CAPÍTULO 1

Presentación del problema

La transición de la aritmética al álgebra enfrenta a los estudiantes del segundo ciclo común u octavo grado del Sistema Educativo Nacional, con nuevos conceptos, cuya compresión demanda el desarrollo de nuevas habilidades. Al iniciar el aprendizaje del álgebra elemental se presentan diversas dificultades, expresadas en resultados erróneos en la reducción de términos semejantes, en los procesos de multiplicación factorización entre otros. El deficiente aprendizaje del álgebra es expresado por el bajo rendimiento académico de los estudiantes y sus efectos se hacen presentes hasta en los niveles superiores de educación.

En el Instituto Tecnológico de Administración de Empresas es muy notaria **la problemática sobre el aprendizaje del álgebra elemental**, al iniciar el estudio de ésta. En las evaluaciones escritas y trabajos en clase es común que el alumno cometa errores al reducir expresiones a un número no concibe resultados expresados con variables, y otros de origen aritmético y relacionados con la comprensión del concepto de variable. Investigaciones sobre el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en Honduras en la última década, muestran las deficiencias en el aprendizaje de la matemática, presentando un panorama general del contexto de este problema y han generado propuestas hacia la disminución de la deficiencia del aprendizaje de la matemática en general. En la prueba comparativa realizada en toda la región latinoamericana, para medir el rendimiento en Matemáticas y Español de los alumnos del tercer y cuarto grado, Honduras se ubicó en los últimos lugares. El análisis de esta prueba comparativa sostiene que los alumnos “aprenden números, relaciones numéricas, signos y estructuras matemáticas, pero no son capaces de resolver problemas matemáticos simples y complejos, ni de realizar aplicaciones a las situaciones cotidianas matematizables”. (UNESCO, 2001, p. 43).

Estos resultados han sido confirmados por pruebas nacionales aplicadas por la Unidad Externa de Medición de la Calidad de la Educación (UMCE), en 1997 y en el año 2002. Según estos estudios, de Tercero a Sexto grado los alumnos empeoran su rendimiento en matemática (UMCE, 2003, p. 3). Informes recientes confirman esta tendencia, por ejemplo en

el Informe de Progreso Educativo Honduras 2005, en el área de calidad de la educación expresa; “en general, sólo alrededor del 15% de los alumnos muestra un nivel de suficiencia en matemáticas y lenguaje en las pruebas nacionales, con leves avances en matemática y leves caídas en el lenguaje” (PREAL, 2005, p. 5).

Existen pocos estudios nacionales sobre el rendimiento académico en educación media, en Honduras, los estudios de la UMCE en base a una muestra de Centros de Educación Básica y Colegios Públicos, citados por PREAL (2005, p. 14); establecen que los alumnos van aprendiendo menos de lo esperado a medida que avanzan de nivel, especialmente en matemáticas, este estudio revela que, “…en la mayoría de niveles y asignaturas sólo 1 de cada 10, demuestra conocimiento suficiente de la materia. Aún más alarmante es la gran cantidad de alumnos que muestran un escaso dominio de las materias: 9 de cada 10 en matemáticas de noveno” (PREAL, 2005, p. 13).

Según el estudio comparativo de la UNESCO (2001, p. 69), son múltiples las causas de las deficiencias en el aprendizaje de la matemática en la escuela primaria y secundaria, relacionadas con el nivel socio-económico, tanto del alumno, como de la región geográfica. Los efectos de factores relacionados con la familia, aula y escuela son estudiados mediante el análisis de variables como: educación pre-escolar, recursos de la institución educativa, estilos y prácticas del aula, y práctica pedagógica.
Santos (1997, p. 5) señala que, “en la práctica de enseñar matemáticas generalmente el maestro adopta el modelo de enseñanza donde se reflejan elementos de su propia experiencia como estudiante”. Esta experiencia supone a las matemáticas como un cuerpo ya elaborado de conocimientos, los cuales deben ser transferidos al alumno, y está fuertemente apoyado en la memoria y en la aplicación de reglas, en forma rígida sin ningún discernimiento.

En el nivel medio, el aprendizaje del álgebra elemental presenta dificultades, en parte por las prácticas de enseñanza. Según el estudio descriptivo, “La influencia de las estrategias didácticas utilizadas por los profesores, en los aprendizajes significativos de álgebra elemental de los alumnos de segundo curso de ciclo común de cultura general del Instituto José Trinidad Reyes (Díaz, 2004), el rendimiento de los estudiantes fue de 24.1%; el cual es sumamente

bajo, no alcanza los niveles mínimos de aprobación y muestra la gran debilidad que los alumnos poseen en el manejo algorítmico de los elementos básicos del Álgebra.
La problemática del aprendizaje del álgebra elemental en el nivel medio, y los estudios de la matemática educativa, lleva a los profesores a realizar prácticas de enseñanza en las aulas de clase, que ayuden al alumno a comprender los conceptos algebraicos y por lo tanto al desarrollo de las habilidades matemáticas.

Justificación del estudio

Los registros de calificaciones de los estudiantes en el segundo curso ciclo común del INTAE en los últimos años, muestran que los estudiantes presentan dificultades en la transición del estudió de la aritmética al álgebra elemental. Este proceso se lleva a cabo generalmente en el segundo y tercer periodo del modulo de matemáticas, y presenta una reducción en el rendimiento académico. En el año 2005 el rendimiento académico durante este periodo se redujo en forma crítica, en la sección "1" de un promedio académico de 64.16% a 54.92% y en la sección "2" de 72% a 56.29% (Anexo, 7), situación que motivó a realizar la presente investigación.

En los últimos años, la investigación en torno a la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar ha evolucionado, tomando en cuenta que la didáctica de las matemáticas es una disciplina científico-experimental muy reciente; nació en los años setenta en el contexto de las matemáticas modernas. Las principales investigaciones que se han realizado en Francia, se han extendido a países como México, España y recientemente en Colombia y Canadá.

A medida que los estudios cognitivos fueron evolucionando a partir de la noción de "aprendizaje significativo" planteada por Ausubel en 1968; Surgió la necesidad de describir los procesos de aprendizaje matemático del alumno (Gascón, 2001a, Pág. 5). Gascón llama a este enfoque *programa cognitivo* por sustentarse en la psicología genética de Piaget. Este enfoque presentó dos corrientes, los conceptualistas primitivos y los psicolingüísticas. Surgieron grupos de investigación como, el Grupo Internacional de Psicología de la Educación Matemática, que realizaron descripciones sobre el "Pensamiento Matemático

Avanzado" y los procesos cognitivos que intervienen en la construcción de nociones y conceptos matemáticos. Según Gascón muchas de las investigaciones parten del estudio empírico de los errores que los alumnos cometen al pasar de la aritmética al álgebra. Kieran y Filloy (como se cita en Gascon 2001a, p. 7), confirman que muchas de las investigaciones sobre la enseñanza del álgebra, durante la década de los ochenta, se centraron en la manera en que los estudiantes resuelven ecuaciones.

Según Aguayo (2003, p. 236) una de las dificultades del programa cognitivo, es que no tomaba en cuenta la reconstrucción escolar de las matemáticas, con estos descubrimientos surge el enfoque antropológico en didáctica de las matemáticas, surgiendo el término de transposición didáctica. Aguayo afirma que en la década de los noventa la investigación sobre el álgebra en México se basó en el programa cognitivo, manteniendo la tendencia.

En Honduras las investigaciones sobre la enseñanza de la matemáticas son muy pocas, entre ellas, el estudio comparativo entre los conocimientos sobre aritmética y geometría de los estudiantes del último año de las Escuelas Normales y los alumnos de sexto grado de las escuelas primarias del sistema educativo nacional (Hernández, R., Martínez, B. & Guillén, R.1997), Aprendizaje de las Matemáticas a través de la resolución de problemas en octavo grado del Centro de Investigación e Innovación Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (CIIE-UPNFM), (Alvarado, M. M. & Suazo, A. M. ,2001), La influencia de las estrategias didácticas utilizadas por los profesores en los aprendizajes significativos de álgebra elemental de los alumnos de segundo curso de ciclo común de cultura general del Instituto José Trinidad Reyes (Díaz,H. 2004), esta última investigación relacionada directamente con la enseñanza del álgebra, se ha tomado como orientación de esta investigación, ante la problemática del aprendizaje del álgebra, y la propuesta de Régine Douady, de utilizar una metodología basada en el modelo de cambio de cuadros o marcos, para el aprendizaje y enseñanza del álgebra.

En los últimos años la investigación en Educación Matemática ha reconocido que el aprendizaje de la matemática consiste en algo más que memorizar cifras o usar

procedimientos algorítmicos para obtener respuestas correctas. “Actualmente se propone, como una forma de aprender significativamente, que el alumno reconstruya los conceptos” (Cantoral 2000, p. 35). En este proceso el alumno es quien crea, descubre y propone formas de resolver problemas. La función del profesor es la de guiar el aprendizaje, de proponer actividades que los enfrente a las dificultades inherentes al nuevo concepto; de tal manera que estimule la creatividad y el uso de los conocimientos previos para enfrentarse a situaciones nuevas y proponer soluciones. Este nuevo enfoque de la enseñanza de la matemática pretende evitar la carencia de comprensión de las fórmulas memorizadas y de los procedimientos de solución mecanizada.

Las investigaciones, en educación matemática, recomiendan que la resolución de problemas debe ser una actividad esencial en el estudio de las matemáticas para poner en práctica los principios del aprendizaje activo (Guzmán, 1993. p. 72). De hecho, la resolución de problemas ha sido una línea importante en los estudios en educación matemática, realizados en años recientes en países como Francia, España, México y Canadá. Esto ha influido en el desarrollo de propuestas curriculares, que buscan propiciar cambios en el aula para lograr un aprendizaje eficiente de la matemática en el sistema educativo hondureño.

La Propuesta de Transformación de la Educación Nacional presentada por el Foro Nacional de Convergencia (FONAC), conocida como el Currículo Nacional Básico (CNB), hace énfasis en la resolución de problemas desde los primeros grados. Esto se expresa en uno de los perfiles del egresado de la educación básica, en donde se espera que, el egresado “Demuestre habilidades para solucionar problemas a corto y mediano plazo” (SEH, 2003. p. 43). Por ejemplo en el caso específico de la enseñanza-aprendizaje del álgebra en el Séptimo grado se tiene como objetivo, que el alumno haga uso de variables y expresiones algebraicas para formular y resolver problemas. El curso de introducción al álgebra inicia con el desarrollo del concepto de variables y expresiones algebraicas, hasta la aplicabilidad de ecuaciones lineales en situaciones de resolución de problemas como objetivo principal. En la resolución de problemas con palabras se distinguen: problemas tradicionales, problemas a los que se hace una aproximación desde una perspectiva funcional y problemas de generalización

con respuestas abiertas. Según Kieran (1994, p. 8), producir las ecuaciones que representan las relaciones en un problema típico es una de las áreas de mayor dificultad reconocida en la escuela secundaría y en la superior. Generalmente en el proceso de representación los estudiantes utilizan una traducción directa frase por frase, a una ecuación que contiene números, variables y operaciones, se requiere algún conocimiento semántico, pero la mayoría de estudiantes se apoya solo en conocimientos sintácticos. Aunque se presentan problemas en el proceso de formular una generalización algebraica, en lo que los estudiantes fallan, más, es en utilizarla y apreciarla como regla general. El álgebra no se utiliza como herramienta en la solución de problemas, su dominio es reducido a la solución algorítmica de ecuaciones, y el manejo de operaciones aritméticas aplicadas a la realización de operaciones como multiplicación y factorización de polinomios entre otros.

El uso del álgebra como herramienta, reduce el número de operaciones, y el tiempo que los alumnos utilizan para resolver problemas utilizando procedimientos aritméticos. El álgebra se utiliza como proceso de verificación de la solución y por lo tanto, disminuye la probabilidad de error y la incertidumbre; éste es uno de los marcos utilizados en la estrategia de cambio de cuadros o marcos en la resolución de problemas. Según Douady (1993, p.147) "muy a menudo los progresos eficaces (en la resolución de problemas) provienen de un cambio de marcos"; al permitir utilizar los nuevos conocimientos como herramientas para atacar los problemas. Los nuevos conceptos son analizados en diferentes contextos, como el gráfico, algebraico o numérico, en el proceso de búsqueda de la solución. Para Kieran (1994, p.17) "la mayoría de los estudiantes no adquiere un sentido real de los aspectos estructurales del álgebra", algunos estudiantes nunca alcanzan a reconocer el álgebra como una entidad matemática y manipularla como un todo sin recurrir a detalles aritméticos. Por lo que el álgebra en lugar de convertirse en herramienta eficaz en la resolución de problemas se convierte en una fuente de confusiones y actitudes negativas hacia el aprendizaje de las matemáticas. Si el aprendizaje del álgebra se basa en la comprensión, los estudiantes no deben recurrir a la memorización de reglas y procedimientos y serían capaces de utilizar los conceptos algebraicos como herramientas en la resolución de problemas.

El uso de la enseñanza del álgebra elemental, basada en el cambio de cuadros permite al alumno utilizar los conceptos algebraicos como “objeto” y como “herramienta”. El concepto es una herramienta cuando funciona para resolver un problema, y es un objeto cuando es el saber mismo, aquello que se aprende o se busca aprender (Robinet, 1984). Al utilizar los conceptos algebraicos como objeto y herramienta, permite la comprensión de los conceptos algebraicos y en consecuencia un mejor aprendizaje de las matemáticas. Por tal motivo en la presente investigación se utilizó la metodología de la enseñanza del álgebra elemental basada en el cambio de cuadros o marcos planteada por Régine Douady, y propuesta como una ingeniería didáctica basada en el constructivismo, ante problemática existente en la enseñanza–aprendizaje del álgebra elemental de profesores y estudiantes del Instituto José Trinidad Reyes (Díaz, 2004, p. 93).

Beneficiarios del estudio

Este estudio benefició directamente a los estudiantes del segundo curso del ciclo común “1” del Instituto Tecnológico Administración de Empresas de San Pedro Sula que cursaron la asignatura de Matemáticas en el segundo y tercer período del primer semestre del año 2006. Estos alumnos fueron sometidos a experiencias nuevas en el aprendizaje del álgebra elemental, desde el 17 de abril hasta el 7 de Agosto de 2006.

El estudio fue factible; se contó con el apoyo de la dirección del instituto facilitando los espacios y tiempo para la aplicación de las pruebas, al grupo experimental como al grupo control, también la administración del instituto proporcionó parte del material utilizado en las situaciones didácticas. Además se contó con la colaboración de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, quienes facilitaron apoyo logístico para la elaboración, ejecución y supervisión de las situaciones de aprendizaje.

Delimitación del estudio

Este estudio fue realizado en el Instituto Tecnológico de Administración de Empresas (INTAE), de San Pedro Sula, con estudiantes del segundo curso de ciclo común sección “1” desde el 17 de abril hasta el 7 de Agosto de 2006, desarrollando contenidos que según los rendimientos básicos de Educación Media corresponden a la unidad sobre el álgebra

elemental en el segundo curso de ciclo común y al bloque de Álgebra en el Diseño Curricular Nacional Para la Educación Básica en el séptimo grado. . El propósito del estudio era determinar el grado de comprensión de conceptos algebraicos, analizando los resultados de un pretest y un postest, así como sus actividades de aprendizaje durante el desarrollo de las clases correspondiente al álgebra elemental, mediante el cambio de cuadros o marcos. Los contenidos desarrollados durante el proceso de investigación se centraron en: el concepto de variable, reducción de términos semejantes, multiplicación de expresiones algebraicas, factorización y ecuaciones lineales de una variable. En este contexto se generó la siguiente interrogante:

¿***Una ingeniería didáctica del álgebra elemental, basada en el cambio de cuadros o marcos, mejorará el rendimiento académico en los temas del álgebra elemental en los estudiantes del segundo curso del ciclo común del INTAE*****?**

Para realizar este estudio, se plantearon los siguientes **objetivos:**

Objetivo General:

Determinar si la metodología de cambio de cuadros o marcos en la enseñanza del álgebra elemental incrementa el rendimiento académico de los estudiantes del segundo ciclo común del INTAE en adquisición de la noción del concepto de variable y su uso en procedimientos del álgebra elemental.

Objetivos Específicos:

1. Comprobar en base a la ingeniería didáctica, la pertinencia del cambio de cuadros o marcos como estrategia metodológica para la adquisición de la noción del concepto de variable y su aplicación en procedimientos algebraicos en el segundo curso de ciclo común.

2. Determinar si los estudiantes de segundo curso de ciclo común del INTAE, son capaces de utilizar la variable como incógnita, número general y relación funcional.

3. Evaluar en que medida los alumnos del segundo curso del ciclo común "1" del INTAE, alcanzan las expectativas de logro del Currículum Nacional Básico, referente al uso de la noción variable en operaciones con expresiones algebraicas.

Hipótesis de investigación

Para cumplir con los objetivos propuestos, la hipótesis que el estudio pretende probar es:

Los alumnos que participan en el aprendizaje del álgebra elemental basado en el cambio de cuadros o marcos, incrementan su rendimiento académico, respecto a los que participan en el aprendizaje tradicional.

Variables:

Las variables incluidas en el estudio son:

Variable Independiente:

Metodología del cambio de cuadros o marcos.

Los indicadores que operacionalizan la variable independiente son los siguientes:

- Comprensión de las actividades a realizar.
- Usar los conocimientos previos y la comprensión para tomar decisiones.
- Usar formas de representación física, numérica, geométrica, gráfica y de otro tipo.
- Pasar de una representación a otra.
- Hacer y comprobar conjeturas.
- Explicar soluciones a sus compañeros de grupo y de curso.
- Aplicar estrategias y conocimientos conocidos en situaciones nuevas o más complejas.

Variable Dependiente.

1. Rendimiento académico:

   Los indicadores cualitativos que operacionalizan la variable dependiente son:

   - Reconocer, describir y crear patrones, numéricos o geométricos y describirlos como reglas generales.
   - Generalizar a partir de situaciones concretas o numéricas.

- Representar los conceptos de multiplicación y factorización de expresiones algebraicas en forma gráfica.
- Realizar operaciones con expresiones algebraicas como objetos: reducción de términos semejantes, multiplicación, factorización, resolución de ecuaciones lineales en una variable.
- Utilizar las expresiones algebraicas como enunciados generalizados de las operaciones aritméticas

El indicador cuantitativo para operacionalizar esta variable es:

- Calificaciones obtenidas por los estudiantes en las pruebas de evaluación escritas.

CAPITULO 2

Marco Referencial

2.1 Psicología cognitiva y la enseñanza de la matemática.

Según Woolfolk (1999, p. 204), "el aprendizaje es un proceso por el que la experiencia produce un cambio relativamente permanente en el conocimiento o la conducta del individuo, modificación que puede ser deliberada o no, para mejorar o para empeorar". Este cambio es el producto de una experiencia o interacción de una persona con el medio. Los psicólogos cognoscitivistas destacan el cambio en el conocimiento, considerando que el aprendizaje es una actividad mental interna que no puede observarse de manera directa, como el pensamiento, la memoria y la solución de problemas. Los psicólogos conductistas del aprendizaje, suponen que el resultado del aprendizaje es un cambio conductual y que es producto de acontecimientos externos al individuo.

Woolfolk destaca que los puntos de vista cognoscitivo y conductual del aprendizaje difieren en sus suposiciones de lo que se aprende. La postura cognoscitiva considera que el individuo aprende activamente, que inicia experiencias, busca información para resolver problemas y reorganiza lo que ya conoce para aumentar su comprensión. Las dos posturas plantean que el reforzamiento es importante para el aprendizaje, los conductistas sostienen que el reforzamiento fortalece las respuestas, los cognoscitivistas ven el reforzamiento como una fuente de retroalimentación acerca de lo que probablemente ocurra de repetir las conductas, es una fuente de información para la adquisición de nuevos conocimientos o modificación de conductas. Para Glaserfeld (1987, p. 11) el reforzamiento en el conductismo surge de reconocer y enfatizar conductas específicas incrementando la probabilidad de su recurrencia, se ha entendido que es el efecto de ciertas mercancías por ejemplo el reconocimiento social. Este mal entendido oscurece la única cosa que es, con mucho, el refuerzo principal de un organismo cognitivo: el lograr una organización satisfactoria, una forma viable de tratar con algunos sectores de la experiencia. La recompensa proviene del logro, de la imposición deliberada del éxito de un orden que es inherente a sus propias formas de organización.

Los psicólogos cognoscitivistas estudian una amplia gama de situaciones de aprendizaje, y se han interesado en las diferencias individuales y del desarrollo en la cognición, por lo que hay varias teorías del aprendizaje cognoscitivas, las cuales tienen sus fundamentos en los trabajos de Jean Piaget y sus colaboradores (Gómez, 1999, p. 81). Para estos psicólogos el aprendizaje implica más que un cambio observable en la conducta del individuo, se refiere también a cambios en procesos mentales no observables que pueden reflejarse o no, en algún momento futuro en la conducta.

Gran parte de la labor de Piaget se basaba en la idea de que los individuos desarrollan ciertas estructuras de pensamiento siempre que mantenga una relación normal con el entorno físico y social. La idea general era, que las personas estaban conformadas biológicamente para interrelacionarse con su entorno de formas determinadas. A lo largo de esta interrelación, se formaría una secuencia de estructuras complejas de pensamiento. Piaget identificó cuatro factores que interactúan para influir en los cambios del pensamiento: maduración biológica, actividad, experiencias sociales y equilibrio (Woolfolk, 1999, p. 27). Con la maduración física aumenta la capacidad de actuar y aprender sobre el ambiente, al ir creciendo las personas, no sólo adquieren más conocimientos, sino que desarrollan estructuras cognitivas nuevas y más complejas. Cuando se actúa sobre el ambiente, es decir, cuando exploramos, probamos, observamos y organizamos información, modificamos nuestros procesos de pensamiento. Al desarrollarnos también nos relacionamos con las personas que nos rodea, y adquirimos los conocimientos que ya posee nuestra cultura.

Piaget (Woolfolk, 1999, p. 28) concluyó que todas las especies heredan dos tendencias básicas; la organización y la adaptación.

La Organización: Las personas nacen con la tendencia a organizar sus procesos de pensamiento en estructuras psicológicas o sistemas para comprender y relacionarse con el mundo. Piaget denominó a estas estructuras esquemas, y en su teoría son bloques básicos de construcción del pensamiento, sistemas organizados de acciones o pensamientos que nos permiten hacer representaciones mentales, pensar en objetos y acontecimientos de nuestro mundo.

La Adaptación: La gente suele por herencia adaptarse a su ambiente. En el proceso de adaptación participan dos procesos básicos: la asimilación y la acomodación.

La asimilación tiene lugar cuando se utilizan los esquemas que se poseen para dar sentido a los nuevos conocimientos, ajustándolos a lo que ya se conoce. La acomodación ocurre cuando una persona debe cambiar los esquemas que posee para responder a una nueva situación.

De acuerdo con Piaget, la organización, la asimilación y la acomodación pueden verse como una especie de acto complejo de ponderación. Los cambios en el pensamiento tienen lugar mediante el proceso de equilibrio; hay equilibrio si al aplicar un esquema en particular a una situación el esquema funciona, pero si el esquema no funciona se motiva a la búsqueda de otra solución mediante la asimilación o acomodación, con lo que el pensamiento cambia y avanza.

Piaget propuso que conforme los niños crecen pasan por cuatro etapas de desarrollo cognitivo: sensoriomotora, preoperacional, en las operaciones concretas y en las operaciones formales. En la etapa sensoriomotora, los infantes exploran el mundo mediante sentidos y actividad motora y trabajan para dominar la noción de permanencia de los objetos. En la etapa preoperacional, empieza el pensamiento simbólico y las operaciones lógicas. Los niños que se encuentran en la etapa de operaciones concretas pueden pensar en forma lógica acerca de situaciones que estén presentes físicamente y mostrar las nociones de conservación, reversibilidad, clasificación y seriación. La capacidad para el razonamiento hipotético-deductivo, permite al individuo coordinar un conjunto de variables e imaginar otros mundos, es capaz de razonar basándose en hipótesis, y todas las posibilidades lógicas, implica la forma de pensamiento más avanzadas del razonamiento matemático y científico. Los individuos pueden pasar largos periodos de transición entre las etapas y muestran las características de una etapa en una situación y en otras pueden presentar características de etapas inferiores o superiores.

