se produciría si se trazase a nivel [55]. En su tratado da la explicación general a las modificaciones o correcciones que se introducen en el diseño arquitectónico clásico: "La vista busca siempre la belleza; y si no la vamos halagando con la proporción y aumento de dimensiones para suplir con prudencia el engaño que padecen, daremos un aspecto feo y desproporcionado" [56]. Entiéndase aquí "el aumento de dimensiones" (en otras traducciones se utiliza la expresión "adiciones") al conjunto de modificaciones (curvaturas, inclinaciones, aumento de espesores) para corregir unas ilusiones ópticas. La explicación vitruviana constituye, pues, un punto de arranque básico para las explicaciones que vendrían mucho después, empezando por las de Penrose y Choisy.

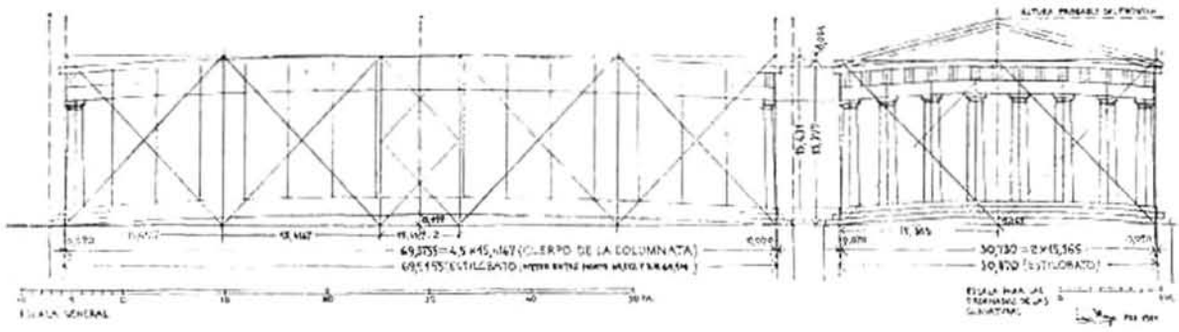
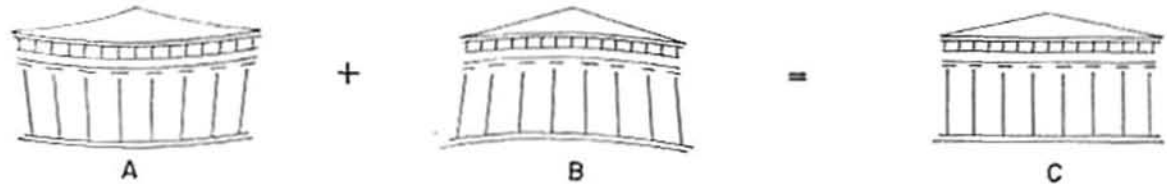


FIG. 51. Dibujo de L. MOYA *(Op. cit.*, nota 63) indicando las curvaturas del Partenón según las medidas de Balanos.

Para Penrose el origen de la curvatura del entablamento se debía al efecto de flexión que producen las pendientes del frontón, y en consecuencia, al objeto de mantener uniforme la altura de las columnas, había que trazar el estilobato según una línea curva paralela. La hipótesis del efecto visual del frontón tiene relación con el efecto de ilusión de Zöllner, que fue descubierto más tarde en 1860, y sería aplicado también, posteriormente por Hauck, a los triglifos.

Choisy [57] dio una de las versiones más difundidas al problema de las curvaturas que posteriormente ha sido recogida en muchos libros de arquitectura. Así apunta a una ilusión óptica que según él se puede comprobar en las fachadas: "Al mismo tiempo que las líneas verticales divergen, las

horizontales del entablamento flexionan dirigiendo su concavidad hacia el cielo, como si la columnata cediera en su parte media bajo la sobrecarga del frontón. Los griegos observaron también esa desagradable apariencia y la neutralizaron curvando las líneas en sentido inverso. De suerte que al aumentar las curvaturas al mismo tiempo que se fuerza la inclinación de las columnas, obtendremos para la fachada del Partenón el diagrama B" (Fig. 52). Respecto a la curvatura del estilobato, Choisy da la misma explicación que dio Vitruvio.