La idea más importante de Piaget (Woofolk, 1999, p. 40) sobre el proceso de aprendizaje es que los individuos construyen su propia comprensión, la actividad se centra sobre todo en un intento de desarrollar tareas y problemas determinados por parte del estudiante. Supone una

actividad por parte del alumno que implica, ensayar ideas, hacer pruebas para descubrir cuales métodos o estrategias funcionan como solución. Esto exige al docente preparar materiales de aprendizaje y entornos de aprendizaje que faciliten las actividades intelectuales para desentrañar el sentido de los conceptos. Los estudiantes deben ser capaces de incorporar la información que le brinda el docente a sus propios esquemas, actuando sobre los datos, manipulando objetos físicos y mentales que surgen de experimentos o proyectos grupales. El docente debe ser un guía y orientador del proceso de enseñanza y aprendizaje, él por su formación y experiencia conoce que habilidades requerirles a los alumnos según el nivel en que se desempeñe, para ello deben plantearles distintas situaciones problemáticas que los perturben y desequilibren. En síntesis, las principales metas de la educación en general y la de los docentes en particular son: en principio formar hombres que sean capaces de crear cosas nuevas, hombres creadores e inventores; la segunda meta es la de formar mentes que estén en condiciones de poder criticar, verificar y no aceptar todo lo que se le expone. Esto, en la sociedad actual, es muy importante ya que los peligros son, entre otros, caer en la cultura de los slogans o en las opiniones colectivas y el pensamiento dirigido. En consecuencia es necesario formar alumnos activos, que aprendan pronto a investigar por sus propios medios, teniendo siempre presente que las adquisiciones y descubrimientos realizadas por si mismo son mucho mas enriquecedoras y productivas. Sin embargo, se critica a Piaget porque descuida en su teoría los importantes efectos del grupo social y cultural del niño. En la actualidad, los psicólogos reconocen que la cultura da forma al desarrollo cognoscitivo al determinar qué y como aprenderá el niño acerca del mundo (Woolfolk, 1999, p.44).

Lev Vygotsky y su escuela propuso a finales de la década de 1920 y a comienzos de la de 1930, una explicación del desarrollo cognitivo; el crecimiento de las funciones cognitivas, depende en gran medida de las relaciones con la gente que está presente en el mundo del niño y las herramientas que la cultura le da para apoyar el pensamiento (Woolfolk, 1999, p. 44). El postulado fundamental de este enfoque consiste en que las funciones psicológicas humanas difieren de los procesos psicológicos de otros animales, porque están culturalmente mediados, se desarrollan históricamente y surgen de la actividad práctica. Considera al proceso educativo como el contexto de actividades en la cual se desenvuelven seres humanos en

situaciones culturales determinadas y en etapas históricas determinadas. Vygotsky (Cole, 1990, p. 111) sostiene que la mediación cultural proporciona los artefactos conceptuales y materiales que proceden de generaciones anteriores, como instrumentos para la interacción con el mundo, los cuales se funden con la actividad del individuo para crear nuevos procesos mentales. Las herramientas reales y simbólicas, como las ideas, actitudes, imprentas, calculadoras, computadoras, sistemas numéricos, los signos y los códigos, y el lenguaje, desempeñan funciones muy importantes en el desarrollo cognitivo. El desarrollo cognitivo ocurre a partir de las conversaciones e intercambios que el niño sostiene con miembros más conocedores de la cultura, adultos o compañeros más capaces. Estos intercambios son muy importantes para la resolución de problemas cuando el niño se encuentra a punto de resolver y para lograrlo sólo necesita cierta estructura, recordatorios o aliento para seguir buscando la solución. " La distancia entre el nivel de desarrollo real, en tanto determinado por la capacidad de resolver problemas de manera independiente, y el nivel de desarrollo potencial, en tanto determinado por la capacidad de resolver problemas bajo la orientación de un adulto o en colaboración de pares más capacitados", Vygostsky la llamó zona de desarrollo próximo (Tudge, 1990, p. 189).

Moll (1990, p. 20) presenta tres características que suelen presentarse en la zona de desarrollo próximo:

- Establece un nivel de dificultad. Este nivel, que se supone es el nivel próximo, debe ser algo desafiante para el estudiante, pero no demasiado difícil.
- Proporciona desempeño con ayuda. El adulto proporciona práctica guiada al niño con un claro sentido del objetivo o resultado del desempeño del niño.
- Evalúa el desempeño independiente. El resultado más lógico de una zona de desarrollo próximo es que el niño se desempeñe de manera independiente.

El trabajo de Vygotsky implica dar a los estudiantes la oportunidad del trabajo cooperativo, alentarlos a emplear el lenguaje para organizar sus pensamientos en las discusiones de grupo o al defender las ideas del grupo. Implica también el diseño de tareas de aprendizaje y de evaluación que conduzcan a la resolución de problemas por sí mismos.

Otra concepción teórica del aprendizaje desde el enfoque constructivista es el *aprendizaje significativo* planteada por el psicólogo David Ausubel, quien postula que el aprendizaje implica una reestructuración activa de las percepciones, ideas, conceptos y esquemas que el aprendiz posee en su estructura cognitiva (Díaz-Barriga, 2002, p.35). Para Ausubel el aprendizaje no es una simple asimilación pasiva de información literal, el sujeto la transforma y estructura, los materiales de estudio y la información proporcionada se interrelacionan e interactúan con los esquemas de conocimiento previo y las características personales. El aprendizaje significativo es aquel que conduce a la creación de estructuras de conocimiento mediante la relación sustantiva entre la nueva información y las ideas previas de los estudiantes. Las actividades de aprendizaje deben estar planificadas y desarrolladas en base a aquello que el aprendiz ya sabe, a la actitud de éste por aprender y de la naturaleza de los materiales y contenidos de aprendizaje. Tomando en cuenta que los alumnos poseen diferentes niveles de conocimientos previos y difieren en su disposición para aprender, algunos necesitan más actividades prácticas para comprender. Si los alumnos desarrollan ideas positivas sobre la relación entre su propio esfuerzo y los resultados que obtiene, acrecentará la tendencia de asignarse la responsabilidad de sus éxitos o fracasos.

Las investigaciones de los cognoscitivistas sobre como aprende las personas, han proporcionado los fundamentos para las prácticas educativas en la enseñanza de la Matemática. Diversos investigadores como Rochelle Kaplan, Takashi Yamamoto, Alan Shoenfeld (Resnick, 1989, p. 33), Brousseau, Y. Chevallard entre otros, han tomado las ideas de Piaget, Vygotsky, Ausubel y otros, para entender la naturaleza y desarrollo de la comprensión matemática de los niños y así mejorar las prácticas educativas.

De los investigadores que se han interesado en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, se han destacado en los últimos años principalmente en Francia: Brousseau, Chevallard y Vergnaud. (Godino, 1991, p. 23). Estos han realizado estudios para sustentar teóricamente los conceptos y métodos para la enseñanza de la Matemática y las ciencias, tomando en cuenta las dimensiones epistemológicas, sociales y cognitivas.

2.2 Didáctica de la matemática como ciencia

Según Brousseau (1986, p.86) "« La didáctica de las matemáticas » estudia las actividades didácticas, es decir las actividades que tienen como objetivo la enseñanza, evidentemente en lo que ellas tienen de específico para las matemáticas". Estos estudios se refieren al comportamiento cognoscitivo de los alumnos, a los tipos de situaciones puestas en acción para enseñarles y principalmente a los fenómenos relacionados con la comunicación del saber matemático.

Para Godino (1991, p. 35) la didáctica de la matemática puede definirse como el campo de investigación científico-tecnológico emergente, en el que se identifican un cúmulo de teorías competitivas, expresadas generalmente de un modo informal y dependientes especialmente de planteamientos psicológicos. Godino sin embargo, plantea que la Didáctica de la Matemática no puede quedar relegada como un apéndice técnico de teorías más generales, y cita de Benedito (1987) las características para considerarla como una ciencia (Godino, 1991, p.35): el saber científico, saber tecnológico y el hacer técnico entre otros.

Como saber científico; recibe aportaciones de otras ciencias, como la psicología, la sociología. Intenta elaborar teorías descriptivas, explicativas o axiomáticas de menor a mayor formalización, a partir de los resultados de la investigación. Se proyecta sobre la tecnología, y utiliza el método científico.

Como saber tecnológico: Utiliza el método científico y el método tecnológico. Se apoya en modelos y diseños progresivamente rigurosos y adecuados a la idiosincrasia de la didáctica, con evaluación de resultados. Está en continua interacción con la práctica.

Como hacer técnico: Se nutre, o se ha de nutrir, de las normas, leyes o reglas derivadas del saber científico y del tecnológico. Adapta la norma con flexibilidad a cada caso particular y no al revés. Es el punto de partida de nuevos enfoques, revisiones e investigaciones destinados a mejorar el saber tecnológico y el científico.

Para Godino (1995, p.144) el fin específico de la Educación Matemática, como campo de investigación, es el estudio de los factores que afectan a la instrucción sobre las matemáticas (enseñanza y aprendizaje de la misma en instituciones educativas) y el desarrollo de programas para la mejora de dicha instrucción. Como consecuencia, una cuestión prioritaria deberá ser la indagación sobre la naturaleza del propio conocimiento matemático, así como de

su génesis personal e institucional. Distingue tres ámbitos o campos de estudio de la Educación Matemática:

- La acción práctica reflexiva sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- La investigación científica, que trata de comprender el funcionamiento del sistema de enseñanza de las matemáticas en su conjunto y de los sistemas didácticos particulares (profesor, alumnos y saber a enseñar), y, en cierta medida, predecir su comportamiento.
- La tecnología didáctica, que se propone poner a punto materiales y recursos, usando los conocimientos científicos disponibles, para mejorar la eficacia de la instrucción matemática.

Los fundamentos teóricos y metodológicos de la Educación Matemática se basan en el estudio de las principales ideas de distintas tendencias y paradigmas especialmente de la denominada Escuela Francesa de Didáctica de la Matemática. En cuanto al paradigma metodológico, Godino (1995, p. 158), formula una agenda de investigación sobre las cuestiones de enseñanza y aprendizaje que requiere la recogida de datos de naturaleza diversa y al uso de diseños de investigación experimentales y cuasi-experimentales. Así mismo, el empleo de técnicas de análisis de datos multivariantes, que permitan estudiar la estructura de los conocimientos de los estudiantes y su evolución como consecuencia de actuaciones didácticas planificadas.

La Didáctica de la Matemática como ciencia, "estudia los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos, particularmente en situación escolar" (Peltier, 1993, p.1). La Didáctica de la Matemática es un campo científico reciente; nació en los años setenta en el contexto de la reforma de las matemáticas modernas en Francia, con la creación de los Institutos de investigación en enseñanza de las matemáticas (IREM).

Los equipos IREM desarrollaron metodologías de investigación propias de la tradición francesa como la ingeniería didáctica encontrada particularmente en los trabajos de Brousseau, Artigue, Douady, la teoría de situaciones didácticas y de obstáculos de Brousseau, la transposición didáctica de Chevallard, los conceptos asociados con la dialéctica

herramienta- objeto y el juego de cuadros de Douady, entre otros, los cuales constituyen los fundamentos científicos de éste estudio.

2.3 Los Conceptos ligados a la investigación en Educación Matemática en el paradigma constructivista:

2.3.1 Teoría de Situaciones Didácticas (Guy Brousseau)

La Teoría de Situaciones Didácticas postula que "cada conocimiento o cada saber debe ser determinado por una situación. Una situación didáctica es un conjunto de relaciones que ligan a un agente o a varios" (Brousseau, 1987, p. 2). Estas relaciones implican que el docente prepare tareas de altos niveles de pensamiento matemático y lógico, de tal forma que pueda mantener el interés del alumno. La situación planteada debe ser de interés para el alumno, y que induzca a la creación de estrategias para encontrar la solución.

La teoría de situaciones es una teoría de aprendizaje constructiva, establece que el aprendizaje se produce mediante la resolución de problemas, donde se le asigna al resolutor el papel de constructor dándole la oportunidad de ensayar ideas, hacer pruebas para descubrir cuales estrategias de resolución funcionan y cuales no. El alumno tiene la posibilidad de modificar su estrategia de solución una vez iniciado el proceso de solución.

La teoría de situaciones didácticas difiere de otras teorías constructivistas por el modo de afrontar las relaciones entre el alumno y el saber (Godino, 1991, p.133). Godino, establece que los contenidos son el subtracto sobre el cual se va ha desarrollar la jerarquización de estructuras mentales. Su objetivo primordial es el estudio de las condiciones en las cuales se constituye el saber, con el fin de optimizar su control y su reproducción en situaciones escolares. Se le da mucha importancia al objeto situación-problema, ya que constituye el medio de interacción entre alumno y profesor. Esta situación-problema debe interesar al alumno en la búsqueda de estrategias y soluciones que constituye el verdadero conocimiento ha ganar.

Según Brousseau, (1987, p. 2), a situaciones diferentes les corresponden conocimientos diferentes, por lo tanto, el conocimiento nunca es exactamente el mismo para sus creadores, para sus usuarios, para los alumnos o para diferentes grupos de alumnos. Los conocimientos pueden aparecer en las situaciones originales, pero los conocimientos culturales y las relaciones sociales condicionan la práctica o aplicación del saber en la realidad. Por lo tanto

lo que se debe hacer es modelizar las situaciones características de un saber para adaptarlo a las condiciones del alumno y al entorno de este.

2.3.2 Transposición didáctica:

Para Chevallard (1999, p. 8), un saber se produce dentro de una institución (la comunidad científica), el cual puede ser utilizado, enseñado y aprendido dentro de otra institución (en este caso la escuela). Este saber deberá ser reproducido en la medida que ya exista en la institución creadora, a partir de la cual se podrá proponer importarlas a la escuela. Las condiciones impuestas por medio de la escuela hacen que, el saber no pueda ser reproducido de manera idéntica a lo creado, sino que sufrirá, en esta transferencia determinadas modificaciones adaptativas: Se hablará pues, no de transferencia sino de transposición del saber producido en un saber a enseñar.

Chevallard citado por Godino (1991, p. 44) se refiere a la transposición didáctica como "la adaptación del conocimiento matemático para transformarlo en conocimiento para ser enseñado". Un objeto del saber es sometido a un proceso de transformación con la finalidad de que sea reconstruido o descubierto por el alumno. Para esta transposición el docente debe considerar, las concepciones previas que los alumnos han elaborado en su entorno, sobre el saber y ser creativo; el planteamiento de situaciones que minimicen las diferencias entre el saber y el saber enseñado, evitando que el proceso transmita significados inadecuados sobre los objetos matemáticos.

La constitución de un texto con fines didácticos reduce lo esencial del concepto, de los problemas o utilidades de donde en realidad surgió el concepto, se puede dar la deshistorización o descontextualización del saber enseñado. Con la finalidad de reducir las diferencias entre el saber y el saber enseñado las situaciones didácticas deben presentar la posibilidad de presentarlo en condiciones similares en las que se descubrió.

2.3.3 Campos conceptuales

La teoría de los campos conceptuales es "una teoría cognoscitivista que busca proporcionar un marco coherente y algunos principios de base para el estudio del desarrollo y el aprendizaje de competencias complejas, especialmente aquellas que utilizan la ciencia y la técnica".

(Vergnaud, 1990, p.1). Su finalidad principal es proporcionar un marco que permita comprender las dependencias y las rupturas entre conocimientos, tanto los intuitivos como la cultura adquirida. Para Vergnaud un concepto no puede reducirse a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y en su enseñanza. A través de situaciones y problemas por resolver es como un concepto adquiere sentido para el alumno.

Los campos conceptuales para Vergnaud (Godino, 1995, p. 26) son conjuntos de situaciones cuyo análisis y tratamiento requiere varios tipos de conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas que están conectadas unas con otras y, probablemente entrelazados durante el proceso de adquisición. Son ejemplos de campos conceptuales las estructuras aditivas, estructuras multiplicativas, la lógica y el álgebra elemental.

Para Vergnaud (Moreira, 2002, p. 4) los campos conceptuales son unidades de estudio fructíferas para dar sentido a los problemas de adquisición y a las observaciones hechas en relación a la conceptualización, considerada como el núcleo del desarrollo cognitivo. Esto implica enfocar la atención en la organización de actividades que den sentido a una situación para el alumno. A estas formas de organización de las habilidades sensorio-motoras y de las habilidades intelectuales Piaget las nombró esquemas. Para él son esquemas por ejemplo contar objetos, hacer un gráfico o un diagrama, hacer un discurso, o crear un algoritmo.

Moreira (2002, p.7), ante esto destaca, que los algoritmos que se utilizan repetidamente para tratar las mismas situaciones, se transforma en hábitos. El desarrollo cognitivo consiste sobre todo y principalmente, en el desarrollo de una gran cantidad de esquemas. Según Moreira (2002, p. 15) la teoría de los campos conceptuales establece que la adquisición de conocimientos es moldeada por las situaciones y problemas previamente dominados. Los conocimientos previos de los alumnos no se deben considerar como errores, como incompletos, imperfectos y deficientes, más deben ser utilizados como mecanismos para asegurar el progreso cognitivo.

2.3.4 Ingeniería didáctica

Otra noción teórica que ha surgido de las últimas investigaciones de la Didáctica de la Matemática es la Ingeniería Didáctica de Michèle Artigue y Régine Douady, surgió como

una metodología para las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la teoría de situaciones didácticas y de la transposición didáctica.

La Ingeniería Didáctica tiene dos propósitos en la didáctica de la matemática:

Es una herramienta de trabajo de los profesores para la elaboración de realizaciones didácticas sustentadas y reflexivas. El término ingeniería didáctica, "designa un conjunto de secuencias de clases concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada" (Douady, 1995, p.61). El proyecto evoluciona según las reacciones de los estudiantes y en función de las actividades seleccionadas por el profesor, las cuales puede adaptar en el transcurso del proyecto a la dinámica del grupo. Una ingeniería didáctica designa una forma de investigación que toma en cuenta todo el proceso complejo de la clase desarrollada.

La Ingeniería Didáctica también es una metodología de investigación para la producción de conocimiento acerca del sistema didáctico a través de la formulación, aplicación y evaluación del efecto de realizaciones didácticas en el sistema educativo. Artigue (1995, p. 33) denomina a una ingeniería didáctica como "la forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico". Es un esquema experimental basado en la realizaciones didácticas en clase, es decir sobre la concepción, observación y análisis de las secuencias didácticas. La ingeniería didáctica se caracteriza por el estudio de casos y su validación en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. El juego de cuadros de Duady (Artigue, 1995, p. 41) es una ingeniería didáctica que pone en escena la dialéctica herramienta-objeto, organizando situaciones didácticas alrededor de problemas que den significado a los conceptos matemáticos implicados, en el caso del aprendizaje del álgebra elemental que conducen al desarrollo de habilidades propias del pensamiento algebraico.

2.3.5 Pensamiento Algebraico

Según Feldman (2002, p. 271), "el pensamiento es la manipulación de representaciones mentales de información. La representación puede ser una palabra, una imagen visual, un sonido o datos en cualquier otra modalidad". Al pensar se transforma la representación de la

información en una nueva y diferente con el fin de responder una pregunta, resolver un problema o ayudar a alcanzar una meta, utilizando mecanismos de memoria, la atención, las representaciones o los procesos de comprensión. Según el diccionario de psicología (Dorsch, 1981, p. 690) “el pensamiento consiste en la comprensión y elaboración de significados, relaciones y conexiones de sentido”. El pensamiento se manifiesta a partir de tres grandes campos (Ayala, 2004, p.15): el pensamiento como conocimiento, el pensamiento como actitud y el pensamiento como habilidad, los que interactúan entre sí para abastecerse unos a otros y complementar y dar forma al pensamiento. Sin embargo según este autor para formar el pensamiento la actitud tiene una función importante, ya que de ahí depende la disposición o voluntad que el ser humano tiene para profundizar o no sobre cualquier conocimiento. El pensamiento como una de las funciones mentales de alto nivel utiliza procesos básicos pero incluye elementos funcionales adicionales, como estrategias, reglas y heurísticas.

El pensamiento se estudia sistemática y cotidianamente en diversos escenarios profesionales. En psicología el estudio del pensamiento humano se ocupa de entender como aprenden las personas, como realizan diversas tareas y cómo se desempeñan en sus actividades. En el campo de la didáctica de la matemática se tiene interés por estudiar la psicología del pensamiento matemático.

El estudio del pensamiento matemático se interesa por “caracterizar o modelar los procesos de comprensión de los conceptos y procesos propiamente matemáticos” (Cantoral, 2000, p.18). Estudia las razones, los procedimientos, las explicaciones, las escrituras o las formulaciones verbales que el estudiante construye para responder a una tarea matemática y los mecanismos mediante los cuales la cultura y el medio contribuyen en la formación de los conceptos matemáticos. Como docentes, interesa analizar las ejecuciones de los alumnos ante tareas matemáticas, tanto simples como complejas, como formas de entender el proceso de construcción de los conceptos y procesos matemáticos. Los estudios cognitivos han tenido fuerte influencia en el entendimiento de las nociones matemáticas. Una de estas nociones es el entendimiento del pensamiento algebraico, por presentar muchas dificultades en su desarrollo en la educación escolar.

Para Steel (2004, p. 1), el término, pensamiento algebraico (algebraic thinking) aunque incluye variables y expresiones, tiene una connotación más amplia y diferente que el término álgebra, cita las definiciones de varios autores entre ellas:

Kieran, se refiere al pensamiento algebraico como "el uso de una variedad de representaciones que manejan situaciones cuantitativas de manera correlativa". Para Swarfford y Langrall (citado en Steel (2004, p. 1)) el pensamiento algebraico es "la habilidad de operar en una cantidad desconocida como si la cantidad fuera conocida, en contraste con el razonamiento aritmético qué involucra funcionamientos en cantidades conocidas." Drisoll (citado en Steel (2004, p. 1)) considera que el pensamiento algebraico es "la capacidad de representar situaciones cuantitativas como las relaciones claras entre variables"

Chavarría (2005, p. 109), presenta una síntesis para detectar de qué manera están inmersas las habilidades del pensamiento algebraico en la forma de pensar del alumno, se debiera observar si tiene actitud reflexiva, es decir, si actúa tratando de ejecutar la actividad reflexivamente; pregunta, escucha, analiza, discute con los demás y:

- Sabe usar el lenguaje algebraico para expresar relaciones.
- Sabe usar y trabajar con representaciones y símbolos.
- Sabe preguntarse a sí mismo.
- Sabe extraer información del problema.
- Sabe representar una situación en palabras, diagramas, tablas, gráficas y ecuaciones.
- Sabe reconocer métodos generales similares en diferentes tipos de problemas.
- Muestra capacidad de reflexionar al hablar sobre los procedimientos generales que se efectúan sobre números y símbolos.
- Puede validar conjeturas, pero también hacerlas e investigarlas.
- Identifica relaciones funcionales.
- Sabe construir el significado de los símbolos y de las operaciones en el álgebra.
- Sabe manipular u operar expresiones simbólicas.
- Tiene capacidad de operar con una cantidad desconocida como si fuera conocida.
- Tiene la capacidad de trabajar con variables como si fueran números.
- Tiene la capacidad de manipular fórmulas.
- Sabe escribir y usar la notación correctamente y con significado.

_ Sabe trabajar métodos paso a paso en los problemas.

_ Sabe generalizar modelos.

_ Tiene la capacidad de reconocer patrones.

_ Tiene la capacidad de organizar datos.

_ Tiene la capacidad para reconocer que al introducir las incógnitas en una tabla se convierten en variables.

_ Tiene la capacidad para discernir entre lo que se mantiene constante y lo que varía.

_ Tiene la capacidad para utilizar múltiples representaciones, diagramas, tablas, graficas, ecuaciones, series, identidades, relaciones funcionales, y otras, al resolver un problema.

_ Tiene la capacidad para darle sentido y significado a los elementos que conforman una ecuación o relación funcional dentro del contexto.

_ Sabe encontrar y comprobar las generalizaciones.

_ Sabe reconocer y usar propiedades generales de sistemas numéricos y sus operaciones.

_ Tiene capacidad para articular tanto el razonamiento algebraico como geométrico.

_ Muestra capacidad para desarrollar y evaluar argumentos matemáticos: qué significa preguntarse ¿por qué esto funciona?