FACHADA ORIENTAL DEL PARTENON (SEGUN CHOISY)

A PROBABLE ASPECTO SIN CORRECCIONES OPTICAS
B FACHADA CON ENTABLAMENTO Y ESTILOBATO CONVEXO (CORRECCION INTRODUCIDA)
C ASPECTO VISUAL AL COMPENSARSE A CON B

FIG. 52

Sin embargo, Choisy no parece que quede convencido de las explicaciones que él mismo ofrece, pues más adelante dice [58]: "Vitruvio, por otra parte, nos habla del artificio correctivo de las curvaturas como de una práctica perpetuada hasta la época romana, y para esto se apoya sobre la razón ya mencionada, la compensación de un error visual más o menos inexplicado, pero indiscutible como hecho. La teoría del célebre arquitecto romano sería decisiva si esta débil flecha correctora produjera la ilusión de la línea recta. En realidad la curvatura subsiste en forma apreciable. ¿Significa esto que la finalidad no haya sido alcanzada? Ciertamente, no, pues, tengamos o no conciencia de ello, de esta forma inesperada surge una imprevisión extraña y nueva de las líneas. El espectador desprevenido siente algo insólito, pero si se le señala el artificio reconoce una atención delicada que le encanta. Los contornos adquieren, gracias a ese rebuscamiento, un arte

de distinción al cual el gusto no podría permanecer indiferente. El edificio se substrae al aspecto vulgar de las construcciones de líneas rígidas y se impregna de un carácter imprevisto y nuevo que quizá escapa al análisis, pero que nos sorprende aun cuando ignoremos su verdadero sentido y las causas que lo promueven".

Posteriormente, Pirenne duda que las curvaturas objetivas se utilizaran para compensar las curvaturas subjetivas, apuntando como Choisy a un propósito de belleza, y así dice [59]: "Los contornos levemente curvos, cuando están adecuadamente elegidos, pueden contribuir a producir una impresión extraordinariamente artística". Esta última razón de orden estético será la que posiblemente prevalecerá sobre cualquiera de las causas que se puedan apuntar, sin excluirlas, para explicar dichas curvaturas.

La cuestión de las curvaturas y en general de las modificaciones ópticas (inclinación de las columnas, del entablamento y del frontón; aumento del diámetro de las columnas de esquina; éntasis de los fustes, etc.) aunque aparentemente de poca trascendencia ya que, como apunta Luis Moya [60], su valor es relativo por exigir unos puntos de vista determinados desde los cuales la contemplación de la obra arquitectónica ofrezca una imagen ideal prevista, sin embargo adquieren un *valor conceptual* muy importante para la comprensión de la arquitectura griega. En efecto, según Moya, cabe distinguir en su génesis dos etapas [61]: En la primera se trataría de que el edificio se ajustase a una geometría y a un sistema de proporciones ideales, dentro de lo que podríamos llamar una concepción *pitagórica*. En la segunda, teniendo en cuenta que el edificio es para ser visto y preferentemente desde unos puntos de vista privilegiados, se introducen unas modificaciones de acuerdo con la esfericidad de la visión que, podríamos decir, implican una matemática *postpitagórica*.

La concepción esférica de la visión nos puede servir para abordar el problema de las curvaturas. A dicha concepción ha contribuido Pennethorne [62] con su obra *The Geometry and Optics of Ancient Architecture*, y ha resultado ser uno de los métodos utilizados para intentar comprender la génesis de las proporciones del Partenón. En este sentido nos parece oportuno, por lo significativo, transcribir aquí el siguiente párrafo de otro

trabajo de Luis Moya [63]: "Otro modo de explicar estas proporciones ha consistido en fundarlas sobre la apariencia real de las mismas, tal como las deforma la visión. Las fachadas son, en esencia, planos verticales; se ven proyectadas sobre una superficie esférica cuyo centro está entre los ojos del espectador, y por esto se hace imposible percibir las verdaderas medidas y proporciones. Los investigadores que han seguido este método han supuesto que las proporciones sencillas, sean las de Vitruvio o las de Pitágoras, se encuentran en esa superficie esférica y que en ella se hizo el verdadero trazado del templo; al proyectar este trazado, desde el centro de la esfera, sobre un plano vertical las proporciones dejan de ser expresadas mediante relaciones entre números enteros bajos y se convierten en las complicadas relaciones que se pueden observar actualmente en el Partenón. La dificultad del sistema consiste en que obliga a determinar algunos puntos de vista privilegiados... Fuera de ellos no se pueden percibir las proporciones sencillas que se suponen están en la idea del edificio; no obstante, es verosímil que se emplease este sistema, pues lo apoyan dos indicios: la existencia real de elementos arquitectónicos tales como los propileos, que determinan esos puntos de vista privilegiados, y una frase del *Filebo* referente a los instrumentos de trabajo de los arquitectos..."