_ Puede interactuar entre la conceptualización que tienes sobre la variación y la variable.

_ Puede pensar en cómo “funcionan” las funciones.

_ Tiene la capacidad de entender todo el proceso de resolución que se requiere en el problema con el fin de llegar a la meta propuesta.

_ Sabe reflexionar sobre el procedimiento expresándolo verbalmente y por escrito.

_ Sabe hacer transformaciones sintácticas y luego verificar si desde la solución se puede llegar a la situación original (proceso de reversibilidad).

_ Sabe interpretar las soluciones de incógnitas.

_ Hace transformaciones sintácticas y luego puede percibir globalmente el problema.

_ Muestra capacidad para usar materiales concretos, calculadoras o computadoras en relación a las expresiones simbólicas asociadas.

_ Reconoce el impacto de las estructuras numéricas sobre los cálculos con símbolos.

Ursini (2005, p. 22), plantea que para que el alumno puede trabajar con cierto éxito en el álgebra elemental, es necesario que, trabaje con las incógnitas, pero también con los números generales y con las relaciones funcionales, y que pase con flexibilidad entre estos distintos usos de la variable. También es necesario que el alumno maneje las reglas sintácticas que rigen el lenguaje algebraico, pero que pueda relacionar los distintos usos de la variable con diversas situaciones. Para el logro de estas capacidades Ursini, propone los siguientes aspectos que caracterizan el uso de la variable para el desarrollo de habilidades algebraicas:

Actividades que involucran el manejo de la variable como incógnita:

- Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.
- Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos.
- Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.
- Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.
- Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

Actividades que involucran el manejo de la variable como número general:

- Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.
- Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.
- Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.
- Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.
- Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

Actividades que involucran el manejo de las variables como una relación funcional:

- Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
- Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.
- Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la variable dependiente.
- Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
- Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.
- Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema.

2.4 Enseñanza del álgebra, Escuela Francesa, Investigaciones en América Latina

2.4.1 Descripción del álgebra escolar:

El álgebra trata de la simbolización de las relaciones numéricas generales y de estructuras matemáticas, así como de la operación sobre estas estructuras. Tradicionalmente la enseñanza del álgebra, ha tratado del cálculo con polinomios con una variable numérica, escritos en forma de combinaciones lineales de monomios con coeficientes reales o de productos de factores (Douady, 1995, p.76). Estos temas se trabajan en nivel de simbología, sin problemas que los hagan interesantes o les den sentido. Se trata de cálculo literal y no de cálculo algebraico presentado y tratado como la extensión del cálculo aritmético, solo que utilizando letras, o como una serie de reglas a aplicar. Los temas típicos incluyen en el estudio del álgebra elemental son: el cálculo literal, es decir, el cálculo que se realiza sobre expresiones que tienen letras y números, la práctica de productos y factorizaciones, aprendizaje de la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Según Ursini (2005, p. 11), el inicio de la enseñanza del álgebra escolar se caracteriza por la introducción de los símbolos literales, comúnmente llamados variables, para representar números. En esta etapa escolar, se acostumbra a los alumnos a considerar las letras como etiquetas que se refieren a entidades específicas o la relacionan con la letra inicial de una palabra; por ejemplo es muy común utilizar "b" para referirse a la palabra "base". Al iniciar la escuela secundaria, el uso de las letras es más frecuente en contextos no geométricos y se espera que los alumnos ya no las consideren como etiquetas, sino, que las interpreten como incógnitas o como números indeterminados, dependiendo de la expresión o la situación en la que aparecen.

Para Kieran (1994, p. 4) las demandas cognitivas que deben cubrir los estudiantes en el estudio del álgebra incluyen:

- El tratamiento de representaciones simbólicas que tienen muy poco o ningún contenido semántico como objetos matemáticos y la operación sobre estos objetos con procesos que usualmente no arrojan resultados numéricos. Las representaciones algebraicas se tratan como objetos matemáticos sobre los cuales se realizan operaciones tales como reducir términos, factorizar, entre otros.
- La modificación de sus interpretaciones iniciales de ciertos símbolos. El ejemplo de ésta demanda es el uso del símbolo de la operación multiplicación y el signo de la igualdad.
- Representar las relaciones de situaciones enunciadas en palabras con operaciones que frecuentemente son las inversas a las que utilizaban en aritmética. Por ejemplo en la ecuación $3k = m$, el alumno debe comprender que el valor de m es mayor que el valor de k, es decir que el número m es tres veces el número k y no viceversa.

Douady (1995, p.77) concibe el aprendizaje del cálculo algebraico como el equilibrio o la interacción entre la construcción del significado y la familiaridad técnica con los algoritmos. Plantea el estudio del álgebra desde la componente semántica y la sintáctica. En la componente semántica se enfatiza el status de herramienta de las nociones y las relaciones con nociones diferentes internas o externas a las matemáticas. Para la componente sintáctica se acentúan los sistemas de representación simbólicos, la manera como funcionan y como son

tratados por los estudiantes. El modelaje algebraico ofrece la oportunidad para que el profesor y el estudiante se enfrente a estos dos componentes y a la interacción en la evolución de la relación didáctica. En álgebra, al menos, el significado no basta, es necesario tener en cuenta la influencia de este en la elaboración de algoritmos y, simultáneamente trabajar en no depender de ellos. Según Douady, no basta con unos o varios problemas para que el estudiante maneje a plenitud una competencia algebraica, es una cuestión de larga duración y requiere una vigilancia intelectual constante.

La forma cómo el estudiante confronta la manipulación de expresiones algebraicas, realiza una distinción de concebir el álgebra. Para Sfard (Kieran, 1995, p. 2), un estudiante concibe estructuralmente el álgebra, cuando es capaz de manipularla como un todo sin requerir detalles, como objetos en si mismos y la concibe operacionalmente cuando las representaciones algebraicas se tratan como enunciados generalizados de las operaciones aritméticas. El manejo estructural del álgebra puede estar reflejado por la deducción y comprensión de patrones numéricos o geométricos, mientras que es operacional, determinar el valor numérico de una expresión.

Por ejemplo el manejo estructural del álgebra lo refleja un estudiante al deducir la fórmula para la diferencia de cuadrados $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ a partir de relaciones numéricas y gráficas. Sin embargo, es operacional el desarrollo del producto $(a+b)(a-b)$ aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación de números reales.

Ursini (2005, p. 11), destaca que en la educación secundaria se trabaja esencialmente en tres usos distintos de la variable: las incógnitas, los números generales y las relaciones funcionales.

Investigaciones realizadas han señalado que los estudiantes, tienen muchas dificultades con las variables, les cuesta apropiarse del concepto y desarrollar la capacidad de pasar de manera flexible entre los diferentes usos de la variable. Sin realizar investigaciones formales es muy notoria esta deficiencia en nuestros alumnos, reflejado en el rendimiento escolar y especialmente en el mal uso de las variables en la resolución de problemas y en ejercicios rutinarios de álgebra.

Por ejemplo, los resultados de una prueba diagnóstica sobre conocimientos de álgebra elemental en el Instituto José Trinidad Reyes (Díaz, 2004, p.79) presentó los siguientes resultados: La categoría "traducción del lenguaje simbólico al común", alcanzó un rendimiento de 45.8%; seguida de la "resolución de problemas de aplicación" con un 35.5%; En la "traducción del lenguaje común al simbólico" el rendimiento alcanzado fue de 20.6%; mientras que en el "despeje de una variable" obtuvieron un 18.7%.Y en la que obtuvieron más bajo rendimiento (0%) fue en "expresar como ecuación proposiciones que están en lenguaje común".

Algunas de las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes de secundaria y los errores que cometen (Ursini, 2005, 16)

- Dificultades para diferenciar entre los distintos usos de la variable: es muy común que se tenga dificultad para interpretar la variable como un número general o como una incógnita.
- Dificultades para interpretar la letra cuando aparece acompañada de un coeficiente o tiene un exponente: un ejemplo particular de este error es cuando el estudiante escribe $m^2 + m^2 = 4m$, donde tiene problemas en operar con los exponentes y diferenciarlos de los coeficientes.
- Dificultades para aceptar una expresión abierta como respuesta válida: El estudiante está acostumbrado a escribir respuestas numéricas.
- Tendencia a ignorar la letra que representa un parámetro o asignarle un valor.
- Dificultad para reconocer la variación conjunta de dos variables relacionadas.

Ante estas dificultades, con el fin de mejorar el aprendizaje del álgebra, según Ursini (2005, p. 20) los investigadores presentan algunas sugerencias para acercarse al álgebra a través de:

a) La generalización, mediante el reconocimiento de patrones numéricos o geométricos y de métodos generales, expresando las reglas y los métodos usando símbolos literales.
b) Las funciones. Esta propuesta plantea el acercamiento al álgebra a través del trabajo con cantidades relacionadas, hasta llegar a la expresión simbólica de las relaciones utilizando literales.
c) La resolución de problemas. Este enfoque pone énfasis en el análisis de problemas y en la resolución de ecuaciones.

d) Considerar el álgebra como un lenguaje con su propia gramática. Se plantea un acercamiento estructural al álgebra. Dar significado a los símbolos literales por la estructura sintáctica del lenguaje, y es considerada la correcta manipulación de símbolos.

2.5 Estado del arte de las investigaciones sobre enseñanza del álgebra.

Según Ursini (2005, p. 11) numerosas investigaciones se han realizado en las que se han detectado en la mayoría de estudiantes serias dificultades para desarrollar una comprensión adecuada del uso de las letras en álgebra y trabajar de una manera adecuada con ellas. Algunas de estas investigaciones señalan que los estudiantes, de diferentes niveles tienen diversas dificultades con las variables. También se han presentado investigaciones que señalan las dificultades en apropiarse de la esencia del concepto de variable y desarrollar la capacidad de pasar de manera flexible entre los diferentes usos que ésta tiene. Las investigaciones realizadas han estado encaminadas a responder a preguntas como: ¿Qué es lo que lleva a los estudiantes a memorizar las reglas del álgebra?, ¿Qué es lo que hace que la comprensión del álgebra sea una tarea muy difícil para la mayoría?, ¿Es el contenido del álgebra la fuente de problemas?, ¿Es la forma en que se enseña lo que causa no darle sentido al álgebra?, es decir los resultados de estos estudios han hecho aportes sobre, el contenido, enseñanza y aprendizaje del álgebra.

Por ejemplo, Kieran (1995, p.5) presenta el estado de las investigaciones en temas algebraicos:

Términos literales y expresiones, se ha trabajado en los siguientes aspectos:

- Problemas de reconocimiento de limitaciones estructurales en aritmética, que pueden llevar a los mismos problemas en álgebra: $a+b-c$ no es lo mismo que $a-b+c$ (a menos que $b=c$ (Booth, 1984).
- Dificultades para juzgar equivalencias sin hacer equivalencias ¿ son equivalentes estas expresiones : 685-492+947: 947+492-685;…? (Chaiklin y Lesgood, 1984)

- La habilidad de describir bien un método en forma verbal, no implica que se utilice una simbolización correcta del método: Dar el área del rectángulo cuyos lados miden 7 y $f+3$. Se obtienen respuestas de tipo $7f3, f21, f+21$. (Booth, 1984).
- Dificultades para discriminar las diferentes formas de utilizar letras, muy pocos llegan a utilizarlas como variables (Kücheman, 1978, 1981).
- Uso de programa Logo, para facilitar la apropiación del concepto de variable y de función. (Hoyles, Sutherland y Evans, 1985; Noss, 1986).
- Necesidad de transformar expresiones en ecuaciones. No es posible asignar valores a la expresión $a+3$ porque a la expresión le falta el igual y el miembro del lado derecho. (Kieran , 1983)

Simplificación de expresiones:

- Proceso de simplificación de expresiones. En la resolución de ecuaciones cuando hay varios pasos el error más frecuente es el de eliminación. Por ejemplo al simplificar $2yz-2y$ como z (Carry, Lewis, Bernard, 1980)
- Los estudiantes siguen considerando las letras como etiquetas de objetos concretos, lo que los inducen a operarlos como se harían con números. Los estudiantes utilizan nombres de álgebra aunque su trabajo sigue siendo de aritmética. (Thompson y Thompson, 1987)
- Conciencia de la sintaxis algebraica (¿por qué se puede considerar que $2a+a+15$ es igual $3a+15$, en tanto que $a+a+a*2$ no es $3a*2$?) (Bell, Malone, Taylor, 1987)

Ecuaciones:

- Concepción del carácter simétrico y transitivo de la igualdad. Normalmente se considera como un símbolo separador (Behr, Erlwanger, Nichols, 1976)
- Uso de paréntesis, técnicas de construcción de ecuaciones y el proceso de sustitución de expresiones en vez de números (Bell, Malone, Taylor, 1987)
- Operar ecuaciones como objetos matemáticos (Kieran, 1985; Lee y Wheeler, 1989)

Problemas con palabras:

- La mayoría de las investigaciones acerca del problema de los procesos de representación de los estudiantes de álgebra que ellos utilizan o bien una traducción directa, frase por frase a una ecuación que contiene números, variables y operaciones. Algunos investigadores en estos tópicos son, Freudenthal, Resnick y Clement (1980), Fey y Heid (1988)

Funciones y Gráficas; Noción de dependencia:

- Freudenthal (1973,1982), caracterizó las funciones enfatizando la noción de dependencia.
- Shuard y Neil (1977) anotan que la idea de dependencia funcional ha sido completamente desechada de la definición actual de función.

En conclusión, las investigaciones sobre aprendizaje son las que más se han realizado, y aparecen dos temas importantes, la accesibilidad de las interpretaciones estructurales y la dificultad de adquirir la concepción estructural del álgebra. Las investigaciones con profesores de álgebra es mínima, en cuanto al contenido, es frecuente que los profesores enseñen álgebra de los libros y estos no incorporan una perspectiva procedimental-estructural en el aprendizaje de las matemáticas ni muestran como ha evolucionado históricamente el álgebra.

En Honduras las investigaciones sobre la enseñanza del álgebra son muy pocas, entre ellas se encuentran: Aprendizaje de las Matemáticas a través de la resolución de problemas en octavo grado del CIIE-UPNF (Alvarado, M. M. & Suazo, A. M. ,2001). El uso de la Computadora en la Manipulación y Conversión de los Registros de Representación para el estudio de la función lineal (Gómez, 2006). La influencia de las estrategias didácticas utilizadas por los profesores en los aprendizajes significativos de álgebra elemental de los alumnos de segundo curso de ciclo común de cultura general del IJTR (Díaz, 2004). Esta última investigación relacionada directamente con la enseñanza del álgebra, ha sido la orientación de esta investigación, ante la problemática del aprendizaje del álgebra, que sugiere la propuesta de

Régine Douady, de utilizar una metodología basada en el modelo de cambio de cuadros o marcos, para el aprendizaje y enseñanza del álgebra.

2.6. Enseñanza del álgebra en base al cambio de cuadro o marcos.

Para Ursini (2005, p. 22), "una buena comprensión del concepto de variable es fundamental para comprender el álgebra y las matemáticas en general". Por la complejidad de este concepto, es difícil que los alumnos logren comprenderlo aceptablemente sin una enseñanza explícita y deliberada que resalte los diferentes usos de la variable y que les ayude a moverse con flexibilidad entre ellos. El alumno debe utilizar las variables para: representar las incógnitas, los números generales y las relaciones funcionales entre diferentes cantidades.

Por tanto uno de los propósitos de la enseñanza del álgebra en la escuela secundaria debe ser que los alumnos logren desarrollar las capacidades que le permitan resolver exitosamente problemas y ejercicios que involucran los distintos usos de la variable (Ursine, 2005, p.35). Existe una propuesta de enseñanza del álgebra asociada a la ingeniería didáctica; de Régine Douady, de utilizar una metodología basada en el modelo de cambio de cuadros o marcos.

Un "marco o cuadro" está constituido por objetos de una rama de las matemáticas, de las relaciones entre los objetos, de sus formulaciones eventualmente diversas y de las imágenes mentales asociadas a esos objetos y a esas relaciones. La palabra marco debe tomarse en su sentido usual que tiene cuando se habla de marcos algebraicos, marco aritmético, marco geométrico entre otros (Douady, 1993, p. 144). La autora, en el cambio de marcos propone la *dialéctica herramienta-objeto* en el transcurso del cual los conceptos matemáticos juegan alternativamente el papel de herramienta para resolver un problema, y de objeto tomando un lugar en la construcción de un conocimiento organizado.

Cambio de cuadros o marcos, para Douady (1993, p. 144), es "un medio para obtener formulaciones diferentes de un problema que sin ser necesariamente equivalentes por completo, permiten un nuevo acceso a las dificultades encontradas y la puesta en acción de herramientas y técnicas que no se imponían en las primeras formulaciónes". El concepto cambio de cuadros se refiere a la posibilidad de formular, analizar y resolver un problema

"transfiriendo" el problema de un marco (por ejemplo, numérico) a otro marco (por ejemplo, geométrico). Las traducciones de un cuadro a otro conducen al enriquecimiento del cuadro de origen y de los cuadros auxiliares; consiste en hacer intervenir el saber enseñado en diferentes contextos: la realidad física, representaciones gráficas, el dominio numérico, la geometría, y otros.

Para la elaboración del modelo de cambio de cuadros o marcos se siguen los siguientes cuatro pasos (Díaz, 2004, p. 96):

Primer paso: Determinar el objeto de estudio.
Se describen los conceptos que van a aparecer de manera explícita e implícita en el problema plateado, además se mencionan los cuadros que intervienen en el proceso (numérico, algebraico, geométrico, funcional y otros).

Segundo paso: Definición de los objetivos para la selección del tema.
Planteamiento de los objetivos matemáticos y didácticos que se esperan lograr con la implementación del modelo. Los cuales deben estar en función del problema matemático a plantearse posteriormente para el surgimiento de los conceptos previos y nuevos.

Tercer paso: Seleccionar las operaciones matemáticas y sus justificaciones.
En este apartado se hace el planteamiento del problema y se toman las decisiones sobre el tipo de estrategias a utilizar y también las preguntas orientadoras que servirán de guía para que el estudiante vaya desentrañando y construyendo los conocimientos nuevos a partir de los previos.
El problema a resolver se propone con un enunciado de tal manera que todos los alumnos puedan abordarlo con sus conocimientos previos, y que no se imponga ningún procedimiento. Aquí las preguntas orientadoras juegan un papel muy importante para resolver el problema, pues es mediante ellas que el alumno podrá hacer interactuar los cuadros y, al mismo tiempo, hacer cambios de registros dentro de los marcos o cuadros.

El profesor debe estar consciente de las competencias que entran en juego en cada uno de los cuadros para resolver el problema. Estas competencias pueden ser de dos tipos: las que se supone tiene el estudiante para abordar el problema y las que le ayudaran a resolverlo.

Otro elemento importante a ser considerado son las herramientas conceptuales y las tecnológicas. Las primeras, se refieren al conjunto de nociones subyacentes a las competencias que se presuponen como herramientas explícitas (teoremas, definiciones, axiomas, etc.); y las segundas, al uso de la tecnología para realizar cálculos (calculadoras científicas, computadora).

Cuarto paso: Reconstrucción del modelo aplicado (Institucionalización local).

El profesor expone lo que es nuevo y tiene que ligarlo con las convenciones usuales;"Da la clase" presentando de manera organizada y estructurada las definiciones, teoremas, demostraciones, señalando lo que es esencial y lo que es secundario.

CAPITULO 3

Diseño de investigación

3.1 Introducción

El estudio fue exploratorio de tipo cualitativo y cuantitativo, realizado mediante una investigación de carácter cuasi-experimental, con dos grupos, en los que la asignación de los alumnos no se hizo al azar. Se aplicó pretest y postest en ambos grupos, entre los que se estableció contraste ya que se aplicaron modelos de enseñanza diferentes. Se llevó a cabo una experiencia de aula, siguiendo el modelo de enseñanza del álgebra elemental basada en el cambio de cuadros o marcos, con un grupo del segundo curso del ciclo común como grupo experimental (E), mientras otro grupo del mismo curso se seleccionó como grupo control (C), el cual con características similares, desarrolló la misma temática con otro modelo de enseñanza.

La población estudiada comprende a los alumnos inscritos en el segundo curso de ciclo común del "Instituto Tecnológico de Administración de Empresas"(INTAE), de la ciudad de San Pedro Sula, en el periodo escolar del año 2006. El segundo curso estaba formado por tres secciones con un promedio de 42 alumnos cada una, dos secciones en la jornada matutina y una en la jornada vespertina. Se seleccionó, el segundo curso de ciclo común sección "1", como grupo Experimental. Para evitar la contaminación en el proceso y resultados de la investigación, la sección "3", a cargo del profesor Juan José Reyes fue seleccionada como grupo control, ya que las dos secciones de la jornada matutina tenían como profesor al investigador.

Los alumnos del segundo curso sección "1" fueron expuestos a experiencias de aprendizaje mediante el uso de guías de trabajo durante 1 hora clase diaria de setenta minutos desde el 17 de abril hasta el 7 de agosto de 2006. Las guías de trabajo se diseñaron con la finalidad de organizar situaciones didácticas según el modelo de enseñanza del álgebra elemental basada en el cambio de cuadros o marcos. Estas situaciones didácticas, implicaron para el estudiante: realizar un trabajo individual (Anexo 4) en donde se pretende, resuelva al menos parcialmente una situación problema, comparta y discuta en grupos los descubrimientos de su

trabajo individual, obtenga y socialice conclusiones en el trabajo de grupo, y utilice los nuevos conocimientos en situaciones similares o nuevas y más complejas. Cada lección inició con una situación problemática que fue seleccionada de acuerdo a los objetivos y el contenido a desarrollar según el programa del segundo ciclo común, específicamente en álgebra elemental. Las lecciones se organizaron en guías de trabajo con el propósito de inducir al alumno a partir de un problema, a realizar actividades que impliquen: cálculos numéricos, tabulación de datos, trazo de figuras geométricas, representar generalizaciones numéricas, escribir fórmulas, verificación numérica de las generalizaciones y fórmulas. Cada guía se estructuró para que el alumno, tenga la oportunidad de expresar una situación problema o un concepto matemático en al menos dos cuadros. Generalmente, los cuadros numéricos y gráficos interactúan para avanzar en el cuadro algebraico.

3.2 Diseño de Actividades

Las actividades de los estudiantes fueron planteadas mediante lecciones estructuradas en tres fases según el modelo de enseñanza del álgebra basada en el modelo tecnológico de cambio de cuadros:

Primera Fase:

Comprende el diagnóstico y reforzamiento de los conocimientos previos. Se caracteriza por el trabajo individual del alumno, en donde se pretende que el alumno resuelva al menos parcialmente el problema planteado en trabajo individual. En esta fase afronta la situación problema planteada en el marco numérico y grafico. Las actividades en esta fase son diversas como: medir, contar, dibujar, trazar, cortar. A cada alumno se le proporcionaron los materiales para que pueda trabajar individualmente, los procedimientos utilizados se realizaron en cuadernos de trabajo.

Segunda Fase:

Se espera que el alumno organice el trabajo individual planteado en la primera fase. La hoja de trabajo en esta fase comprende preguntas reflexivas en donde el alumno explica los procedimientos y resultados obtenidos al resolver casos particulares o especiales de la

situación problema. Se busca que el alumno trabaje con generalizaciones de los casos de la primera fase, por lo que debe: tabular datos, deducir respuestas que impliquen variables, escribir expresiones algebraicas que representen generalizaciones y describir con palabras los procedimientos realizados.

Tercera Fase:

Comprende discusión en grupos de trabajo (Anexo 5), los alumnos discuten al interior del grupo los hallazgos encontrados en la primera y segunda fase, y luego socializan las respuestas obtenidas (Anexo 6) y elaboran conclusiones.

Al socializar los resultados por los alumnos, el profesor selecciona los hallazgos de los estudiantes que tienen un significado matemático y que pueden ser utilizados como herramientas para construir objetos de enseñanza, organiza el saber de la clase. Por ejemplo, los alumnos expresaron el área de una figura rectangular formada por otros rectángulos como una equivalencia entre la suma de las áreas pequeñas y el área de todo el rectángulo, el profesor utilizó este hallazgo para introducir el concepto de factorización. Es el momento, en que se introduce el vocabulario matemático a utilizar para presentar los hallazgos, y se establecen las relaciones que los conocimientos utilizados tienen con los conocimientos previos y con el nuevo conocimiento. El docente presenta los objetos matemáticos que serán utilizados como objetos y herramientas de enseñanza, tales como: reglas, fórmulas, teoremas, definiciones, axiomas, formas de representación gráfica y otros.