Respecto a este último indicio, en el diálogo que Sócrates mantiene con Protarco al nombrar los distintos instrumentos que utiliza la arquitectura se dice: "Se sirve de la regla, del torno, del compás, de la plomada y del desabollador". Este último instrumento, detectado por Moya en la traducción del *Filebo* que hace Patricio de Azcárate [64], sería el que transformaría segmentos curvos dibujados sobre una superficie esférica, que representa la imagen visual, en segmentos rectos sobre un plano. Así se dividiría un arco de circunferencia empleando divisiones sencillas según relaciones traducibles a números naturales, que al proyectarlas desde el centro de la circunferencia (o esfera) sobre un plano, en algunos casos [65], podrían dar lugar a otras relaciones con números irracionales (Fig. 53).

La concepción esférica de la visión se vería así reforzada, por una parte, por la presencia de un instrumento que establece transformaciones entre

una esfera y un plano, y por otra, por la teoría de Pennethorne, según la cual la arquitectura griega tendría unos puntos de vista privilegiados que coincidirían con los centros de las superficies esféricas donde se proyectarían las imágenes curvas, homotéticas a las que configuraría el ojo, basadas en proporciones sencillas. La teoría de Pennethorne se ajusta a la óptica de la Antigüedad que, como sabemos, se basa en que la vista percibe solamente relaciones angulares. Dicho autor fue el primero en observar las correcciones ópticas en las inscripciones del templo de Priene, donde las letras situadas en lo más alto tenían tamaños mayores que las situadas a menor altura.

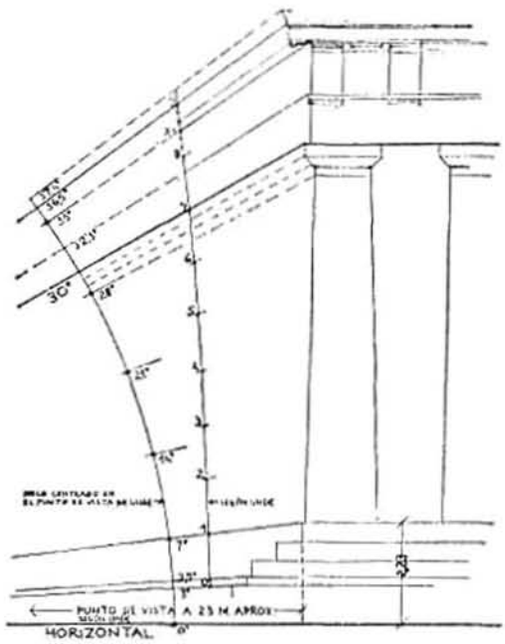


FIG. 53. División de un arco centrado en un punto de vista privilegiado (según UHDE y corrección por MOYA, *Op. cit.*, nota 63, p. 139).

Sin embargo, conviene hacer aquí una observación respecto a la concepción esférica de la visión, y es que ésta contradice el efecto de corrección óptica que se atribuye a las curvaturas objetivas de los templos griegos. En efecto, estas curvaturas acentúan la deformación óptica de la imagen

visual (Fig. 54) que se configura sobre una superficie esférica, ya que, en el caso de estar la línea de horizonte por debajo del estilobato, se suman dos curvaturas: la que existe en el estilobato o en el entablamento que provienen de la propia arquitectura, y la que imprimiría la visión esférica [66].

La convexidad hacia arriba del estilobato se ha justificado, desde el punto de vista funcional, para facilitar la evacuación del agua de lluvia.