Al finalizar esta fase se realiza la etapa de familiarización y reutilización de lo aprendido, en donde el alumno se familiariza con el concepto aprendido y lo utilizan para resolver problemas similares o más complejos. Esta etapa se puede realizar en forma individual o grupal o en ambas y los resultados deben ser socializados.

Los estudiantes desarrollaron once lecciones con el objetivo de ejecutar actividades que les permita la manipulación y dominio de conceptos básicos del álgebra elemental como: el concepto de variable, valor numérico de una expresión algebraica, reducción de términos semejantes, multiplicación de polinomios, productos notables, factorización de expresiones algebraicas y solución de ecuaciones lineales. En cada lección se plantearon preguntas

reflexivas a fin de que los estudiantes expresaran por escrito el dominio de los conceptos algebraicos. Las preguntas en esta fase se caracterizaron porque requieren una explicación o argumento por ejemplo: “Explique cómo se puede determinar el área de cualquier figura rectangular, si se conoce las medidas de cada lado”.

A continuación se describe cada una de las lecciones:

Lección N° 1

Tiene como objetivo que el alumno identifique regularidades y patrones a partir de estrategias numéricas, utilizando como herramienta figuras planas. Se le solicitó a los estudiantes que trazaran diferentes polígonos para determinar el número de diagonales que se pueden trazar, para que identifiquen el patrón general. Los alumnos deben encontrar o construir la expresión $d = \frac{l(l-3)}{2}$, donde d es el número de diagonales del polígono y l el número de lados. Descubrieron que el número de diagonales y el número lados son variables y que se utilizan letras para representarlas. En la etapa de familiarización del concepto aprendido se asignó como tarea, determinar una expresión que relacione el número de saludos, dependiendo del número de personas que se encuentran en una reunión. Se esperaba que los alumnos dedujeran utilizando polígonos la relación $s = \frac{p(p-1)}{2}$, en donde s es el número de saludos y p el número de personas que están en la reunión. El concepto de variable es el objeto matemático que se pretendió que los estudiantes descubrieran en las actividades de esta lección. Como herramienta de enseñanza se utilizó el concepto de diagonales de un polígono.

Lección N° 2

Tiene como propósito que los alumnos expresen en forma verbal y mediante el lenguaje algebraico el perímetro de un rectángulo. Se pretendió poner en juego el concepto de variable al expresar regularidades a partir de estrategias aritméticas en un contexto geométrico. Se solicitó a los alumnos que tracen rectángulos representando las dimensiones de un aula de clase rectangular cuyo perímetro es de 36 metros. Los alumnos descubrieron que las dimensiones (largo y ancho) son cantidades variables. Luego se realizaron actividades para determinar que el perímetro es variable. Los alumnos debieron deducir que la expresión que

relaciona el perímetro de un rectángulo con su largo y ancho es $2l + 2a = p$, en donde "l" representa la variable largo, "a" la variable ancho y "p" perímetro de un rectángulo. Se plantearon preguntas para que los alumnos reflexionen sobre los conceptos de variable, constante y expresión algebraica. En la etapa de familiarización se planteó una situación problemática para construir una expresión algebraica que relacione las variables cantidad de camisas, cantidad de pantalones con la cantidad de horas de mano de obra que necesita una pequeña fabrica de ropa. Al finalizar se resolvieron ecuaciones diofanticas para que los alumnos se familiaricen con el valor numérico de una expresión algebraica.

Lección N° 3

Esta lección tiene como propósito, utilizar cuerpos sólidos y figuras planas regulares como herramienta para la búsqueda de un término general de una sucesión numérica, con el objetivo de iniciar en el manejo del concepto de expresión algebraica. La lección indujo a obtener la forma general de las siguientes sucesiones de figuras:

Sucesión 1

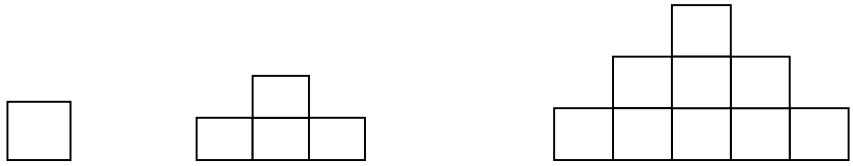


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Sucesión 2

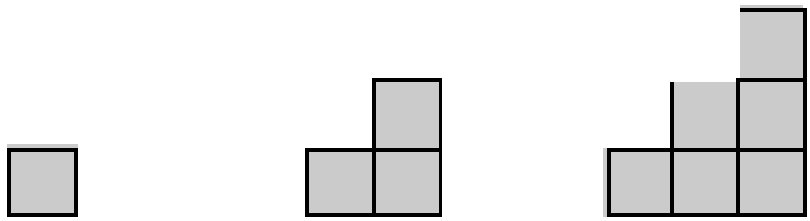


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Sucesión 3

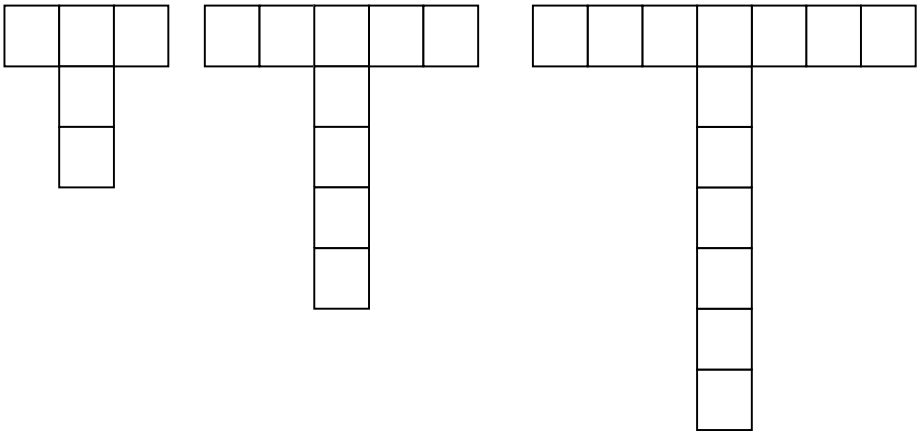


Figura 1 Figura 2 Figura 3

En esta lección los alumnos utilizaron cubos de madera para formar las sucesiones, trazaron dibujos de las sucesiones y completaron tablas como:

Número de la figura	Total de cuadros en la figura
7	
9	
	225
29	
53	

Al completar tablas como la anterior, se permitió que el estudiante realizara cálculos aritméticos para concluir con el valor numérico de una expresión algebraica o las primeras nociones de la solución de una ecuación:

Las expresiones a determinar son: n^2, $\frac{n(n+1)}{2}$, $4n+1$

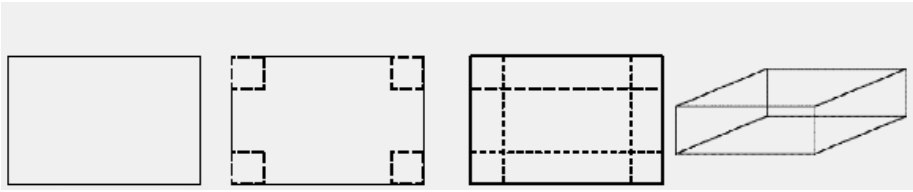
Los descubrimientos de los estudiantes facilitaron introducir las formas algebraicas de representación de expresiones del lenguaje común tales como: el doble de un número, el triple de un número, el cuádruplo de un número, el cuadrado de un número y del sucesor de un número natural.

Lección N° 4

La situación problema de esta lección es "Expresar la suma de las aristas de una caja (paralelepípedo), mediante una expresión algebraica". Los conceptos matemáticos que se utilizan como herramienta de enseñanza son; el de arista y suma aritmética. Como objeto de enseñanza: la generalización de regularidades, términos semejantes y reducción de términos semejantes. Los objetivos matemáticos que guiaron la lección fueron:

a. Identificar regularidades y patrones a partir de estrategias aritméticas.
b. Utilizar las figuras planas regulares como herramienta para la búsqueda de un término general.
c. Identificar términos semejantes en una expresión algebraica.

Para la realización de las actividades, el día anterior se le proporcionó una hoja de papel construcción a cada estudiante, para que lo cuadricularan en cuadros de un cm^2. El trabajo individual inicio con la construcción de una caja de base rectangular y sin tapa a partir de una pieza rectangular de cartulina. Practicando un corte cuadrado en cada esquina y se doblarán los lados hacia arriba.



La dimensión del corte cuadrado en cada esquina fue elegida arbitrariamente por los alumnos, para obtener en la clase cajas con diferentes dimensiones y reforzar el concepto de variable. Cada alumno determinó las dimensiones de la caja construida, (largo, ancho y altura) y la cantidad de aristas, observando en número de aristas con igual medida.

Para conducir a la expresión de la suma de las aristas se planteó la siguiente situación:

"Si los bordes de la caja son reforzadas con cinta adhesiva. ¿Cuál es la medida de la cinta necesaria?"

Luego se les pidió que expresaran con variables los hallazgos en la fase anterior mediante las siguientes preguntas:

a) Conociendo las medidas del largo, ancho y altura de una caja ¿Cómo se puede determinar la suma de las medidas de sus bordes?

b) ¿Cómo se puede determinar, largo ancho y altura de una caja, si se conoce la suma de las medidas de sus bordes?

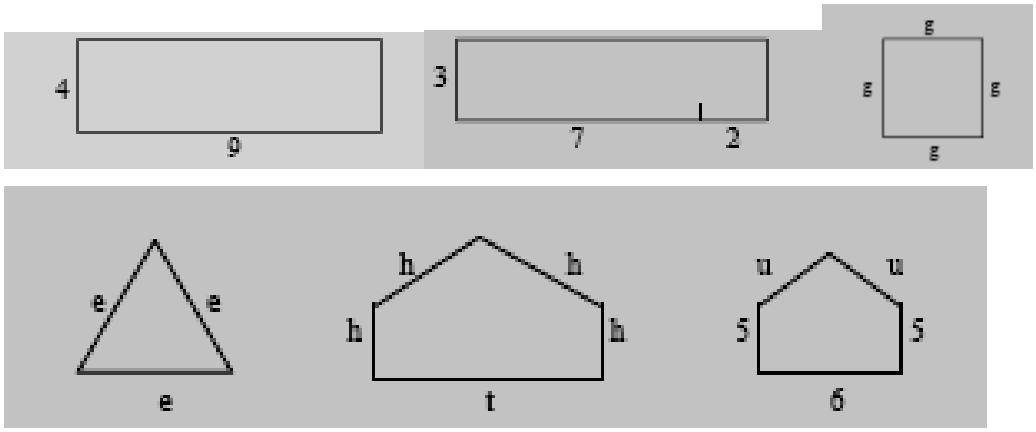
c) Escribe una fórmula para determinar la suma de las medidas de los bordes de una caja.

d) Escribe una fórmula para determinar la suma de las medidas de las aristas de una caja si tiene la forma de un cubo.

e) Escribe una expresión para la suma de las aristas de una caja que tiene la misma altura y anchura pero tres unidades más de largo que de altura.

En la reutilización de lo aprendido se plantearon ejercicios como:

Calcular o expresar el perímetro de las figuras tales como:



Reduzca los términos semejantes:

a) $2x+5+3x-7$

b) $2a-3b+5a-6b+3$

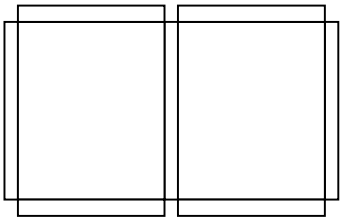
c) $8x+7+7x-12$

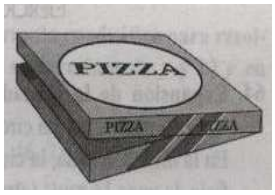
d) $4x+4y+4x$

e) $2(x+2)+3(x+2)$

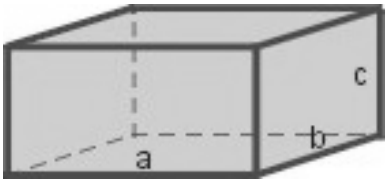
Lección N° 5

La finalidad de la lección N° 5 es continuar con la reducción de términos semejantes, extendiéndose a monomios con dos variables. El objeto matemático utilizado como herramienta es el área de una región rectangular. El objeto de enseñanza es la reducción de términos semejantes, deducida mediante la suma de áreas de regiones rectangulares con iguales dimensiones, además se inicia con la multiplicación de monomios. Para variar de las actividades de la lección anterior cada alumno elaboró una caja con tapa siguiendo la situación problema que plantea determinar el área de la superficie de una caja siguiendo el modelo de las siguientes figuras





En una segunda fase el alumno debió escribir una expresión para el área de la superficie total de una caja cerrada. (Paralelepípedo).



Como familiarización de lo aprendido se realizaron ejercicios sobre cálculo y expresión de áreas de superficies rectangulares y de paralelepípedos. Además se realizaron ejercicios de reducción de términos tales como: $a^2 + ab + ba + b^2$, $8a^3 + 8a^2b + 2ab^2 + 4a^2b + 4ab^2 + b^3$

Lección N° 6

En esta lección se extiende la multiplicación de monomios a la multiplicación de un monomio con un binomio, utilizando como herramienta el cálculo de áreas. Para resolver la situación problema los alumnos utilizaron cubos de madera para formar paralelepípedos con superficies rectangulares simulando un adoquinado, luego dibujaron los rectángulos para deducir las relaciones numéricas para concluir con la representación algebraica. El objetivo de la

situación problema es “expresar el área de un rectángulo en que un lado es 3 metros más largo que el otro”. Los cálculos realizados se resumen en la siguiente tabla:

Base (metros)	Altura(metros)	Área (metros cuadrados)
4m	5m	
20	23	
	15	$300\,m^2$
		$180m^2$
a	a	
b	h	
4	b	
$x+3$	x	

Para completar la tabla los estudiantes debieron realizar cálculos aritméticos, para determinar un valor como incógnita hasta cálculos con literales que representan las variables medidas de la base y altura de un rectángulo. El renglón cuatro de la tabla no contenía valores determinados con el objetivo que el alumno los escribiera para reforzar el concepto de variable. En la fase de reutilización de lo aprendido se planteo la siguiente situación problema: “El gobierno tiene un proyecto habitacional, en donde cada casa será construida en terreno rectangular. La base de la casa será una plancha de concreto rectangular que tiene un lado con 3 metros más largo que el otro; encuentra las posibles medidas del área de la base de cada casa, si el terreno debe ser de no más de 80 metros cuadrados, se piensa dejar área para jardín.”

Base (metros)	Altura(metros)	Área de la casa (metros cuadrados	Área libre (metros cuadrados)
8			
		54	
			12
a			

Los alumnos presentaron los resultados obtenidos en una tabla, luego se realizaron ejercicios sobre expresión de áreas de rectángulo que contengan variables como medidas de sus lados.

Lección N° 7

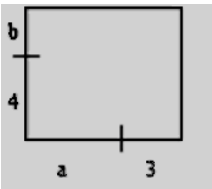
Continuando con la multiplicación de polinomios la lección N° 7 pretendió que los alumnos realicen actividades sobre la multiplicación de binomios. La situación problema planteada induce a realizar la multiplicación de binomios de la forma $(x+a)((x+b)$ y se utilizan como herramientas conceptos como: área, términos semejantes, multiplicación de potencias.

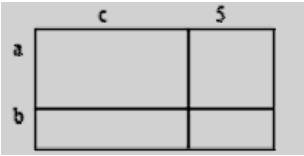
Esta lección inició con la Situación-Problema: El propietario de una tienda desea ampliar el área de su local de ventas, ampliando dos lados de la casa utilizada como tienda, para que sus clientes puedan consumir en su establecimiento. Si el área original es un cuadrado y las ampliaciones son de 3m y 2m en cada uno de los dos lados. ¿Cuáles son las medidas del área de la tienda ya ampliada?

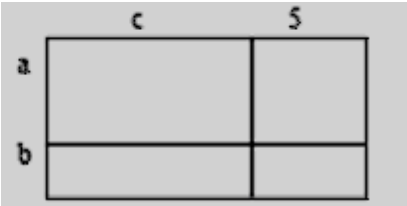
Los estudiantes realizaron representaciones gráficas en papel y llenaron una tabla con datos sobre las medidas de: lado original (metros), área original (metros cuadrados), área agregada (metros cuadrados) y área nueva (metros cuadrados). La tabla contenía datos numéricos y variables.

Como familiarización de lo aprendido se plantearon situaciones como:

Expresar el área de figuras







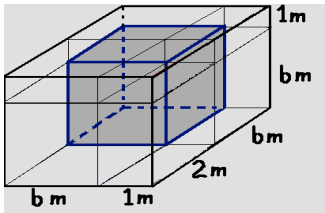
Para finalizar la lección realizaron y discutieron productos de binomios con: monomios, binomios y trinomios.

$2x(x+2)$, $(x+3)(x+2)$, $(2x+3)(x-2)$, $(2x-3)(4x^2+6x+9)$, $(2x+3)(2x-3)$,

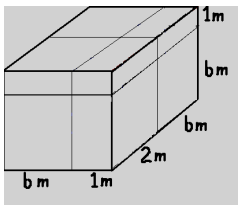
$(3x^2+5x-9)(2x-5)$, $(2x^2-3)(2x^2+3)$

Lección N° 8

La lección consiste en la multiplicación de polinomios: Se realizaron actividades que implican la multiplicación de tres monomios y multiplicación de tres binomios. Para tratar este contenido se planteó el siguiente problema: “Para la Expo-venta 2006 del Campo AGAS a un expositor se le asigna un stand en forma de cubo, para ambientar el local decide ampliarlo con un pasillo de 2m en frente, 1m en uno de los lados y un metro de alto para los conductos de aire acondicionado y publicidad. Encuentra el volumen del stand ampliado.”

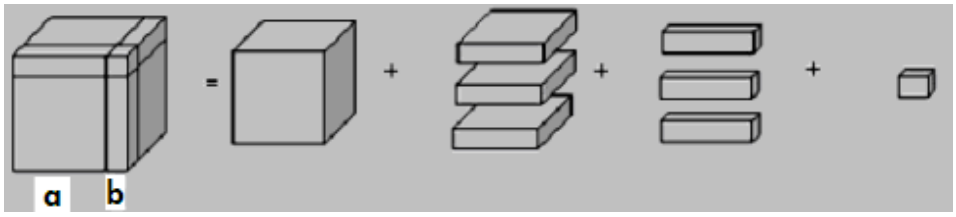


Se reforzaron conocimientos previos: Volumen, escala para dibujar, multiplicación de potencias de igual base, multiplicación de monomios, multiplicación de binomios y suma de términos semejantes. Se realizaron representaciones de volúmenes mediante cubos de madera utilizando cada cubo como una unidad cúbica. Los datos encontrados fueron expuestos en tablas para concluir con una expresión algebraica para expresar el volumen de la caja.



Como familiarización de los conceptos se realizaron ejercicios sobre volúmenes:

Expresa de forma algebraica los volúmenes representados por las siguientes figuras:



( )( )( ) = + + +

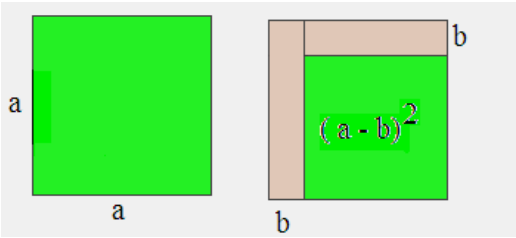
Como ejercicios se plantearon multiplicaciones de: monomios con binomios, binomios con binomios y binomios con trinomios.

Lección N° 9

En la lección N° 9, se pretendió que el estudiante, calcule productos entre binomios, utilizando expresiones especiales sin realizar el proceso de multiplicación. Esta lección comprende el contenido de los productos notables, y consiste en una de las lecciones propuestas en el estudio, La influencia de las estrategias didácticas utilizadas por los profesores en los aprendizajes significativos de álgebra elemental de los alumnos de segundo curso de ciclo común de cultura general del IJTR (Díaz, 2004, p.99). Para el desarrollo del producto notable $(a+b)^2$, se utilizaron cubos de madera y la representación grafica en papel construcción, con el objetivo de realizar las deducciones numéricas y algebraicas.

En la etapa de familiarización y reutilización de lo aprendido se planteo que los estudiantes realicen:

1. Construir una figura geométrica (cuadrado) en papel construcción que ilustre el proceso algebraico de $(a - b)^2$.



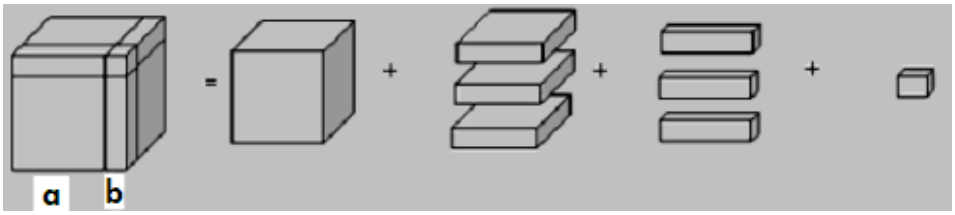
   a. ¿Cuál es la medida del área total de la figura?_____
   b. ¿A qué es igual $(a - b)^2$?_____

2. Calcular los siguientes productos:
   a. $(2x + 3)^2 =$
   b. $(2x + 5y)^2 =$
   c. $(2x - y)^2 =$
   d. $(5a - 2b)^2 =$

3. Construir $(b + a)(b - a)$ y determinar el producto:
   a. Construye un cuadrado de lado a
   b. En uno de los lados (largo) súmale una cantidad "b"
   c. Del otro lado (ancho) quítale una cantidad "b" (igual al paso anterior)

d. El producto (b + a) (b – a)=

4. Expresa de forma algebraica los volúmenes representados por las siguientes figuras:



$(a + b)^3 =$ + + +

Lección N° 10

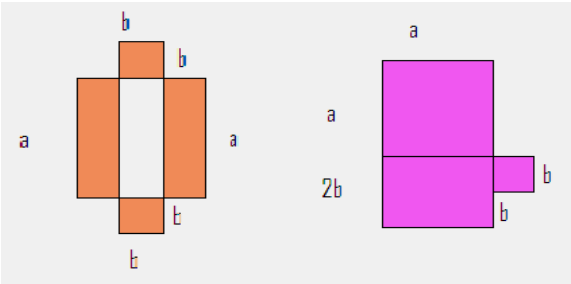
El propósito de esta lección era, que los alumnos utilicen los conceptos de áreas de cuadrados y rectángulos como herramientas para realizar la factorización de polinomios. Los alumnos utilizaron papel construcción para hacer representaciones de casos numéricos de la diferencia de cuadrados, hasta lograr la representación de la forma general de $a^2 - b^2$, formando rectángulos para expresar el área resultante como el producto de la base por altura.

En la reutilización de lo aprendido se plantearon ejercicios sobre factorización de diferencias de cuadrados.

Para ampliar los conocimientos sobre factorización, los estudiantes, trazaron y cortaron en papel construcción figuras seccionadas, para formar rectángulos y expresar la expresión algebraica de la suma de áreas y la factorización de esa expresión algebraica relacionándola con el área total del rectángulo construido, por ejemplo:

a) Escriba una expresión para el área sombreada de la figura;

b) Escriba la expresión de la parte (a) en forma factorizada



La lección se concluye con ejercicios sobre factorización de trinomios:

1. Factorice :
   i. $x^2 + 7x + 6$
   ii. $y^2 - 12y + 11$
   iii. $2x^2 + 5x + 3$
   iv. $3x^2 - 13x + 10$

En las lecciones 8, 9 y 10 la fase 1 no fue realizada por el tiempo reducido y no participaron todos los alumnos por la suspensión de clases en el colegio.

Lección N° 11

La lección pretende el desarrollo de habilidades algebraicas en la solución de ecuaciones lineales con una variable. Los objetivos matemáticos que guiaron la lección fueron:

1. Identifique las letras como representaciones de números.
2. Reconocer la equivalencia entre los lados derecho e izquierdo de una ecuación.
3. Desarrolle métodos para resolver ecuaciones, a partir de sus conocimientos

Para el logro de estos objetivos se planteo una situación problema relacionada con la vida cotidiana para que a partir de las relaciones numéricas se deduzcan las relaciones algebraicas de una ecuación.