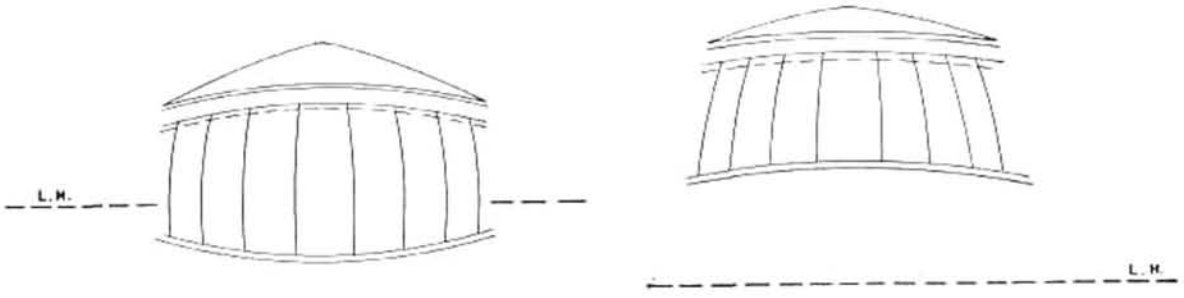


FIG. 54. PERSPECTIVA CURVILINEA ESQUEMATICA DEL PARTENON SEGUN SU POSICION RESPECTO A LA LINEA DE HORIZONTE.

Por último, el descubrimiento de una serie de figuras que daban lugar a ilusiones o distorsiones ópticas, a partir de mediados del siglo pasado, ha permitido la aplicación de algunas de ellas al estudio de las curvaturas. Así Hauck [67] propuso una adaptación de la ilusión de Zöllner (ya que la esfericidad de la visión no contribuía a neutralizar las curvaturas) recurriendo al denominado "conflicto de los triglifos angulares", en la perspectiva de cuadro inclinado que se produce al mirar de cerca y desde abajo el entablamento (Fig. 55). De este modo, al dividir la perspectiva en dos figuras simétricas según un eje vertical estableciendo la relación entre segmentos inclinados (triglifos) respecto a las horizontales del entablamento, se genera un cierto efecto Zöllner. Sin embargo, Panofsky [68] considera insuficiente esta explicación por cuanto se han encontrado también curvaturas en templos que no son dóricos.

Nosotros sugerimos aquí que si bien puede haber un cierto efecto Zöllner entre segmentos inclinados correspondientes a los triglifos y las pendientes del frontón respecto a las horizontales que se deforman, también, y con más razón, existe un efecto Hering. En efecto, en una vista próxima y hacia arriba de la fachada del templo, las líneas verticales de éste (fustes, estrías), al converger en la perspectiva en un punto, arquean las rectas horizontales del entablamento; dicha perspectiva en esquema se puede asociar a una semifigura de Hering (Fig. 56, A-B).

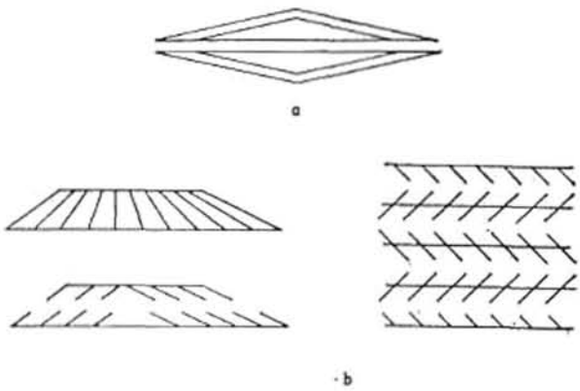
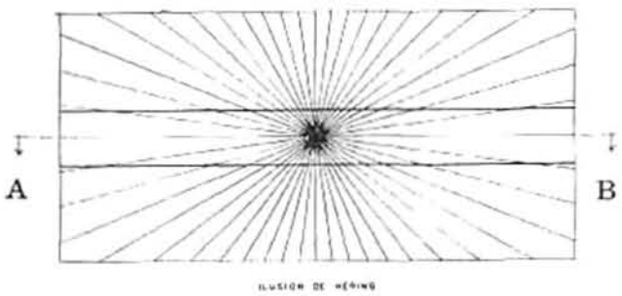


FIG. 55. APLICACION DEL EFECTO ZÖLLNER.