Los alumnos realizaron actividades relacionadas con la siguiente situación:

Una compañía telefónica ofrece teléfonos celulares que operan con tarjetas de diferentes precios, y cobra L. 6.00 (lempiras) por minuto(o fracción).

Si te regalan un teléfono celular de dicha compañía con una tarjeta de L. 200.00, que te da un crédito de L. 300.00:

¿A lo más cuántos minutos puedes hablar con este crédito?

¿Cuánto gastas de tu crédito de L. 300 si haces una llamada de 5 minutos?

¿Cuánto gastas de tu crédito de L. 300 si hablas 17 minutos?

Si tu crédito está en L. 120.00, ¿A lo más cuántos minutos has usado de tu crédito de L. 300?

Construye una fórmula que te permita determinar cuánto gastaste de tu crédito en una llamada si, conoces el número de minutos que hablaste.

Rescribe la fórmula que construiste en el inciso anterior, considerando que el gasto por la llamada fue de L.150.00

Para desarrollar el pensamiento matemático mediante la resolución de problemas los alumnos plantearon problemas para ecuaciones dadas.

En la reutilización de lo aprendido se resuelven ecuaciones lineales en una variable. Los alumnos resolvieron las ecuaciones con sus propios conocimientos, no se explicó ningún procedimiento, utilizaron tanteo para determinar la incógnita en cada expresión.

Al concluir la lección los alumnos inventaron ecuaciones lineales cumpliendo con algunas condiciones dadas.

Plantea una ecuación que:

a. Contenga sumas resta y multiplicaciones con solución igual a 3
b. Contenga paréntesis y solución igual a 5
c. Contenga multiplicaciones y divisiones con paréntesis y solución igual a 10.

Con cada una de las lecciones descritas se pretendió obtener provecho de las potencialidades de la resolución de problemas y el cambio de marcos, para explorar los conceptos elementales del álgebra y provocar que los estudiantes elaboren conjeturas, descubran relaciones y regularidades, desarrollen habilidades en la manipulación de las representaciones y además, describan y argumenten las acciones que realizan en diferentes situaciones que involucran el uso de variables. Con los resultados que se obtuvieron se puede orientar actividades que apunten al desarrollo de esas habilidades cognitivas que son fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas.

Para implementar el modelo de enseñanza basada en el cambio de marcos, también se diseñaron guías didácticas para cada lección. Estas guías didácticas contienen: los objetivos matemáticos, los objetivos didácticos, la situación problema y las secuencias didácticas.

El objetivo de estas guías didácticas es que puedan ser utilizadas o mejoradas por otros profesores para la implementación del modelo de enseñanza del álgebra basada en el cambio de marcos.

3.3 Los datos y su captura.

Los datos para el análisis, fueron recolectados a través de observaciones directas sobre el desempeño de los estudiantes; por medio de hojas de trabajo en donde ellos reportaban cálculos, conjeturas, reflexiones, conclusiones, argumentos y daban respuestas a preguntas de interpretación; además a través de fotografías de algunas de las sesiones de las actividades desarrolladas por los estudiantes.

CAPITULO 4

Análisis de Datos

En este capítulo se presenta el análisis de los datos obtenidos de la aplicación de pretest y postest aplicados al grupo experimental y al grupo control y en las once lecciones descritas en el capítulo anterior. Como instrumentos se usaron pruebas escritas a ambos grupos (control y experimental), y únicamente en el experimental se usaron guías didácticas y se realizaron observaciones escritas sobre el desarrollo de las lecciones. Los alumnos, fueron expuestos a una serie de situaciones didácticas con el uso de cambio de cuadros o marcos, 1 hora clase diaria de setenta minutos desde el 17 de abril hasta el 7 de agosto de 2006. Desarrollando en ambos grupos los contenidos establecidos en los rendimientos básicos en relación a la introducción del álgebra en el segundo ciclo común de cultura general.

La hipótesis, que se fue destacando en el transcurso de la intervención y de la investigación, se desglosa como sigue:
Los alumnos que participan en el aprendizaje del álgebra elemental basado en el cambio de cuadros o marcos, incrementan su rendimiento académico, respecto a los que participan en el aprendizaje tradicional.

Los resultados de la investigación se organizaron en dos aspectos: Análisis cualitativo (resultados obtenidos por el grupo experimental, en las hojas de trabajo) y análisis cuantitativo (puntuaciones obtenidas por el Grupo Control y Experimental, en el pretest y postest)

4.1 Análisis Cualitativo y Cuantitativo de la resolución de problemas por el Grupo Experimental.

El estudio cualitativo se realizó con el objeto de observar el alcance del dominio de los conceptos algebraicos durante la realización del experimento por parte de los estudiantes del grupo experimental.

Los estudiantes realizaron once lecciones con distintas formas de manipulación y conversión entre los distintos tipos de representación de las nociones de los conceptos algebraicos.
Estas actividades tienen como objetivo que los alumnos, trabajen inicialmente de forma individual y luego realicen las mismas actividades en grupo. Manipulando los conceptos matemáticos de forma numérica, gráfica y algebraica, según la propuesta de Régine Duady para la enseñanza del álgebra elemental. Esta propuesta concibe que, "las interconexiones entre diferentes cuadros o los cambios en el punto de vista o registro al interior de un cuadro realizados para avanzar en un problema son medios de los cuales se manifiesta la sutileza del pensamiento" (Duady, 1995, p.77).

Las once lecciones desarrolladas fueron presentadas a través de guías de trabajo. Cada una de ellas contiene un conjunto de instrucciones para sus actividades y además preguntas de reflexión sobre sus acciones en determinadas situaciones. Esto permite de alguna manera, tener evidencias escritas sobre la adquisición de conceptos y procedimientos algebraicos.

Los datos sobre la comprensión de los conceptos algebraicos fueron obtenidos mediante observaciones directas acerca del desempeño de los estudiantes; a través de las hojas de trabajo en donde ellos debían mostrar sus cálculos, conjeturas, reflexiones, conclusiones, argumentos y respuestas a preguntas de interpretación.

4.1.1Actividades desarrolladas por los alumnos:

Análisis de la lección N° 1

Esta lección permitió a los estudiantes representar de forma algebraica una situación planteada, de tal manera que estableciera una conexión entre el lenguaje común y la representación gráfica; con el objetivo de explorar el tipo de acciones que los estudiantes ejecutan cuando son expuestos a una situación específica, que debe ser resuelta con el uso de sus conocimientos previos y el cambio de cuadros (o contextos). En esta lección se tenía como propósito que el estudiante identifique regularidades y patrones mediante actividades

que implican el cambio de cuadro gráfico al numérico y de éste al algebraico, el objeto de estudio fue la noción de variable y de expresión algebraica.

Tabla N° 1: Respuestas reportadas por los estudiantes a cada una de las preguntas presentadas en la hoja de trabajo (Lección N° 1)

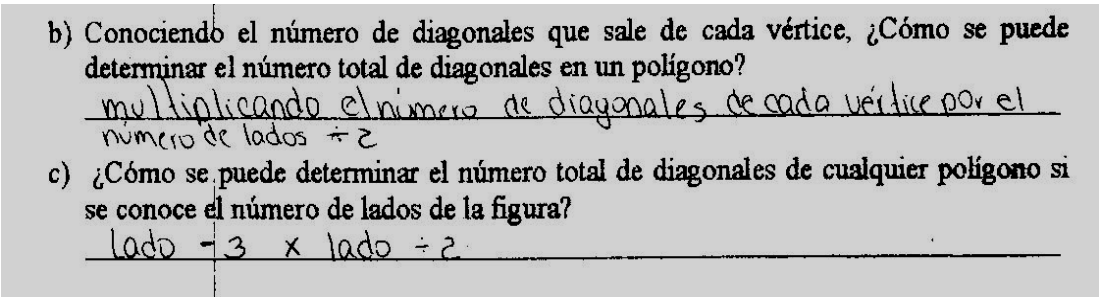
Fase	N° de problema	Encontraron la respuesta correcta	Intentaron hacerlo pero no encontraron la respuesta correcta	No lo hicieron
Fase 1. Deducciones numéricas	Actividad 1	90%	10%	
	Preg1	90%	10%	
	Preg2	100%		
	Preg3	80%	20%	
	Pret4	80%	20%	
	Preg5	70%	30%	
	Preg6	80%	20%	
	Preg7	70%	30%	
	Preg8	50%	50%	
	Preg9	60%	30%	10%
Fase 2	Actividad 2	40%	60%	
	Preg1	30%	70%	
	Preg2	20%	60%	20%
	Preg3	50%	30%	20%
Reutilización de lo aprendido	Problema	10%	50%	40%

La primera lección la desarrollaron los alumnos siguiendo los pasos de la metodología a experimentar. Aunque se presentó un solo trabajo en grupo después de las actividades

individuales. El objetivo de la lección #1 era que los estudiantes dedujeran un patrón numérico, 6 de los 10 grupos expresó el patrón utilizando palabras, por ejemplo:

"Lado menos tres, por lado entre dos", $\frac{(lados-3)\times(vértice \quad o \quad lado)}{2}$. Se puede observar que los alumnos reconocen el patrón numérico pero no utilizan símbolos para representarlos, lo que indica que los estudiantes manejan la etapa retórica del álgebra (Kieran, 1995, p.1)

Figura N° 1: Presenta las generalizaciones de la situación problema por un estudiante.


b) Conociendo el número de diagonales que sale de cada vértice, ¿Cómo se puede determinar el número total de diagonales en un polígono?

multiplicando el número de diagonales de cada vértice por el número de lados ÷ 2

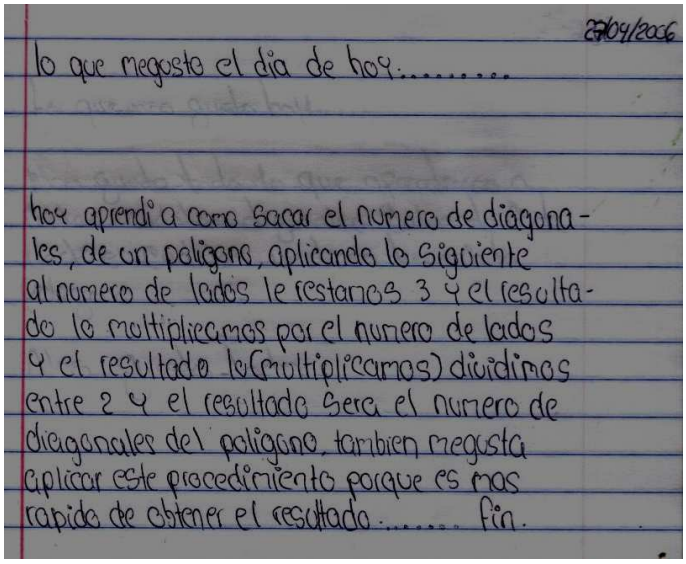
c) ¿Cómo se puede determinar el número total de diagonales de cualquier polígono si se conoce el número de lados de la figura?

lado - 3 x lado ÷ 2

El estudiante utiliza la palabra "lado" para expresar la variable lado, y no utiliza los paréntesis, haciendo una traducción literal de la explicación en palabras de la regla general, expresada en el inciso anterior. El alumno en esta lección al explicar el patrón numérico ha asimilado que las variables son cantidades que presentan variación en su valor y no la letra que las representa. Comprendió que al cambiar el número de lados de la figura también cambia el número de diagonales y por lo tanto son variables. En una de las observaciones un alumno comenta que en la lección aprendió las partes de un polígono y a nombrarlos con su nombre: Lados, vértices y diagonales, indicando que los conceptos herramientas fueron comprendidos.

\

Figura N° 2: Comentario de un estudiante sobre la tercera clase de la lección #1


lo que megusto el dia de hoy.....

hoy aprendi a como sacar el numero de diagona-
les, de un poligono, aplicando lo siguiente
al numero de lados le restamos 3 y el resulta-
do lo multipliecamos por el numero de lados
y el resultado lo(multiplicamos) dividimos
entre 2 y el resultado sera el numero de
diagonales del poligono, tambien megusta
aplicar este procedimiento porque es mas
rapido de obtener el resultado..... fin.

En la figura N° 2, un alumno al comentar la clase, explicó el procedimiento que descubrió para determinar el número de diagonales de un polígono, lo que muestra sus inicios en el desarrollo de la habilidad de comunicar sus ideas matemáticas. Este comentario llamó la atención porque el estudiante descubre la importancia del álgebra como herramienta que facilita los procesos de resolución de problemas.

Análisis de la Lección N° 2

La lección N°. 2 tuvo como objetivo, expresar en forma verbal y mediante el lenguaje algebraico el perímetro de un rectángulo.

Para el logro de este objetivo se planteó la siguiente situación problema:

> "Una aula de clase tiene un perímetro de 36 metros. Encuentre las dimensiones del ancho y largo para el aula."

Esta situación problema fue utilizada para realizar deducciones numéricas que conducen a la expresión general del perímetro de un rectángulo en función de sus lados; largo y ancho.

Los alumnos iniciaron determinando las dimensiones del aula de clase, tomando como unidad de medida el pie, y contando la cantidad de ladrillos que contiene una fila o columna. Determinaron que el aula mide 39 pies de largo y 25 ½ pies de ancho. Luego se completó una tabla, en donde se le da como dato el perímetro para encontrar las medidas de los lados. Por

ejemplo, cuando el perímetro es 36, algunos alumnos presentaron tres posibles soluciones, concluyendo que las medidas de los lados del rectángulo pueden variar y el perímetro ser una constante. En está actividad realizaron representaciones gráficas de rectángulos en sus hojas de trabajo expresando las dimensiones respectivas, utilizando dibujos a escala. Al considerar rectángulos con diferentes medidas en su perímetro, se comprendió que el perímetro puede ser una cantidad variable; estas nociones básicas del pensamiento algebraico se evidencias en las siguientes situaciones de trabajo:

Figura N°.3: Presentación gráfica para rectángulos con perímetros 36 y 30 metros.

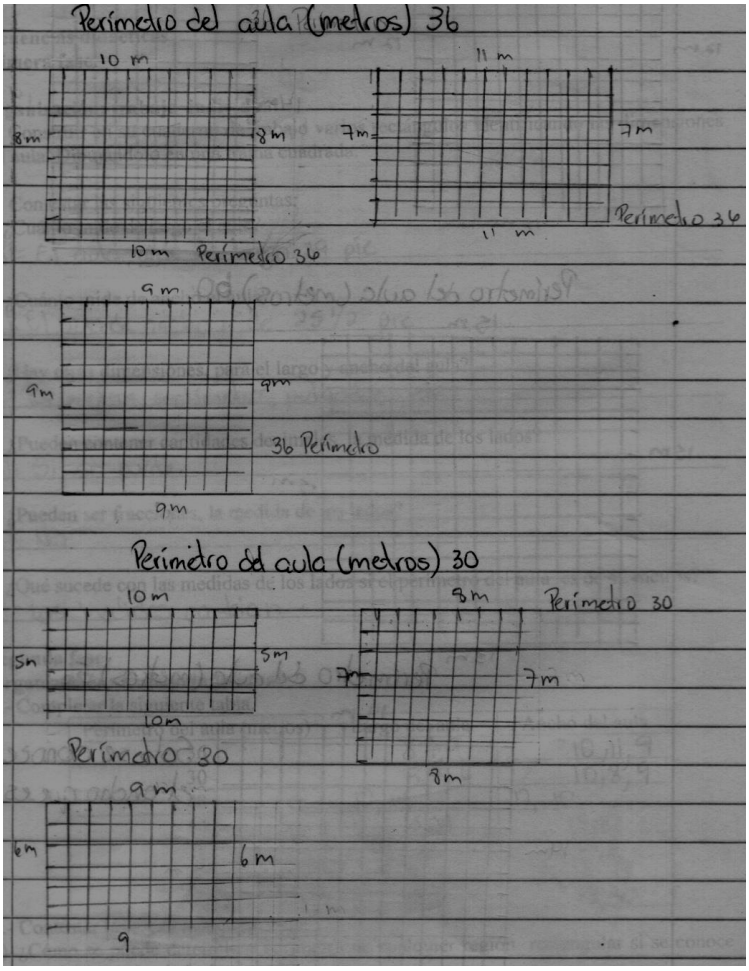
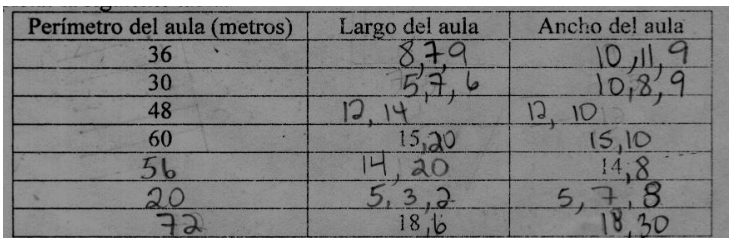


Figura N°.4: Representación numérica de las medidas del perímetro de rectángulos en función de sus lados.



Perímetro del aula (metros)	Largo del aula	Ancho del aula
36	8,7,9	10,11,9
30	5,7,6	10,8,9
48	12,14	12,10
60	15,20	15,10
56	14,20	14,8
20	5,3,2	5,7,8
72	18,6	18,30

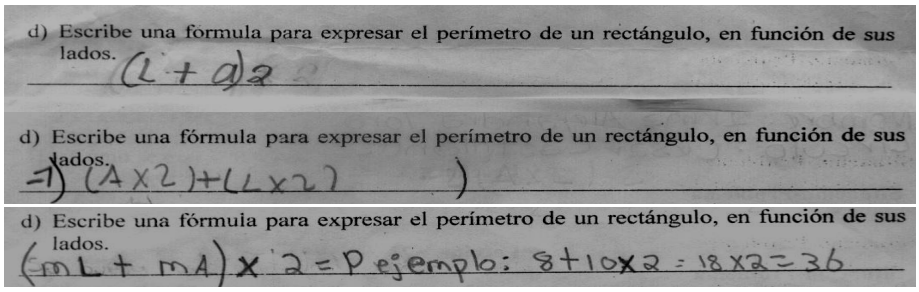
Después de la representación numérica los alumnos contestaron preguntas que indujeron a la representación general del perímetro de un rectángulo en función de sus lados, concluyendo con una fórmula o expresión algebraica que represente las relaciones numéricas.

Tabla N°.2: Resumen de los aciertos de los estudiantes al escribir una fórmula para expresar el perímetro de un rectángulo, en función de sus lados; en la fase que comprende la organización del trabajo individual.

Expresaron el perímetro correctamente, $p = 2a + 2l$, (o su equivalente)	Expresaron el perímetro solo con palabras	Intentaron hacerlo pero no lo expresaron correctamente	Presentaron un caso numérico particular	No lo hicieron
8%	5%	42%	21%	24%

En esta fase las respuestas acertadas fueron muy pocas, se observó que no se tiene el hábito del trabajo individual por parte del estudiante, el alumno espera que el profesor o los compañeros, realicen las actividades o le indiquen las actividades a realizar. El alumno mostró desconfianza en sus conocimientos previos y en sus actividades realizadas, considerando que necesita direcciones como definiciones o reglas que le indiquen las tareas a realizar. Sin embargo, los alumnos que realizaron el trabajo individual presentaron un buen dominio en la representación algebraica, utilizando los marcos gráficos, numéricos, además de explicar con palabras los procesos utilizados.

Figura N° 5: Representación algebraica del perímetro de un rectángulo en función de sus lados.


d) Escribe una fórmula para expresar el perímetro de un rectángulo, en función de sus lados.
(l + a)2

d) Escribe una fórmula para expresar el perímetro de un rectángulo, en función de sus lados.
=1) (A x 2) + (L x 2))

d) Escribe una fórmula para expresar el perímetro de un rectángulo, en función de sus lados.
(mL + mA) x 2 = P ejemplo: 8 + 10 x 2 = 18 x 2 = 36

Se observa que utilizan letras que relacionan las variables con sus nombres, un 42% no expresó correctamente el perímetro; en varios casos se expresó como el perímetro de un cuadrado o como el área de un rectángulo. Es importante observar, que el 21% expresó el perímetro de forma numérica, trabajaron con los datos de forma procedimental, los alumnos, realizan "operaciones aritméticas sobre números para obtener números" (Kieran, 1995, p.2), no conciben una respuesta que no sea numérica. Luego del trabajo individual que tiene como propósito diagnosticar los conocimientos previos e incentivar el trabajo por parte del alumno en clase; realizaron los ejercicios de la hoja de trabajo en grupo, trabajo en el cual se incrementaron los aciertos al escribir una fórmula para expresar el perímetro de un rectángulo, en función de sus lados, aunque no se logró en un nivel satisfactorio.

Tabla N°.3: Resultados de uno de los ejercicios en la lección N° 2 en la fase 2, trabajo en grupo.

Expresaron el perímetro correctamente, $p = 2a + 2l$ (o su equivalente)	Expresaron el perímetro como la suma de todos lados	Expresaron el perímetro sólo con palabras	Intentaron hacerlo, pero no lo expresaron correctamente	Presentaron un caso numérico particular	No lo hicieron
48%	6%	5%	35%	6%	0%

En el trabajo en grupo aumentó el número de expresiones del perímetro del rectángulo, considerándose correctas expresiones como $2 \times L + 2 \times A = P$ ó $(L \times 2) + (A \times 2) = P$, $(N.L \times 2) + (N.A \times 2)$, resaltando la importancia del trabajo cooperativo propuesta por Lev

Vygotsky (Moll, 1990, p. 189). El 48% de los estudiantes expresa su habilidad en el pensamiento algebraico al usar y trabajar con representaciones y símbolos, un 35% intentó expresar la relación aunque no lo logro correctamente.

Resultados en la lección N°.2 en la fase 3: Reutilización de lo aprendido:

La reutilización de lo aprendido se expresó en dos situaciones problemas:

La primera situación expresaba; "Para la fiesta del día del estudiante, los alumnos de segundo curso acordonarán el patio rectangular del colegio. Si se sabe que la base es 4 metros más largo que la altura del rectángulo, ¿Cuál es la expresión que determina los metros necesarios de cuerda?"

Tabla N°.4: Resultados obtenidos por los estudiantes al expresar el perímetro de un rectángulo cuyo largo es 4 metros más que el ancho.

Respuesta	4a + 8	4a +a	2a + 4	Escribió como respuesta un número	No lo hicieron
Cantidad de respuesta	20	1	5	6	9
%	49%	2%	12%	15%	22%

Se observa en la tabla que 20 de 41 estudiantes obtuvieron la respuesta correcta y 9 no intentaron obtener la respuesta. Para determinar la respuesta algunos estudiantes utilizaron la representación gráfica, el cálculo numérico y el concepto de términos semejantes. Por ejemplo en las siguientes hojas de trabajo, se presentaron varios valores para las medidas de los lados de un rectángulo para que el perímetro sea de 120 metros, realizando la representación grafica. Se observó un dominio del concepto de perímetro de una figura, y de las características de un rectángulo, situación que se puede observar en las graficas y las relaciones numéricas. Al inicio de la lección algunos grupos presentaron dificultad en el manejo del concepto de rectángulo en relación al concepto de cuadrado y de perímetro en

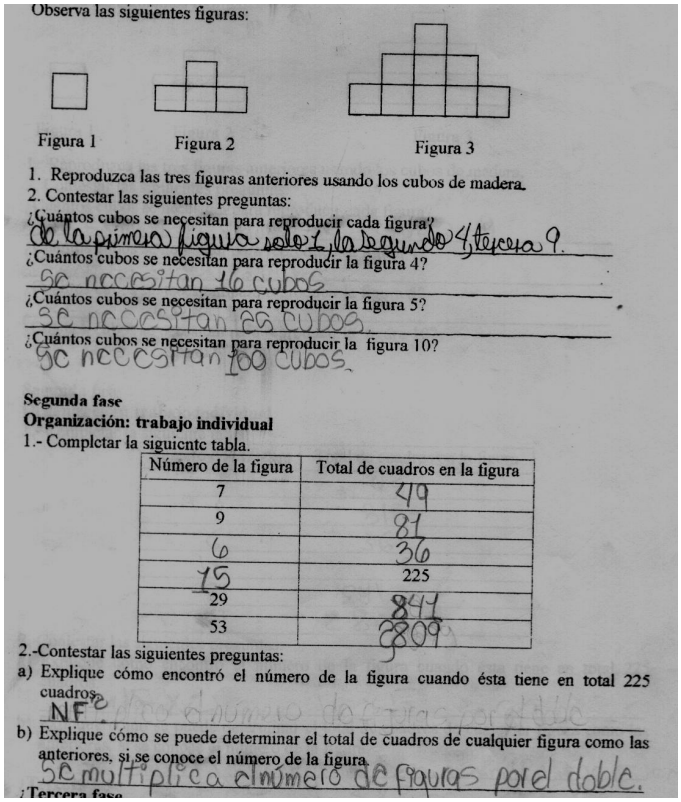
relación a área de un rectángulo. Conceptos que se reforzaron en la discusión de los hallazgos por los mismos alumnos y el profesor.