ILUSION DE HERING

FIG. 56. Para su aplicación al problema de las curvaturas tomamos la mitad inferior que se adapta a la vista cercana desde abajo de la fachada.

Como primeras conclusiones, en esta breve nota, podemos decir lo siguiente: 1.ª) Que las curvaturas pudieran no obedecer a una sola causa, sino a una *constelación de causas* (ópticas, estéticas e incluso funcionales). 2.ª) Para comprender las curvaturas sería necesario introducir una *concepción relativista* de las mismas, ya que su valor varía de unos puntos de visión a otros de tal forma que en unos se acentúa y en otros se reduce por compensación de los efectos ópticos antes apuntados. 3.ª) La sutil belleza introducida por las curvaturas quizá hará prevalecer la *razón estética* (que bien pudiera considerarse *síntesis* de todas las demás) como su causa última.

NOTAS

[1] E. PANOFSKY, *La perspectiva como forma simbólica*, Barcelona, Tusquets, 1973. Este ensayo fue publicado por vez primera con el título «Die Perspektive als Symbolische Form», *Vorträge der Bibliothek Warburg*, 1924-1925, pp. 258 y ss., Leipzig-Berlín, B. G. Teubner, 1927.

[2] P. AMBROSIO ONDERIZ, *La Perspectiva y la Especularia de Euclides*, Madrid, A. Gonoz, 1585. Consúltese también: P. EECKE, *Euclide: l'optique et la catoptrique*, Paris, Declée de Brouwer, 1938; H. E. BURTON, «The optics of Euclid», *Journal of the Optical Society of America, 35*, pp. 357-372, N. Y., 1945.

[3] Ver nota anterior.

[4] F. VERA, *Científicos griegos*, t. I, p. 160, Madrid, Aguilar, 1970.

[5] M. H. PIRENNE, *Optica, Perspectiva y Visión en la pintura, arquitectura y fotografía*, p. 87, Buenos Aires, V. Leru, 1974. La edición inglesa se publicó en 1970 con el título: *Optics, Paintings and Photography*, Cambridge University Press.

[6] JOSEPH ORTIZ Y SANZ, *Los diez libros de Architectura de M. Vitruvio Polión*, Madrid, Imprenta Real, 1787. En esta versión, I, 2, pp. 9-10, se puede leer: «Y la *Scenografía* es el dibuxo sombreado de la frente y lados del edificio, que se alexan, concurriendo todas las líneas a un punto». Vitruvio lo escribió hacia el año 40 a. C.

[7] LEONARDO DA VINCI, *Tratado de Pintura* (edición preparada por A. González García), Madrid, Editora Nacional, 1976, p. 122.

[8] F. VERA, *Op. cit.* (Nota 4).

[9] LEONARDO DA VINCI, *Op. cit.*, p. 133.

[10] LEONARDO DA VINCI, *Op. cit.*, p. 142.

[11] Hemos sustituido la palabra *traslúcido*, que aparece en esta versión, por *transparente*, que se ajusta más al concepto de *plano del cuadro* como *ventana*.

[12] LEONARDO DA VINCI, *Op. cit.*, p. 155.

[13] LEONARDO DA VINCI, *Op. cit.*, p. 156.

[14] M. H. PIRENNE, *Op. cit.*, pp. 39, 153 y ss. Como la abertura es tan reducida, en inglés el orificio se denomina «pinhole» (orificio de alfiler).

[15] J. DE LA GOURNERIE, *Traité de perspective linéare, contenant les tracés pour les tableaux plans et courbes, les bas-reliefs et les décorations théatrales, avec une théorie de effets de perspective*, Paris, 1859.

[16] H. HELMHOLTZ, *Handbuch der Physiologischen Optik*, Hamburgo y Leipzig, 1866.

[17] G. HAUCK, *Die Subjektive Perspektive und die horizontalen Kurvaturen des Dorischen styls*, Stuttgart, 1875.

[18] D. GIOSEFFI, «Ottica», *Enciclopedia universale dellarte*, t. IX, Roma, 1963, pp. 282-284.

[19] G. HAUCK, *Op. cit.*, pp. 93 y ss.

[20] E. PANOFSKY, *Op. cit.*

[21] *Ibidem*, p. 10.

[22] *Ibidem*, p. 11.

[23] E. PANOFSKY, *Op. cit.*, pp. 12-13.