El segundo ejercicio de la etapa de familiarización con lo aprendido de la lección No 2, tenía como propósito afianzar o confirmar el dominio del concepto de variable, 19 de 41 determinaron correctamente que el número de pantalones y el número de camisa fabricadas en el taller son las variables y que el número de horas de mano de obra disponible y el número de manos de obras necesarias para fabricar cada pieza son las constantes.

Análisis de la Lección N°.3

La lección N° 3 tiene como objetivo que los alumnos deduzcan un patrón numérico y lo representen mediante una expresión algebraica. Se utilizó como herramientas las sucesiones de figuras que generan sucesiones numéricas, para manipular el concepto de variable y el concepto de expresión algebraica.

Figura N° 6: Hoja de trabajo realizada por un estudiante, para determinar el patrón general de una sucesión numérica



Observa las siguientes figuras:

Figura 1 Figura 2 Figura 3

1. Reproduzca las tres figuras anteriores usando los cubos de madera.
2. Contestar las siguientes preguntas:

¿Cuántos cubos se necesitan para reproducir cada figura?
de la primera figura solo 1, la segunda 4, tercera 9.

¿Cuántos cubos se necesitan para reproducir la figura 4?
Se necesitan 16 cubos

¿Cuántos cubos se necesitan para reproducir la figura 5?
Se necesitan 25 cubos

¿Cuántos cubos se necesitan para reproducir la figura 10?
Se necesitan 100 cubos.

Segunda fase

Organización: trabajo individual

1.- Completar la siguiente tabla.

Número de la figura	Total de cuadros en la figura
7	49
9	81
6	36
15	225
29	841
53	2809

2.-Contestar las siguientes preguntas:

a) Explique cómo encontró el número de la figura cuando ésta tiene en total 225 cuadros.
NF

b) Explique cómo se puede determinar el total de cuadros de cualquier figura como las anteriores, si se conoce el número de la figura.
Se multiplica el número de figuras por el doble.

¿Tercera fase

El estudiante generalizó a partir de situaciones concretas, en este caso trabajando con los cubos de madera formó superficies que tengan semejanzas con las figuras, utilizando los cubos como adoquines, de las que dedujo las relaciones numéricas. Utilizando en la generalización letras como etiquetas que representan palabras (N: Número y F: Figura), en la explicación de la generalización, utiliza la palabra doble por cuadrado, aunque en la representación algebraica utiliza correctamente el cuadrado de un número.

En la etapa de familiarización y reutilización de lo aprendido de la lección No 3, los alumnos debían determinar el término general de una sucesión numérica a partir de una sucesión geométrica, la expresión a encontrar es $n(n+1)/2$, donde n es el número de cuadros que tiene la figura.

Tabla N° 5: Expresiones para la sucesión de cuadros que forman una figura de escalera

Subgrupo de Trabajo del Grupo Experimental	Expresión utilizada
# 1	$N \times S \div 2$, N = N° de niveles, S = Número que sigue
# 2	$\frac{n^2+n}{2}$
# 3	$(n \cdot n + n) \div 2$
# 4	No lo hizo
# 5	$(N.N + N) \div 2$
# 6	$\frac{n^2+n}{2}$
# 7	$\frac{4(4+1)}{2}$,
# 8	$n \times S \div 2$; nivel por el sucesor y se divide entre 2
# 9	$(N.N + N) \div 2$
# 10	$\frac{NN \cdot NS}{2} = NC$, $\frac{\text{Número de niveles} \bullet \text{Número siguiente}}{2}$

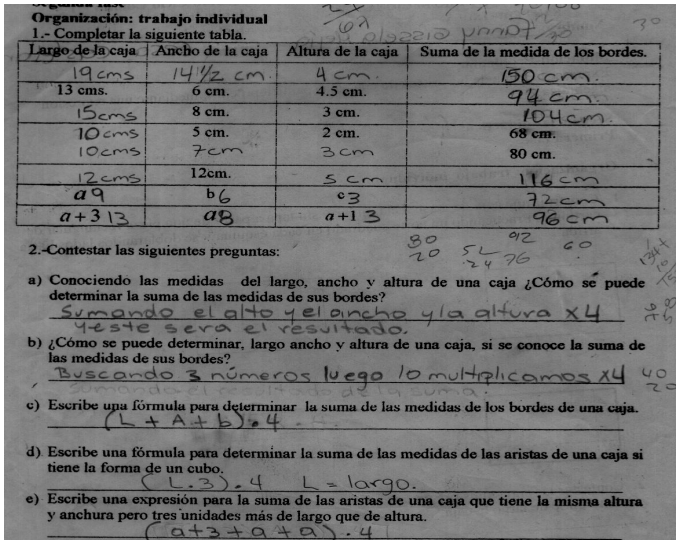
La mayoría de los subgrupos de trabajo utilizó expresiones apropiadas, el profesor explicó la equivalencia entre algunas expresiones y la conveniencia de utilizar una sola letra como representación de la variable. Por los datos de la tabla podemos afirmar que el grupo maneja de una manera satisfactoria el concepto de variable y de expresión algebraica.

Para finalizar la lección N° 3, los alumnos debían encontrar la expresión algebraica que relacione el número de cuadros necesarios para formar figuras en forma de "T", la expresión correcta es $4n+1$ donde n es el número de la figura: 4 grupos expresaron correctamente la relación, uno de los grupos utilizó R en representación de $4n$, explicando que es el número de cuadros de la figura anterior.

Análisis de la lección N° 4

La lección N° 4 inició con la elaboración de una caja sin tapa a partir de una hoja rectangular de papel construcción, con el objetivo de obtener las dimensiones de la caja para determinar una expresión algebraica para la suma de las aristas. En el proceso se utilizaron el marco geométrico, al elaborar la caja; el marco grafico, al representar gráficamente las dimensiones de las cajas; el marco numérico, al determinar las dimensiones de los lados de la caja y determinar la sumas de las medidas de las aristas y el marco algebraico al determinar una expresión general para la suma de las aristas de una caja.

Figura N° 7: Hoja de trabajo de la segunda fase de la lección 4.



Organización: trabajo individual

1.- Completar la siguiente tabla.

Largo de la caja	Ancho de la caja	Altura de la caja	Suma de la medida de los bordes.
19cms	14½ cm.	4 cm.	150 cm.
13 cms.	6 cm.	4.5 cm.	94 cm.
15cms	8 cm.	3 cm.	104cm.
10cms	5 cm.	2 cm.	68 cm.
10cms	7cm	3cm	80 cm.
12cms	12cm.	5 cm	116cm
a 9	b 6	c 3	72cm
a+3 13	a 8	a+1 3	96cm

2.-Contestar las siguientes preguntas:

a) Conociendo las medidas del largo, ancho y altura de una caja ¿Cómo se puede determinar la suma de las medidas de sus bordes?

Sumando el alto y el ancho y la altura x4 y este sera el resultado.

b) ¿Cómo se puede determinar, largo ancho y altura de una caja, si se conoce la suma de las medidas de sus bordes?

Buscando 3 números luego lo multiplicamos x4

c) Escribe una fórmula para determinar la suma de las medidas de los bordes de una caja.

(L + A + b) . 4

d) Escribe una fórmula para determinar la suma de las medidas de las aristas de una caja si tiene la forma de un cubo.

(L . 3) . 4 L = largo.

e) Escribe una expresión para la suma de las aristas de una caja que tiene la misma altura y anchura pero tres unidades más de largo que de altura.

(a+3 + a + a) . 4

Ocho de los subgrupos realizaron las relaciones numéricas, multiplicando por cuatro las medidas de largo, ancho y altura y luego realizaron la suma; dos de los grupos multiplicaron por dos. Cuatro grupos obtuvo la expresión para la suma de las aristas de una caja que tiene como medidas, $a, a, a+3$, solamente un grupo realizó la reducción de términos semejantes al obtener una expresión de la forma $(a+3+a+a)$ como $(3a+3)4$. Cuatro de los grupos al completar la tabla en donde contiene variables, le asignaron valores numéricos a las variables para determinar la suma de las aristas. Sin embargo, como se puede observar en la figura N° 7 al contestar las preguntas reflexivas sobre los datos de la tabla utilizaron las variables, lo que nos indica que ya existe un manejo del concepto de variable aunque dependiente de la aritmética.

La familiarización y reutilización de lo aprendido se asignó como tarea, no obstante sólo 6 alumnos la presentaron completa; aunque se utilizó para repaso de la reducción de términos semejantes, ya que se detectaron errores como la reducción de términos a uno solo sin que sean semejantes o reducción de términos algebraicos a un número.

Análisis de la lección N° 5

La lección **N°** 5 tenía como objetivo que los estudiantes identificaran y redujeran términos semejantes en una expresión algebraica. Para variar las actividades en relación a la lección anterior se elaboró una caja con tapa, utilizando una lámina rectangular de papel construcción, siguiendo el modelo de una caja de pizza. Los alumnos debían determinar las dimensiones de las caras de la caja cuando esta abierta y luego determinar una expresión cuando la caja es cerrada. Las dimensiones de la caja fueron escogidas por cada estudiante para afianzar el concepto de variable. Para obtener el concepto de términos semejantes se utilizó el concepto de área de una región rectangular y para obtener una expresión algebraica con términos semejantes, la suma de las áreas de cada sección lateral de la caja. Se concluye la segunda fase escribiendo una expresión para a superficie de una caja cerrada.

Un grupo utilizó la expresión $[(a\cdot b)+(a\cdot c)+(b\cdot c)]\cdot 2 = A$ en donde la A representa área, mientras que seis grupos expresaron el área como $(a\cdot b)2+(a\cdot c)2+(b\cdot c)2 = A$

Uno de los grupos escribió $(a\cdot b)+(a\cdot c)+(b\cdot c)^2$, donde se puede observar que hay un conflicto entre el concepto de doble y el cuadrado de una cantidad o lo tomaron de otro grupo

sin comprender lo que representaban. Otro grupo presentó la expresión $2a + 2b + 2c = A$, en donde hace referencia a la lección anterior en donde sumó las aristas de la caja, se observa que este grupo no maneja el concepto de área de una región rectangular, solamente un grupo no realizó la expresión. Se puede afirmar con los resultados anteriores que el curso maneja el concepto de área y de términos semejantes. Se realizaron algunas observaciones por el profesor, para el uso de los paréntesis y el orden al escribir números y letras y el uso de letras para representar variables; para algunos alumnos las letras "*a*" y "*A*" representan las mismas variables.

En la etapa de reutilización de lo aprendido, los alumnos debían determinar o expresar el área de figuras rectangulares por ejemplo un ejercicio consistió en expresar el área de un rectángulo con lados 7 y a, los resultados son los siguientes:

Tabla N° 6: Expresión algebraica que representa el área de un rectángulo cuyos lados son 7 y "a".

N°	Expresión utilizada por el estudiante	Cantidad de estudiantes que utilizaron la expresión
1	$7 \cdot a$	12
2	14a	3
3	$14cm^2$	2
4	21a	1
5	14 + a	1
6	(7 + a)2	2
7	14 + 2a	8
8	Otras expresiones	12

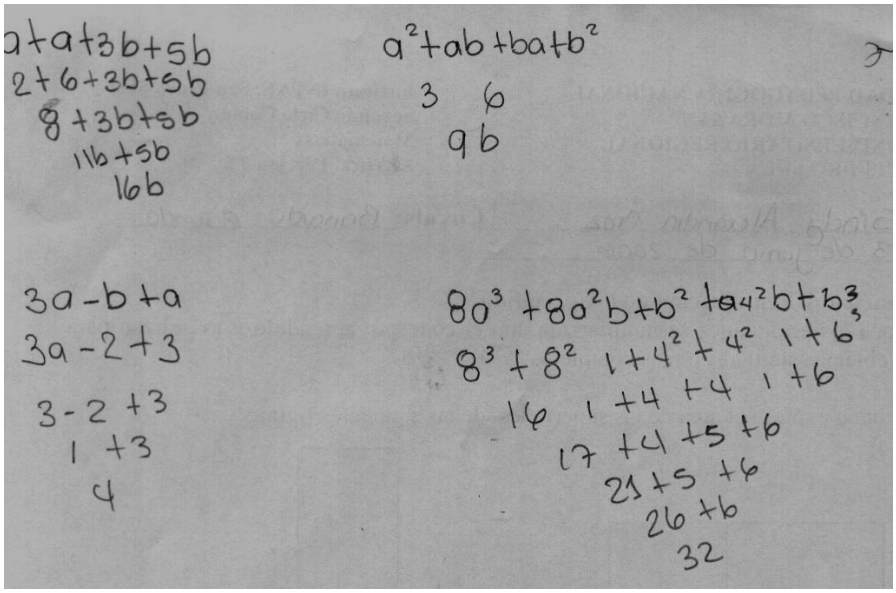
Los resultados se detallan a continuación:

De los 41 estudiantes, 12 escribieron la expresión correcta manejando el concepto de área de un rectángulo, 10 utilizaron la expresión que determina el perímetro del rectángulo, estos alumnos no distinguieron entre el concepto de perímetro y área. Las otras expresiones denotan que los alumnos buscan a reducir toda expresión a un número y los otros combinaron

estrategias utilizadas en las lecciones anteriores, por ejemplo al duplicar un lado al multiplicar todos los lados como largo ancho y altura; el alumno no tiene aún el hábito de analizar las estrategias a utilizar al enfrentarse a nuevas situaciones, aplica las estrategias utilizadas a situaciones anteriores de manera mecánica.

Para finalizar la lección se realizaron cuatro ejercicios sobre reducción de términos semejantes, en los cuales solamente dos alumnos las realizaron correctamente, mientras que los otros continuaron manejando la reducción de términos semejantes de forma aritmética en algunos casos asignando valores a las variables.

Figura N° 8: Reducción de términos semejantes por un estudiante, realizado como trabajo individual.



En esta hoja de trabajo se observó que el estudiante asignó valores a algunas variables y reduce términos sumándolos aritméticamente por ejemplo 8 + 3b lo reduce a “11b”, al literal “a” en uno de los ejercicios le asigna el valor de “1” relacionándolo con la posición que esta letra tiene en el alfabeto, a la letra “b” le asigna el valor de 2. Esto nos indica que además de incentivar el descubrimiento de los conceptos matemáticos no se debe descuidar la ejercitación para afianzar los conocimientos evitando malas interpretaciones de los mismos.

Análisis de la lección N° 6

Esta lección tenía como objetivo, iniciar en la multiplicación de polinomios específicamente de un monomio con un binomio. Se utilizó el concepto de área de un rectángulo como herramienta para introducir la multiplicación de un monomio con un binomio. Al igual que las lecciones anteriores los estudiantes realizaron deducciones numéricas y algebraicas a partir de una situación problemática, de la cual hicieron representaciones gráficas. Al finalizar la segunda fase los alumnos debían expresar el área de un rectángulo que tiene un lado con tres metros más de longitud que el otro, utilizando una expresión algebraica.

Tabla N° 7: Expresión algebraica que representa el área de un rectángulo que tiene un lado con una longitud de 3 metros más que el otro.

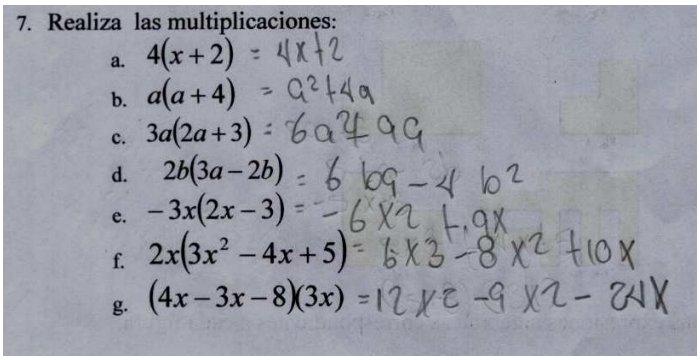
N°	Expresión utilizada por el estudiante	Cantidad de grupos que escribieron la expresión
1	(L + 3)L	2
2	(a + 3) a	2
3	a·a + 3	2
4	b + (a +3)	3
5	$(h + 3 + h)^2$	1

Los resultados se detallan a continuación:

De los diez grupos cuatro dedujeron la expresión correcta, dos manejaron la idea del producto; pero no utilizaron los paréntesis para expresar el producto, tres grupos utilizaron diferentes variables para indicar los lados y utilizaron paréntesis para expresar multiplicación pero lo antecedieron del signo de la suma. Uno de los grupos denotó bien las variables que representan las medidas de los lados del rectángulo, pero no la expresión del producto que representa el área. Con estas actividades se trató de explicar una de las formas de presentar la multiplicación de un monomio con un binomio, aunque no se profundizó en la realización del producto.

En la etapa de reutilización de lo aprendido los alumnos expresaron áreas como productos y productos como áreas, además se realizaron multiplicaciones de monomios con polinomios.

Figura N° 9: Multiplicaciones de monomios con polinomios realizados por un estudiante en la lección N° 6.


7. Realiza las multiplicaciones:

a. $4(x+2) = 4x+2$

b. $a(a+4) = a^2+4a$

c. $3a(2a+3) = 6a^2+9a$

d. $2b(3a-2b) = 6ba-4b^2$

e. $-3x(2x-3) = -6x^2+9x$

f. $2x(3x^2-4x+5) = 6x^3-8x^2+10x$

g. $(4x-3x-8)(3x) = 12x^2-9x^2-24x$

El error más frecuente que se observó en las hojas de trabajo al realizar las multiplicaciones, es del tipo que se observa en el inciso a de la figura N° 9, en donde el alumno solamente realiza un producto, también se detectó que al multiplicar una variable con un número únicamente escriben el número, dando la idea que se le asignó el valor de uno a la variable. En la figura N° 9 se puede observar que el alumno domina el concepto de multiplicación de polinomios al aplicar las propiedades del producto de potencias de igual base con diferente exponente.

Análisis de la lección N° 7

La lección N° 7 fue desarrollada el 22 de junio de 2006, en una sola jornada de trabajo desde las 7:40 a.m. hasta las 11:30 a.m. Es un período fuera de la jornada de trabajo ordinario del colegio por motivo de suspensiones de clase por las actividades gremiales, algunos estudiantes llegaron tarde y no trabajaron con entusiasmo de aprender, sino de cumplir con un compromiso que habían adquirido y fue una jornada de trabajo muy larga.

El objetivo de esta lección era, calcular productos entre binomios y polinomios, determinar factores, eliminar paréntesis y reducir términos semejantes, en forma general, calcular el producto entre expresiones algebraicas. Para el logro de tal objetivo el estudiante utilizó las

figuras planas regulares como herramienta para la búsqueda de áreas de una figura rectangular. Para poder obtener una expresión algebraica que implicara una multiplicación de binomios se planteó la siguiente situación problemática:

"El propietario de una tienda desea ampliar el área de su local de ventas, ampliando dos lados de la casa utilizada como tienda, para que sus clientes puedan consumir en su establecimiento. Si el área original es un cuadrado y las ampliaciones son de 3m y 2m en cada uno de los dos lados. ¿Cuáles son las medidas del área de la tienda ya ampliada?"

Según los pasos de la metodología, el alumno analiza situaciones numéricas para deducir una representación algebraica del producto de binomio de la forma $(x+a)(x+b)$.

Tabla N° 8: Respuestas al planteamiento de la situación problema, por los alumnos cuando realizaron trabajo en forma individual; "Escribe una expresión algebraica para expresar el área nueva, al realizar ampliaciones a un cuadrado":

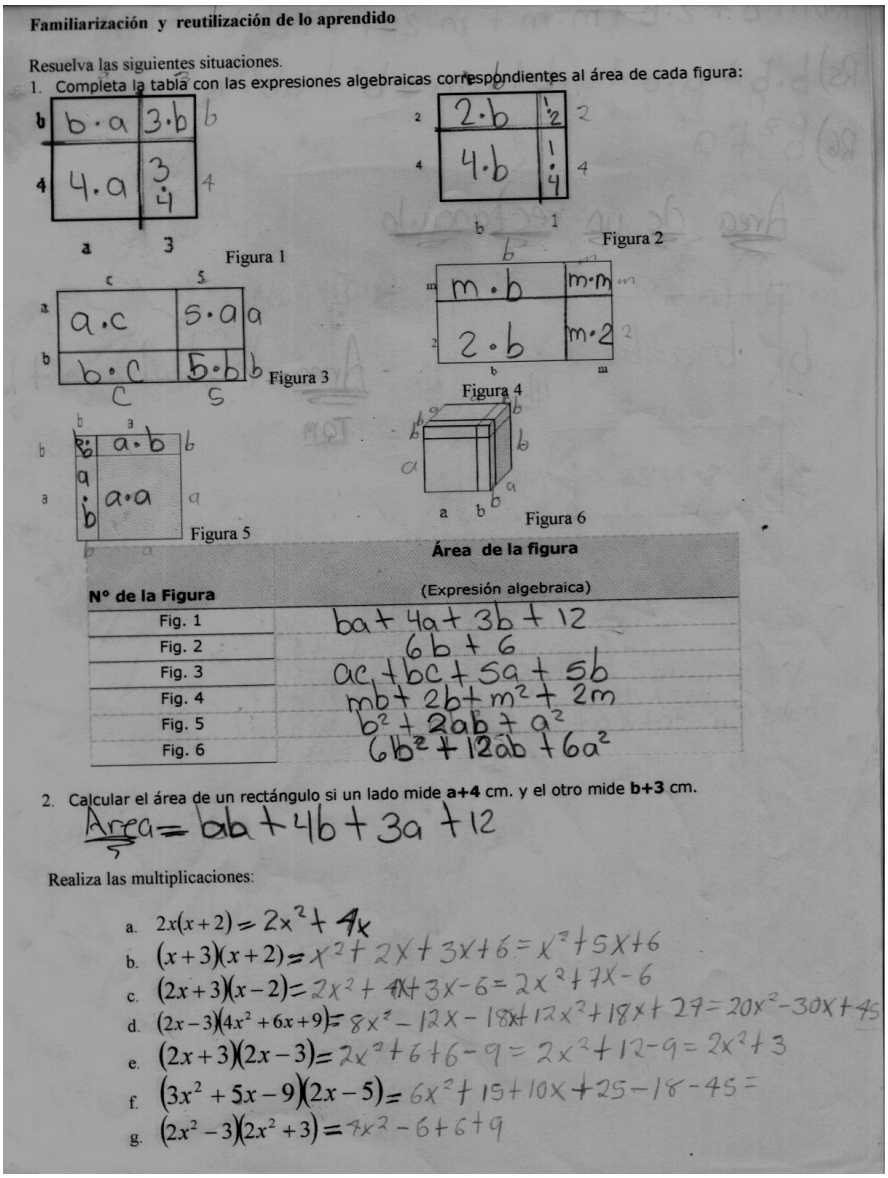
Expresión utilizada	Cantidad alumnos que expresaron correctamente
$a^2 + a \cdot 3 + (a+3)2$	3 de 42
$A^2 + (b \cdot A) + c(b+A)$	4 de 42
$(A + agregado)(L + agregado)$	5 de 42
$(L+3)(L+2)$	1 de 42
$L^2 + L \cdot 3 + (L+3)2$	3 de 42
$(a+2)(a+3)$	1 de 42

La expresión esperada como respuesta a esta pregunta era $x^2 + 5x + 6$ o su equivalente; sin embargo, la mayoría de estudiantes presenta deficiencia en expresar productos: como el uso de paréntesis, por ejemplo para expresar $(a+2)(a+3)$ se utilizó $(a+3\times a+2)$. Se puede

notar el dominio estructural del álgebra y el uso de gráficas por algunos estudiantes que expresaron el área como la sumas de las áreas de tres rectángulos.

En la fase de familiarización y reutilización de lo aprendido en la lección siete se plantea la multiplicación de binomios

Figura N° 10: Hoja de trabajo por uno de los subgrupos del grupo experimental, en donde se realizó la multiplicación de binomios:



Familiarización y reutilización de lo aprendido

Resuelva las siguientes situaciones.

1. Completa la tabla con las expresiones algebraicas correspondientes al área de cada figura:

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 Figura 6

N° de la Figura	Área de la figura (Expresión algebraica)
Fig. 1	$ba + 4a + 3b + 12$
Fig. 2	$6b + 6$
Fig. 3	$ac + bc + 5a + 5b$
Fig. 4	$mb + 2b + m^2 + 2m$
Fig. 5	$b^2 + 2ab + a^2$
Fig. 6	$6b^2 + 12ab + 6a^2$

2. Calcular el área de un rectángulo si un lado mide **a+4** cm. y el otro mide **b+3** cm.

Area $= ab + 4b + 3a + 12$

Realiza las multiplicaciones:

a. $2x(x+2) = 2x^2 + 4x$

b. $(x+3)(x+2) = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6$

c. $(2x+3)(x-2) = 2x^2 + 4x + 3x - 6 = 2x^2 + 7x - 6$

d. $(2x-3)(4x^2+6x+9) = 8x^3 - 12x - 18x + 12x^2 + 18x + 27 = 20x^2 - 30x + 45$

e. $(2x+3)(2x-3) = 2x^2 + 6 + 6 - 9 = 2x^2 + 12 - 9 = 2x^2 + 3$

f. $(3x^2+5x-9)(2x-5) = 6x^2 + 15 + 10x + 25 - 18 - 45 =$

g. $(2x^2-3)(2x^2+3) = 4x^2 - 6 + 6 + 9$

Se puede observar que se presentan errores en los ejercicios en donde no se utilizó la relación gráfica, son muy frecuentes los errores con los signos al multiplicar y considerar al valor de "x" como "1".

Tabla N° 9: Resultados en forma general al escribir la expresión algebraica que corresponde a cada figura en el ejercicio 1 de la etapa de familiarización en la lección N° 7:

Figura	Expresión algebraica	**Cantidad de subgrupos que acertaron**	**Cantidad de subgrupos que acertaron en %**
1	$ab+4a+3b+12$	7 de 10	70
2	$6b+6$	7 de 10	70
3	$ac+bc+5a+5b$	9 de 10	90
4	$m^2+bm+2b+2m$	5 de 10	50
5	$a^2+2ab+b^2$	8 de 10	80
6	$6a^2+12ab+6b^2$	7 de 10	70

De estos resultados se observó que el trabajo cooperativo realizado en los subgrupos, facilita la adquisición de los conceptos por los estudiantes, afirmando los supuestos teóricos de Lev Vygotsky. El uso de los cuadros numéricos y gráfico, disminuye el número de errores al representar las situaciones en el cuadro algebraico.

Tabla N° 10: Resultados en forma general al escribir la expresión algebraica, que corresponde al área de un rectángulo con lados "a + 4" y "b +3" cm. en el ejercicio 2 de la etapa de familiarización en la lección N° 7:

Expresión algebraica	Cantidad de subgrupos que utilizaron gráfica	Cantidad de subgrupos que acertaron al escribir la expresión	Cantidad de subgrupos que acertaron al escribir la expresión algebraica en %
$ab+3a+4b+12$	5	3	30

De los diez subgrupos tres descubrieron la expresión correcta, el alumno no esta acostumbrado a utilizar la representación gráfica a menos que se le indique en el ejercicio, ni utiliza la verificación de sus respuestas con otras formas de representación, o con casos más sencillos o la comprobación con asignación de valores a las variables.

Tabla N° 11: Cantidad de subgrupos que presentaron los resultados de los productos con binomios en el ejercicio 2 de la etapa de familiarización en la lección N° 7:

Ejercicio	Respuesta	Cantidad de subgrupos que acertaron al escribir la expresión	Cantidad de subgrupos que acertaron en %
a. $2x(x+2)$	$2x^2+4x$	**8**	**80**
b. $(x+3)(x+2)$	x^2+5x+6	**6**	**60**
c. $(2x+3)(x-2)$	$2x^2+x-6$	**1**	**10**
d. $(2x-3)(4x^2+6x+9)$	$8x^3-27$	**0**	**0**
e. $(2x+3)(2x-3)$	$4x^2-9$	**0**	**0**
f. $(3x^2+5x-9)(2x-5)$	$x^3-5x^2-43x+45$	**0**	**0**
g. $(2x^2-3)(2x^2+3)$	$4x^4-9$	**1**	**10**

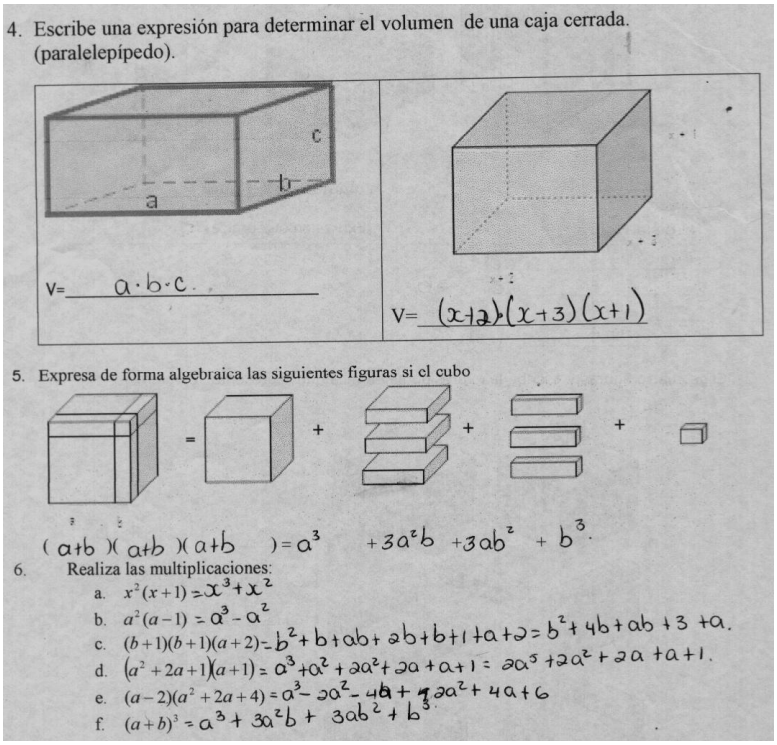
Del trabajo en la lección N° 7 se observa que el alumno comete menos errores en la multiplicación de polinomios cuando utiliza las representaciones gráficas, y los errores son más frecuentes cuando un polinomio presenta signos negativos, lo que dificulta la reducción de términos semejantes. Esto indica que se debe realizar más ejercicios en la tercera fase para afianzar los conocimientos adquiridos, para lograr la independencia del estudiante del marco gráfico y del trabajo en grupo.

Análisis de la lección N° 8

La lección N° 8 se desarrolló del 3 de al 7 de julio de 2006, una semana muy irregular en el desarrollo de clases. La lección continuó con la multiplicación de polinomios, se

desarrollaron actividades para determinar el producto de tres binomios. Se utilizó el concepto de volumen como herramienta para determinar una expresión algebraica que contenga el producto de tres binomios, realizando las deducciones numéricas a partir de las representaciones con cubos de madera y representaciones gráficas en papel. Los alumnos con ayuda del profesor dedujeron la expresión para manifestar el volumen de una caja que tiene tres pulgadas más de largo que de ancho, y dos pulgadas más alto que de ancho. De los 41 alumnos, 21 expresaron el volumen como $(3+A)(2+A)A$ o su equivalente, que es la expresión correcta, 15 alumnos utilizaron dos o tres variables en la expresión y 5 no lo realizaron. Se puede determinar que más del 50% de los estudiantes comprendieron el concepto de volumen aunque el 37% no logró expresar el volumen en función de un solo lado. La etapa de familiarización se asignó como tarea y la realizaron 28 estudiantes, conteniendo como ejercicios la multiplicación de polinomios. De los 28 estudiantes que realizaron la tarea 6 la realizaron correctamente, 8 alumnos la presentaron incompleta y 14 intentaron hacerla pero cometieron errores.

Figura N° 11. Multiplicación de polinomios por un estudiante en la lección #8:


4. Escribe una expresión para determinar el volumen de una caja cerrada. (paralelepípedo).

5. Expresa de forma algebraica las siguientes figuras si el cubo

$(a+b)(a+b)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

6. Realiza las multiplicaciones:

a. $x^2(x+1) = x^3 + x^2$

b. $a^2(a-1) = a^3 - a^2$

c. $(b+1)(b+1)(a+2) = b^2 + b + ab + 2b + b + 1 + a + 2 = b^2 + 4b + ab + 3 + a$.

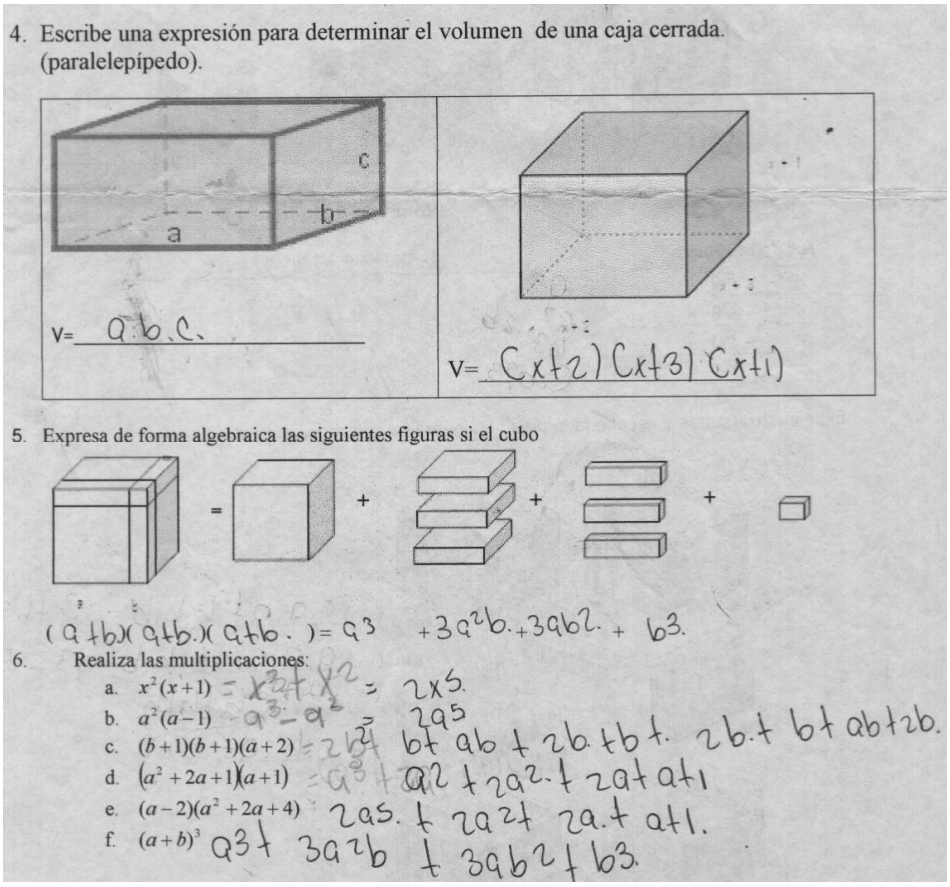
d. $(a^2+2a+1)(a+1) = a^3 + a^2 + 2a^2 + 2a + a + 1 = 2a^5 + 2a^2 + 2a + a + 1$.

e. $(a-2)(a^2+2a+4) = a^3 - 2a^2 - 4a + 2a^2 + 4a + 6$

f. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

El estudiante que elaboró los ejercicios de esta hoja de trabajo, tiene un dominio del concepto de volumen, como de expresión algebraica al representar el volumen de un paralelepípedo en función de sus lados. Realizó correctamente la multiplicación de monomios aplicando las leyes de los exponentes y aplicó la reducción de términos semejantes a excepción del inciso "e" del ejercicio 6 de la figura N° 11.

Figura N° 12. Multiplicación de polinomios por un estudiante en la lección N° 8:


4. Escribe una expresión para determinar el volumen de una caja cerrada. (paralelepípedo).

a b c

V= a.b.c.

V= (x+2)(x+3)(x+1)

5. Expresa de forma algebraica las siguientes figuras si el cubo

(a+b)(a+b.)(a+b.) = a3 +3a2b.+3ab2. + b3.

6. Realiza las multiplicaciones:

a. $x^2(x+1)$ = x3+x2 = 2x5.

b. $a^2(a-1)$ a3-a2 = 2a5

c. $(b+1)(b+1)(a+2)$ = 2b2 b+ab + 2b.+b+. 2b.+ b+ab+2b.

d. $(a^2+2a+1)(a+1)$ = a3+ a2+2a2.+2a+a+1

e. $(a-2)(a^2+2a+4)$ 2a5. + 2a2+ 2a.+ a+1.

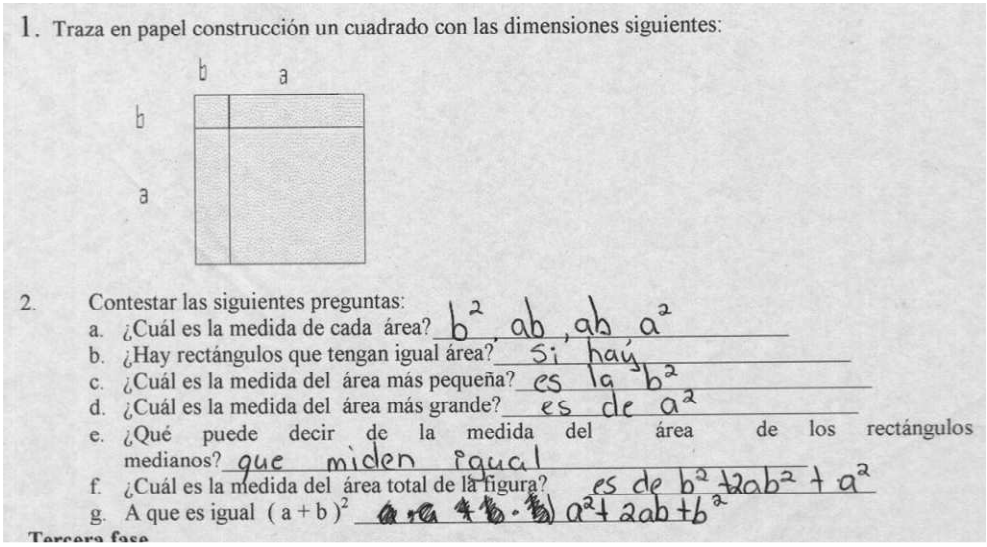
f. $(a+b)^3$ a3+ 3a2b + 3ab2+b3.

El alumno demostró el dominio del concepto de volumen, pero presentó diferentes problemas en la multiplicación de polinomios: identificación y reducción de términos semejantes, multiplicación de monomios y multiplicación de monomios. Sin embargo se puede observar que la multiplicación que realizó correctamente es la que relacionó con la representación gráfica, lo que nos indica la importancia del cambio de cuadros en la asimilación de los conceptos algebraicos.

Análisis de la lección N° 9

La lección N° 9 se desarrolló el 11 de julio de 2006 en las instalaciones del Centro Universitario Regional de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán San Pedro Sula. La lección trató sobre el desarrollo de los productos notables. En el desarrollo de la lección participaron 38 estudiantes. La primera parte de la lección consistió en deducir el producto notable $(a+b)^2$, se inició realizando actividades numéricas construyendo con cubos de madera un adoquinado cuadrado y luego se realizaron extensiones de dos unidades en lo largo y ancho, luego se realizó el trazo del cuadrado en papel construcción:

Figura N° 13: Descubrimiento o construcción del producto notable $(a+b)^2$


1. Traza en papel construcción un cuadrado con las dimensiones siguientes:

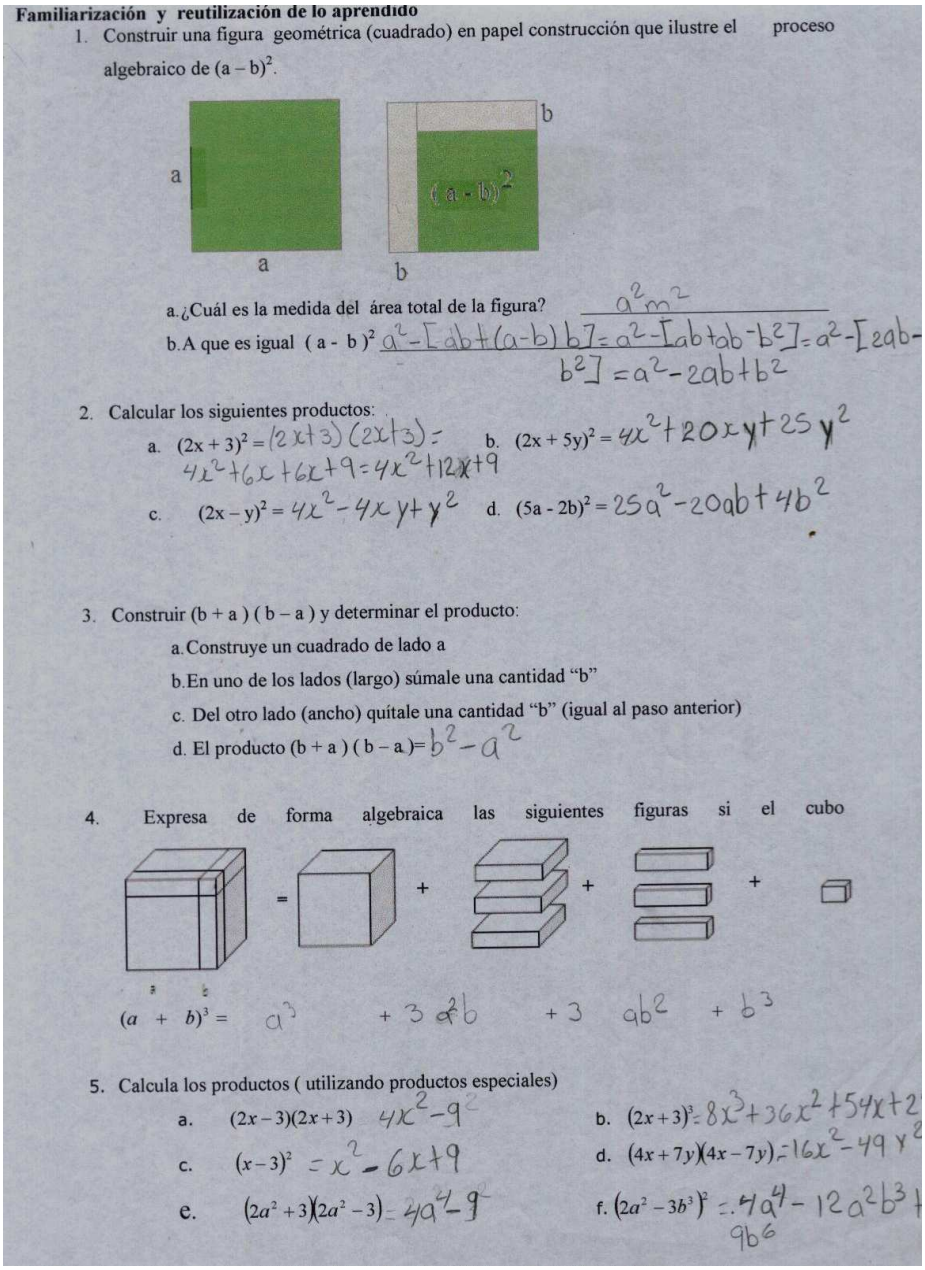
2. Contestar las siguientes preguntas:
   a. ¿Cuál es la medida de cada área? b^2, ab, ab a^2
   b. ¿Hay rectángulos que tengan igual área? Si hay
   c. ¿Cuál es la medida del área más pequeña? es la b^2
   d. ¿Cuál es la medida del área más grande? es de a^2
   e. ¿Qué puede decir de la medida del área de los rectángulos medianos? que miden igual
   f. ¿Cuál es la medida del área total de la figura? es de $b^2 + 2ab^2 + a^2$
   g. A que es igual $(a+b)^2$ $a^2 + 2ab + b^2$

Tercera fase

De los 38 estudiantes 26 obtuvieron la expresión correcta para el producto notable y 12 no lograron deducirla. Después del trabajo en grupo se discutieron los resultados en la pizarra en donde se detectó el dominio del concepto de expresión algebraica y del álgebra en forma estructural al crear una expresión para un producto notable a partir de una figura geométrica que contiene variables como medidas.

En la etapa de familiarización con lo aprendido se asignó como tarea determinar el producto notable $(a-b)^2$, el cual presentó dificultad para la mayoría de los estudiantes, sin embargo se realizaron descubrimientos correctos por un grupo de alumnos:

Figura N° 14: Deducción del producto notable $(a-b)^2$ por un estudiante en la etapa de reutilización de lo aprendido en la lección 9:



Familiarización y reutilización de lo aprendido

1. Construir una figura geométrica (cuadrado) en papel construcción que ilustre el proceso algebraico de $(a-b)^2$.

a. ¿Cuál es la medida del área total de la figura? $a^2 m^2$

b. A que es igual $(a-b)^2$ $a^2-[ab+(a-b)b]=a^2-[ab+ab-b^2]=a^2-[2ab-b^2]=a^2-2ab+b^2$

2. Calcular los siguientes productos:

a. $(2x+3)^2=(2x+3)(2x+3)=4x^2+6x+6x+9=4x^2+12x+9$

b. $(2x+5y)^2=4x^2+20xy+25y^2$

c. $(2x-y)^2=4x^2-4xy+y^2$

d. $(5a-2b)^2=25a^2-20ab+4b^2$

3. Construir $(b+a)(b-a)$ y determinar el producto:

a. Construye un cuadrado de lado a

b. En uno de los lados (largo) súmale una cantidad "b"

c. Del otro lado (ancho) quítale una cantidad "b" (igual al paso anterior)

d. El producto $(b+a)(b-a)=b^2-a^2$

4. Expresa de forma algebraica las siguientes figuras si el cubo

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

5. Calcula los productos (utilizando productos especiales)

a. $(2x-3)(2x+3)$ $4x^2-9^2$

b. $(2x+3)^3=8x^3+36x^2+54x+2$

c. $(x-3)^2=x^2-6x+9$

d. $(4x+7y)(4x-7y)=16x^2-49y^2$

e. $(2a^2+3)(2a^2-3)=4a^4-9^2$

f. $(2a^2-3b^3)^2=4a^4-12a^2b^3+9b^6$

De esta hoja de trabajo se puede detectar el dominio estructural del álgebra por este estudiante al deducir el producto notable $(a-b)^2$ de la siguiente manera:

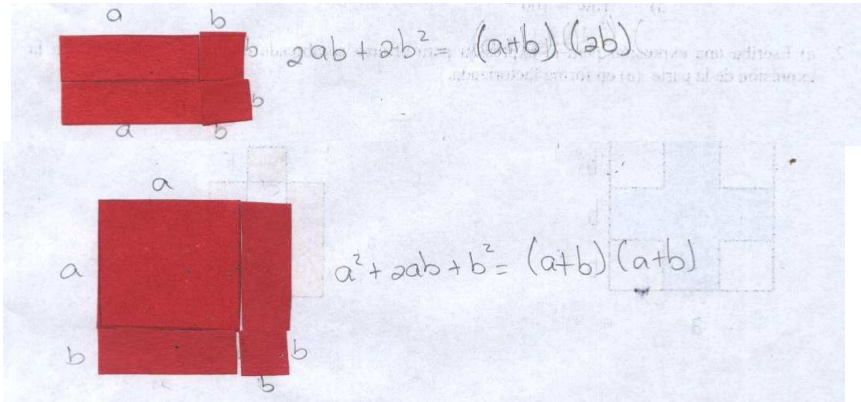
$a^2 - [ab + (a-b)b] = a^2 - [ab + ab - b^2] = a^2 - 2ab + b^2$, se puede observar que existe un dominio en el uso de los signos de agrupamiento en la reducción de términos semejantes, en la multiplicación de polinomios y el uso apropiado de los signos en la multiplicación.