[24] Si bien en el ensayo de Panofsky no viene esta ilustración, nosotros la incluimos aquí para comprender mejor el texto.

[25] Se refiere a un dibujo de Hauck análogo al de la figura 24. Ver también E. PANOFSKY, *Op. cit.*, p. 13, fig. 3.

[26] J. PALACIOS, *Física para médicos*, Madrid, 1952, p. 203.

[27] E. PANOFSKY, *Op. cit.*, p. 15.

[28] En forma intuitiva se comprende al imaginar que el objeto es reflejado en un espejo hemiesférico.

[29] M. H. PIRENNE, *Op. cit.*, pp. 175-176.

[30] E. H. GOMBRICH, *Arte e ilusión*, Barcelona, G. Gili, 1979.

[31] *Ibidem*, p. 226.

[32] E. H. GOMBRICH, *Op. cit.*, p. 219.

[33] F. HOHENBERG, *Geometría constructiva*, Madrid, Labor, 1965, pp. 149 y ss.

[34] D. GIOSEFFI, «Prospettiva», *Op. cit.*, t. XI, Roma, 1963, pp. 152-153.

[35] A. FLOCON y R. TATON, *La Perspective*, Paris, P. U.F., 1963. Hay que incluir en esta relación una publicación muy anterior y poco conocida del pintor LUIS G. SERRANO, *Una nueva perspectiva. La perspectiva curvilínea*, México, Editorial Cul-

tura, 1934. También relacionada con la pintura, aunque bastante posterior, es la de JULIO FUENTES ALONSO, *Solución lógica a la perspectiva natural*, Madrid, Editora Nacional, 1975. Una breve exposición se encuentra en: G. YÁÑEZ, *Perspectiva (Gnomónica, Central, Lineal y Curvilínea)*, Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Bellas Artes, 1980.

[36] A. BARRE y A. FLOCON, *La perspective curviligne*, Paris, Flammarion, 1968. Contiene un anexo titulado «Etude comparée de differents méthodes de perspective, une perspective curviligne», de G. Bougiland, A. Flocon y A. Barre. La transformación de Postel, que es una gnomónica modificada, propugnada en este trabajo se utiliza en Cartografía, radiodifusión y en soleamiento.

[37] Este matemático probó la imposibilidad de construir, mediante un número finito de operaciones con regla y compás, un segmento de longitud igual a una circunferencia de radio dado basándose en que el número π no puede ser raíz de ninguna ecuación algebraica de coeficientes racionales. En efecto, si tal construcción fuese posible se podría traducir en dicho tipo de ecuaciones.

[38] J. PALACIOS, *Op. cit.*, pp. 205 y ss.

[39] F. SEARS, *Optica*, Madrid, Aguilar, 1979, pp. 131 y ss.

[40] U. NEISSER, «Los procesos de visión», *Psicología contemporánea*, Madrid, Blume, 1975, p. 140. Véase también la nota 29. DAVID HUBEL, premio Nobel de Medicina 1981, en una reciente conferencia titulada «El ojo, el cerebro y la percepción», pronunciada en la Fundación Juan March dentro del ciclo sobre «La Nueva Neurobiología» (2-23 de mayo de 1983), dijo: «Cuando vemos una escena con sus diferentes formas, sus colores y sus movimientos es porque una gran cantidad de células receptoras de la retina se están impresionando, pero la impresión que puedan sufrir estas células no tiene en sí misma ningún sentido si el cerebro no es capaz de dar una interpretación de todas ellas. De momento conocemos los primeros pasos de este proceso de interpretación, las primeras conexiones o sinopsis con las que el estímulo se lleva hasta la corteza cerebral, pero a partir de ahí tenemos un gran desconocimiento de lo que ocurre».

[41] P. LE CORBEILLER, «La curvatura del espacio», *Matemáticas en el Mundo Moderno*, Madrid, Blume, 1974, pp. 144-150; véase también en la misma obra la figura de la p. 252.

[42] Esta modalidad de perspectiva curvilínea ha sido estudiada por A. García Vereda (comunicación personal). En cuanto a la *restricción* del campo visual se puede hacer con cualquier tipo de perspectiva curvilínea esférica, si bien lo más frecuente es utilizar una abertura correspondiente a los 180° de la semiesfera completa. En cambio, en la perspectiva curvilínea cilíndrica conviene reducir el campo visual en altura para reducir las distorsiones marginales.

[43] Puede consultarse: J. M. RUIZ AIZPIRI, *Geometría Descriptiva*, Madrid, Guadiana, 1973, p. 162; y también: F. IZQUIERDO ASENSI, *Geometría Descriptiva*, Madrid, Dossat, 1977, p. 441.

[44] J. M. Ruiz Aizpiri, *Op. cit.*, p. 164; y F. Izquierdo Asensi, *Op. cit.*, p. 440.

[45] P. Puig Adam, *Geometría Métrica*, t. I, Madrid, 1958, p. 318. Las primeras referencias sobre la proyección estereográfica aparecen en el *Planisferio* (también conocido por *Geographia)* de Ptolomeo (150 años después de Cristo) y sus orígenes se remontan a Hiparco, 300 años antes. Fue estudiada por Ahmad Al-Fergani, en Bagdad (siglo IX), en su obra *Libro sobre la construcción del astrolabio.* Así en la Edad Media la proyección estereográfica se denominaba *proyección de astrolabio.* Fue utilizada por G. Frisins (1540) en la construcción de mapas. El término *proyección estereográfica* fue introducido en 1831 por L. I. Magnus. Un estudio elemental de la proyección estereográfica se puede ver en: B. A. Rosenfeld y N. D. Sergeeva, *Proyección estereográfica*, Moscú, Mir, 1977.

[46] P. Puig Adam, *Op. cit.*, p. 318.

[47] *Ibidem*, p. 318.

[48] La perspectiva curvilínea se ha estudiado también recientemente en el Seminario de *Geometría y Arquitectura* en la ETS de Arquitectura de Madrid, creado y dirigido por el autor del presente artículo. Así, C. J. Sebastián Buendía, ha estudiado la perspectiva curvilínea estereográfica como sistema de representación desarrollando en él la problemática propia de todo sistema; J. I. González Moreno ha estudiado las deformaciones en dicha perspectiva. Por otra parte, Fabriciano J. García, dentro de un voluminoso estudio sobre la esfera, ha considerado este tipo de perspectiva que él denomina en «ojo de buey», expresión que hace referencia a la experiencia de Descartes.

[49] F. Hohenberg, *Op. cit.*, p. 152.

[50] Es en Cartografía donde se han estudiado, principalmente en los siglos XVIII y XIX, el problema de las *deformaciones* entre imágenes situadas en distintas superficies. Como sobre un plano no se pueden dibujar las figuras de una superficie esférica conservando la *forma* y el *tamaño*, ya que dicha superficie no es desarrollable sobre aquél, se plantea el problema de las deformaciones o *anamorfosis*, que pueden ser lineales, angulares y superficiales, entre la proyección sobre la esfera y la correspondiente sobre el plano. Una consecuencia del «teorema egregium» de Gauss, relativo al estudio intrínseco de superficies, es que: *Dos superficies aplicables, es decir aquellas entre cupos puntos se puede establecer una correspondencia biunívoca tal que son iguales los arcos homólogos ds = ds', tienen la misma curvatura en los puntos homólogos.* Por tanto, las únicas superficies aplicables sobre el plano son las superficies desarrollables, es decir envolventes de planos (conos, cilindros, superficies engendradas por las tangentes a una curva alabeada). Tal correspondencia, llamada también *isométrica*, no se da entre la esfera y el plano en la proyección estereográfica, dándose, sin embargo, la correspondencia *isógona* o *conforme* (que conserva los ángulos). En la proyección estereográfica ecuatorial (el plano de un cuadro pasa por el centro de la esfera), donde la transformación de los paralelos son círculos y la de los meridianos son rectas, radios del círculo base, la deformación en el sen-

tido de los meridianos, h, y la correspondiente en el sentido de los paralelos, k, son iguales (h y k se denominan módulos lineales y son las relaciones correspondientes de las longitudes entre el plano y la esfera dp/de). Así, tenemos (ver MIFSUT, p. 588) en este caso que $h = k = 1/2 \cos^2\theta/2$, siendo θ el ángulo visual medido desde el punto principal y el dado con vértice en el centro de la esfera. Desde el segundo vértice de proyección el ángulo será la mitad, es decir $\theta/2$. La relación de deformación entre magnitudes elementales homólogas es la misma para cada punto y varía con θ. En el centro de la proyección es igual a $1/2$ y crece hacia la circunferencia límite donde vale la unidad. Si el plano de proyección se sitúa tangente a la esfera las deformaciones se duplican.

Para un estudio de las anamorfosis en proyección estereográfica se puede consultar: A. MIFSUT, *Geodesia y Cartografía*, Madrid, 1905. Según reciente comunicación personal J. A. Franco Taboada en colaboración con C. Alsina Catalá, en la ETS de Arquitectura de La Coruña, han realizado un trabajo relativo a las deformaciones en Perspectiva Curvilínea.

Algunos autores como F. Hohenberg aducen razones de *costumbre* para utilizar la perspectiva curvilínea y así dice: «... la necesidad de un cambio de la imagen perspectiva se encuentra sólo raras veces, pues nuestra vista está tan acostumbrada a la observación de pinturas, dibujos y fotografías en perspectiva como en el Asia oriental lo están a sus proyecciones oblicuas». Véase F. HOHENBERG, *Op. cit.*, p. 152. Una aclaración nuestra al texto anterior: deberá entenderse perspectiva por perspectiva *lineal.*

En otro orden de cosas, podemos decir que la perspectiva curvilínea tiene gran aplicación a los problemas de *Soleamiento* en la arquitectura; ver: G. YÁÑEZ, *Energía solar, edificación y clima*, Madrid, MOPU, 1982, t. I, pp. 99 y ss.

[51] JOSEPH ORTIZ Y SANZ, *Op. cit.*, p. 71 (Nota 6).

[52] L. MOYA BLANCO, «Notas sobre las proporciones del cuerpo humano según Vitruvio y San Agustín», *Boletín de la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando*, Madrid, Primer semestre de 1978, pp. 57-59. Ver también el trabajo de Luis Moya citado en la nota 63, p. 93.

[53] A. CHOISY, *Historia de la Arquitectura*, Buenos Aires, Leru, 1958, I, p. 223.

[54] N. BALANOS, *Les Monuments de l'Acropole*, Paris, Massin et Levy, 1936.

[55] JOSEPH ORTIZ Y SANZ, *Op. cit.*, III, 3, p. 71; refiriéndose al estilobato, Vitruvio dice así: «... porque si se dirige todo llano, hará a la vista como un canal».

[56] JOSEPH ORTIZ Y SANZ, *Op. cit.*, III, 2, p. 68.

[57] A. CHOISY,, *Op. cit.*, pp. 222-223; Parte Gráfica, p. 104.

[58] *Ibidem*, p. 223.

[59] M. H. PIRENNE, *Op. cit.*, p. 177 (Nota 5).

[60] L. MOYA BLANCO, *Op. cit.*, p. 59 (Nota 52).

[61] *Ibidem*, p. 59.

[62] J. PENNETHORNE, *The Geometry and Optics of Ancient Architecture*, London and Edinburg, Williams and Norgate, 1878.

[63] L. MOYA BLANCO, «Relación de diversas hipótesis sobre las proporciones del Partenón», *Boletín de la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando*, Primer semestre de 1981, p. 34.

[64] PLATÓN, *Diálogos*, traducción de Patricio de Azcárate, Buenos Aires, Argonauta, 1946.

[65] A modo de ejemplo: Si los ángulos son 30° y 60°, la relación entre arcos es 1/2 y la relación entre segmentos es 1/3, en ambos casos son números racionales. En cambio, si los ángulos son de 30° y 45°, la relación entre arcos es de 2/3, mientras que la relación entre segmentos rectilíneos proyectados sobre un plano es de $1/\sqrt{3}$, es decir, un número irracional.

[66] El Partenón, además de ubicarse en el sitio más alto de la Acrópolis, se apoya en una plataforma con gradas, lo que contribuye a que en las visualizaciones de acercamiento aparezca con la línea de horizonte por debajo del estilobato.

[67] G. HAUCK, *Op. cit.* (Nota 17).

[68] E. PANOFSKY, *Op. cit.* (Nota 1).