Análisis de la lección N° 10

La lección N° 10 se desarrolló el 19 de julio de 2006, con únicamente 27 estudiantes de los 41 que tiene la sección 1 del segundo ciclo común. El contenido a tratar en la lección fue la factorización de expresiones algebraicas. Se utilizó como herramienta las áreas de figuras rectangulares. Se inició con la factorización de la expresión $a^2 - b^2$; para lo cual se trazó en cartulina un cuadrado de lado 6 y se le quitó un cuadrado de lado dos en una esquina, para determinar la relación numérica de la diferencia de dos cuadrados. Luego se realizó el mismo procedimiento trazando un cuadrado de lado "a" al cual se le quitó un cuadrado de la "b", sugiriendo a los alumnos que construyeran un rectángulo para determinar las nuevas dimensiones de la figura y expresar el área del rectángulo como el producto de la base por la altura. De los 27 estudiantes 12 dedujeron la expresión correcta, 10 lo intentaron pero no lo lograron y 5 solo realizaron las relaciones numéricas y gráficas.

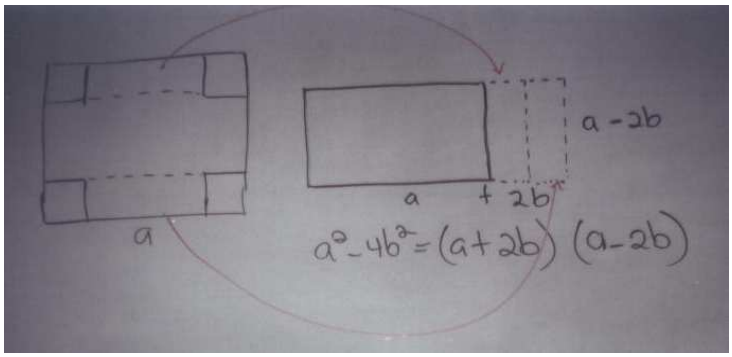
En la etapa de familiarización los alumnos realizaron otras factorizaciones, construyendo rectángulos con papel construcción y expresando el área como el producto de la base por la altura.

Figura N° 15: Deducción de la factorización de expresiones algebraicas por un estudiante:



El concepto de factorización se expresó mediante la representación del área de un rectángulo.

Figura N° 16: Deducción grafica de la factorización de diferencia de cuadrados por un estudiante.



La figura N° 16 nos muestra el grafico utilizado en la pizarra, por un estudiante al momento de realizar la socialización de las respuestas, lo que indica la comprensión del concepto de factorización.

Análisis de la lección N° **11**

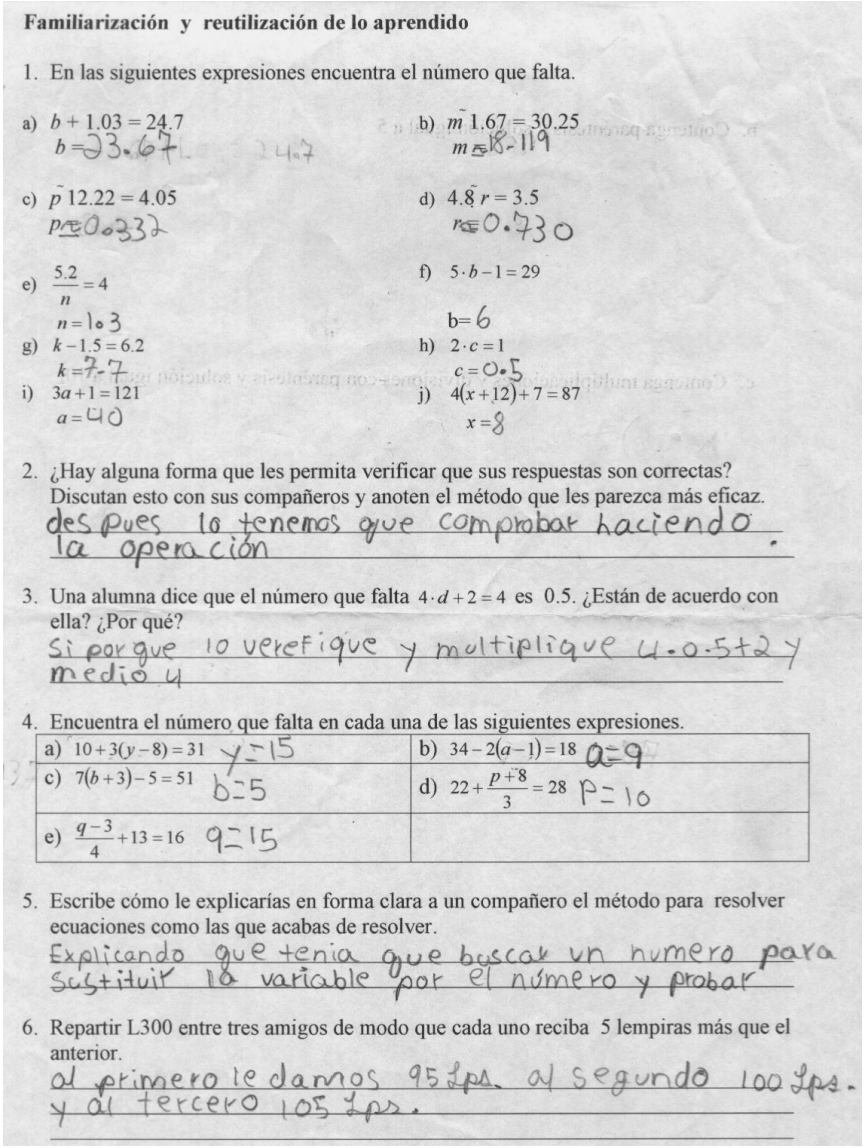
El objetivo de la lección N° 11 es la solución de ecuaciones lineales a partir de los conocimientos previos de los estudiantes, no se explicó ningún método de solución. Esta lección se desarrolló el 20 de Julio de 2006. Para iniciar la clase se presentó un video sobre una situación problemática de la vida cotidiana, en donde se presenta un plan de crédito para el uso de llamadas en teléfonos celulares. Como parte esencial de la lección se le pidió al estudiante, que escribiera en la guía de trabajo, una expresión algebraica que relacione el crédito otorgado para el uso de teléfono celular, con el número de minutos que se habla y el saldo disponible. La situación problema para escribir la expresión algebraica se detalla a continuación:

"Una compañía telefónica ofrece teléfonos celulares que operan con tarjetas de diferentes precios, y cobra 6 lempiras por minuto de llamada. Si te otorgaron un crédito de 300 lempiras y el saldo que te queda es de 30 lempiras, escriba una expresión algebraica que indique tal situación".

De los 27 estudiantes que asistieron a esta lección, 15 escribieron la expresión correcta: $300 - 6n = 30$ y doce escribieron un caso numérico. En esta etapa se utilizó la variable como una generalización del número de minutos de duración de la llamada telefónica.

En la etapa de reutilización de lo aprendido loa alumnos resolvieron ecuaciones lineales en una variable:

Figura N° 17: Hoja de trabajo sobre resolución de ecuaciones lineales en una variable.



Familiarización y reutilización de lo aprendido

1. En las siguientes expresiones encuentra el número que falta.

a) $b + 1.03 = 24.7$
$b = 23.67$

b) $m - 1.67 = 30.25$
$m = 18.119$

c) $p - 12.22 = 4.05$
$p = 0.332$

d) $4.8 - r = 3.5$
$r = 0.730$

e) $\frac{5.2}{n} = 4$
$n = 1.3$

f) $5 \cdot b - 1 = 29$
b= 6

g) $k - 1.5 = 6.2$
$k = 7.7$

h) $2 \cdot c = 1$
$c = 0.5$

i) $3a + 1 = 121$
$a = 40$

j) $4(x + 12) + 7 = 87$
$x = 8$

2. ¿Hay alguna forma que les permita verificar que sus respuestas son correctas? Discutan esto con sus compañeros y anoten el método que les parezca más eficaz.
despues lo tenemos que comprobar haciendo la operación.

3. Una alumna dice que el número que falta $4 \cdot d + 2 = 4$ es 0.5. ¿Están de acuerdo con ella? ¿Por qué?
Si porque lo verefique y multiplique 4.0.5+2 y medio 4

4. Encuentra el número que falta en cada una de las siguientes expresiones.

a) $10 + 3(y - 8) = 31$ y=15	b) $34 - 2(a - 1) = 18$ a=9
c) $7(b + 3) - 5 = 51$ b=5	d) $22 + \frac{p + 8}{3} = 28$ p=10
e) $\frac{q - 3}{4} + 13 = 16$ q=15	

5. Escribe cómo le explicarías en forma clara a un compañero el método para resolver ecuaciones como las que acabas de resolver.
Explicando que tenia que buscar un numero para sustituir la variable por el número y probar

6. Repartir L300 entre tres amigos de modo que cada uno reciba 5 lempiras más que el anterior.
al primero le damos 95 Lps. al segundo 100 Lps. y al tercero 105 Lps.

Se puede inferir que los alumnos utilizaron tanteo para resolver las ecuaciones lineales en una variable. Se utilizó el valor numérico para comprobar si el valor encontrado es la solución de la ecuación. Para determinar los valores solución los estudiantes utilizaron calculadora, también se utilizó en la comprobación de las soluciones. En esta lección el estudiante utilizó la variable como una incógnita.

Además, el estudiante utilizó el cambio de marco de una situación problemática relacionada con la vida cotidiana, a situaciones numéricas y algebraicas para concluir con relaciones numéricas. Lo más importante es que ellos se ven involucrados en la construcción o descubrimiento de los conocimientos y pasan de ser entes receptores a realizadores de actividades de aprendizajes.

4.2 Análisis cuantitativo de los resultados

Se utilizó la prueba *z* con un nivel de significancia de 0.05 en la comparación entre los puntajes obtenidos en las prepruebas para los grupos correlacionados, la comparación entre los resultados de las dos pospruebas y para analizar por separado el puntaje-ganancia de cada grupo.

La prueba z, es una prueba estadística para evaluar si dos grupos difieren entre sí de manera significativa respecto a sus medias, y se utiliza en la prueba de hipótesis que plantea la diferencia entre dos grupos. La hipótesis de investigación propone que los grupos difieren significativamente entre sí y la hipótesis nula propone que los grupos no difieren significativamente.

El valor *z* se obtiene en muestras grandes, mediante la fórmula: $z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$, donde $\overline{X}_1$ es la media de un grupo, $\overline{X}_2$ es la media del otro grupo, σ_1^2 es la desviación estándar del primer grupo al cuadrado, n_1 es el tamaño del primer grupo, σ_2^2 es la desviación del segundo grupo al cuadrado, n_2 es el tamaño del segundo grupo y d_0 la diferencia de las medias poblacionales (Walpole,1999, p.313).

La prueba *z* se basa en una distribución muestral o poblacional de diferencia de medias conocida como la distribución normal (Webster, 2000, p.246).

Tomando como referencia la hipótesis de investigación se obtuvieron los siguientes resultados:

4.1.1 En la comparación de los resultados de las prepruebas se utiliza la prueba z para verificar si existen diferencias significativas entre los grupos.

Grupo experimental	Grupo control
$\overline{x}_1 = 12.79$	$\overline{x}_2 = 20.37$
$\sigma_1 = 7.09$	$\sigma_2 = 7.5$
$n_1 = 41$	$n_2 = 44$

Puede observarse el valor promedio del rendimiento del grupo experimental es de 12.79 y la media del grupo control es 20.37. Evidentemente existe una diferencia entre ambos promedios. Lo que se quiere saber es si la diferencia de los promedios entre los grupos es significativa o si esta ocurre por la mera casualidad. Para tal efecto se formula una hipótesis nula que plantea: *No existe diferencia significativa entre los conocimientos previos sobre álgebra elemental, entre el grupo control y el experimental*.

Se procede a calcular el error estándar de la diferencia entre dos medias, lo cual también se denomina como margen de error de la prueba z.

$$S_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{7.09^2}{41} + \frac{7.50^2}{44}} =$$

$$= \sqrt{1.2205 + 1.2784}$$

$$= \sqrt{2.50446} = 1.58254$$

El estadístico para la prueba *z* es: $z = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)}{s_{\overline{x}_1-\overline{x}_2}} = \frac{(12.7 - 20.37) - 0}{1.584296} = -4.7897$

Si $\alpha = 0.05$ el valor crítico de z es ± 1.96 y la regla de decisión es: "aceptar la hipótesis nula si *z* está entre ± 1.96. Debido que $z = -4.7897$ la hipótesis nula se rechaza. Por lo que se asume que existe diferencia en cuanto a los conocimientos previos que cada grupo posee sobre álgebra elemental. Esta diferencia se debe a que el grupo control tenía conocimientos previos sobre términos semejantes, había iniciado a estudiar la introducción al álgebra, realizando operaciones aritméticas con

literales. Las medias aritméticas presentaron una diferencia de 7.8 puntos y ambas están en un rendimiento escaso según la escala para medir el rendimiento académico (UMCE, 2003, p.21)

4.1.2 Para evaluar los resultados de las postpruebas, se utiliza la prueba *z* para verificar si existen diferencias significativas entre el dominio de los conceptos algebraicos al final del experimento. En la comparación del aprovechamiento durante la intervención se establece como hipótesis :

Hipótesis nula ($H_{0)}$: No existe una diferencia significativa entre el rendimiento académico sobre álgebra elemental, entre el grupo control y el grupo experimental.

Hipótesis alternativa ($H_{1)}$: Existe una diferencia significativa entre el rendimiento académico sobre álgebra elemental, entre el grupo control y el grupo experimental.

Grupo experimental	Grupo control
$\overline{x_1} = 24.00$	$\overline{x}_2 = 17.98$
$\sigma_1 = 14.06$	$\sigma_2 = 10.06$
$n_1 = 41$	$n_2 = 42$

Se puede observar que las medias no representan una diferencia. Para confirmar si existe diferencia significativa se realiza la prueba z.

El margen de error de la prueba *z* es:

$$S_{\overline{X}1-\overline{X}2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{14.06^2}{41} + \frac{10.06^2}{42}} = \sqrt{4.82155 + 2.4096} = 2.68908$$

El estadístico para la prueba z es: $z = \dfrac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s_{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}} = \dfrac{(24 - 17.98)}{2.68908} = 2.23$

La regla de decisión es: “rechazar la hipótesis nula si *z* está entre ± 1.96. Debido que $z = 2.23$ la hipótesis nula se rechaza. Por lo que se asume que existe diferencia con un error del 5%, en cuanto a los conocimientos adquiridos al final del experimento por cada grupo. Las medias obtenidas en el rendimiento académico final, en ambos grupos están en un rendimiento escaso según la escala para medir el rendimiento académico (UMCE, 2003, p.21), con una diferencia de seis puntos.

4.1.3 Para analizar el puntaje-ganancia en el grupo experimental se utilizó la prueba de observaciones pareadas. La estadística de prueba calculada está dada por:

$$t = \frac{\overline{d} - d_0}{s_d / \sqrt{n}},$$

Donde $\overline{d}$ es la media de las diferencias en las observaciones pareadas y s_d es el error estándar de dichas diferencias. Las regiones críticas se construyen con el uso de la distribución t con n-1 grados de libertad (Walpole,1999, p.316). Estableciendo como hipótesis:

Hipótesis nula (H_0): No existe diferencia entre el rendimiento inicial y el rendimiento final de los alumnos que participaron en la enseñanza del álgebra basada en el cambio de cuadros.

Hipótesis alternativa (H_1): Existe diferencia entre el rendimiento inicial y el rendimiento final de los alumnos que participaron en la enseñanza del álgebra basada en el cambio de cuadros.

Para la realización de la prueba se procede a determinar el error estándar de la distribución muestral de las diferencias pareadas:

$$\overline{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{-470}{41} = -11.46$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - n\overline{d}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{12780.27 - 41(-11.46)^2}{41-1}} = \sqrt{\frac{7395.67}{40}} = \sqrt{184.89} = 13.597$$

Para saber si el valor t es significativo, se aplica la fórmula:

$$t = \frac{\overline{d} - d_0}{s_d / \sqrt{n}} = \frac{-11.46}{13.597 / \sqrt{41}} = -\frac{-11.46}{2.123} = -5.398$$

Dado $t_{0.05,40} = \pm 2.021$ la regla de decisión es: “No rechazar si t está entre ± 2.021, de lo contrario rechazar la hipótesis, que no hay cambios en el rendimiento académico de los alumnos que participaron en el experimento”

El valor calculado de t es -5.398, entonces, la conclusión es que se rechaza la hipótesis de que las medias no tienen diferencia. Por lo que se asume que existe diferencia en cuanto a los conocimientos adquiridos en el grupo experimental. El

grupo experimental presentó un crecimiento en el rendimiento académico desde un promedio de 12.79 a 24.00.

4.1.4 Para analizar el puntaje-ganancia en el grupo control también se utilizó la prueba t con datos pareados, estableciendo como hipótesis:

H_1= Existe diferencia significativa entre el rendimiento inicial y el rendimiento final de los alumnos que no participaron en la enseñanza del álgebra basada en el cambio de cuadros o marcos.

Para la realización de la prueba se procede a determinar el error estándar de la distribución muestral de las diferencias pareadas:

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{56}{37} = 1.51$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - n\bar{d}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{5800 - 37(1.51)^2}{37-1}} = \sqrt{\frac{5715.64}{36}} = \sqrt{158.77} = 12.60$$

Para saber si el valor t es significativo, se aplica la fórmula:

$$t = \frac{\bar{d} - d_0}{s_d / \sqrt{n}} = \frac{1.51 - 0}{12.60 / \sqrt{36}} = \frac{1.51}{2.1} = 0.719$$

Dado $t_{0.05,36} = \pm 2.028$ la regla de decisión es: “No rechazar si t está entre ± 2.021, de lo contrario rechazar la hipótesis, que no hay cambios en el rendimiento académico de los alumnos que no participaron en el experimento”

Debido que $t = 0.719$, la hipótesis de que las medias no tienen diferencia es aceptada. Por lo que se asume que no existe diferencia en cuanto a los conocimientos adquiridos en el grupo control.

Por lo tanto, según las diferencia entre las medias de los rendimientos académicos entre el grupo experimental y el grupo control como el análisis del puntaje-ganancia en cada grupo, con un 95% de confianza se puede afirmar que existe efecto de la aplicación de la metodología de enseñanza del álgebra elemental basada en el cambio de cuadros o marcos, en el aprendizaje del álgebra expresado en el rendimiento académico. La hipótesis de investigación es aceptada, los alumnos que participaron en el experimento presentaron mejor rendimiento que el grupo control.

Observaciones finales:

En resumen puede decirse que el uso de las actividades de manipulación y conversión entre diferentes tipos de representación o marcos ha sido apoyo para el entendimiento de los conceptos básicos del álgebra elemental. Vale la pena mencionar que las guías de trabajo para reportar cálculos, reflexiones, conclusiones, justificaciones han servido de guía para el desarrollo de las habilidades en los estudiantes en el inicio del manejo de las nociones de los conceptos algebraicos elementales.

El profesor es un elemento fundamental para sugerir algunas acciones a los estudiantes, pero el trabajo en grupo generó confianza en las propias habilidades que poseen los estudiantes, el trabajo de los alumnos más aventajados motivó a iniciar al resto de estudiantes al trabajo en clase.

Las actividades con el uso del modelo del cambio de cuadros o marcos tienen que ser preparadas minuciosamente para lograr que los estudiantes descubran relaciones, patrones y otro tipo de relaciones importantes en el estudio inicial de los conceptos algebraicos.

El uso de las nociones de los conceptos algebraicos se manifestó más en el transcurso de la investigación, observable en las guías de trabajo de los estudiantes que en la prueba final. Se puede considerar que es factible la aplicación del modelo de enseñanza del álgebra mediante el cambio de cuadros o marcos, aunque con muchas dificultades por la concepción que el alumno tiene del proceso de aprendizaje en el aula, al considerarse un receptor de conocimientos.

CAPITULO 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

- Los resultados de las pruebas aplicadas al grupo experimental muestran, un crecimiento significativo en los niveles de comprensión de conceptos y procedimientos algebraicos, en relación a los conocimientos previos al estudio de los conceptos básicos del álgebra.

- Los resultados obtenidos en las pruebas de evaluación por los estudiantes del grupo control, evidencian que no existe diferencia significativa entre el rendimiento académico inicial y el rendimiento final de los alumnos que no participaron en el experimento.

- La tecnología didáctica de cambio de cuadros o marcos favorece la comprensión de la noción del concepto de variable, lo cual se evidencia en el mayor rendimiento académico alcanzado por el grupo experimental en relación al rendimiento alcanzado por el grupo de control.

- Los resultados obtenidos en las hojas de trabajo muestran que los estudiantes identifican la literal como incógnita, numero general y relación funcional. Sin embargo, puede evidenciarse que ellos en su mayoría utilizan la forma retórica para representar la variable y sólo unos pocos son capaces de utilizar la forma simbólica para realizar dichas representaciones.

- En términos generales puede decirse que los estudiantes han desarrollado ciertas habilidades para realizar procesos de conversión con expresiones algebraicas, tales como reducción de términos semejantes, multiplicación de expresiones, factorización y resolución de ecuaciones lineales en una variable

- En los procesos operacionales del álgebra elemental, generalmente se presentaron errores de origen aritmético, específicamente relacionado con la aplicación de leyes de los signos

tanto en la multiplicación como en la adición. Estos errores de origen aritmético se presentan en menor grado cuando se utiliza como apoyo el cuadro geométrico.

- De los resultados obtenidos en las hojas de trabajo se deduce que los estudiantes no logran operar las expresiones algebraicas en su forma estructural de manera inmediata, es decir, no operan la variable como un objeto matemático sino que recurren a reducir la expresión a un resultado numérico, tal como lo afirma (Kieran, 1995, p.2) para quien la transición desde una concepción de "proceso" hacia una concepción de "objeto" no se logra ni rápidamente ni sin esfuerzo.

- En cuanto al desempeño en el aula, al inicio del experimento la mayoría de los alumnos, presentaron dificultad para afrontar el trabajo individual y para comunicarse matemáticamente en forma oral y escrita. Sin embargo a medida que participaron en el experimento los estudiantes más avanzados incentivaron a desarrollaron algunas habilidades en torno a la resolución de problemas: plantear posibles soluciones, verificación de resultados, representaciones graficas de la situación problema, explicación de procesos y resultados.

RECOMENDACIONES

1) Continuar aplicando el modelo de enseñanza del álgebra elemental basada en el cambio de cuadros o marcos, con el grupo experimental para fortalecer el desarrollo de las habilidades iniciadas.

2) Extender el modelo de enseñanza del álgebra elemental basada en el cambio de cuadros o marcos a otras secciones del segundo curso de ciclo común del INTAE.

3) Revisar los programas de matemática del INTAE, a fin de organizar los contenidos en base al Diseño del Currículo Nacional Básico (DCNB) y a conceptos nodulares

fundamentales que permitan la aplicación del modelo de enseñanza basada en el cambio de cuadros o marcos.

4) Que los profesores de matemáticas participen en experiencias de este tipo, para que puedan asimilar el espíritu del modelo e iniciar una contextualización del mismo en sus aulas de clase, mejorando y compartiendo situaciones didácticas para mejorar la enseñanza de la matemática.

5) Estructurar las guías de trabajo de tal manera que contenga mayor cantidad de ejercicios que las utilizadas en el experimento, para afianzar la asimilación de los conocimientos adquiridos.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA CITADA

Aguayo, L. (2003). Investigaciones sobre el nivel medio superior. En López, A. (Ed.). (2003). *Saberes científicos, humanísticos y tecnológicos: procesos de enseñanza y aprendizaje. La investigación educativa en México 1992-2002.* (pp. 221-274). Consejo Mexicano de Investigación Educativa. México DF.

Alvarado, M. M. & Suazo, A. M. (2001). *Aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas en octavo grado del CIIE-UPNFM.* (Informe de Investigación).

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez, (Ed.). (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp. 33-55). Iberoamericana, México.

Ayala, M. (2004). Tipos de razonamiento y su aplicación estratégica en el aula. Editorial Trillas, Primera reimpresión (mayo 2004), México D.F.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas. En M. C. Villalba . (Ed.). (2004). *Compilación lecturas básicas, curso: Paradigmas en matemática educativ*a. (pp. 85-141). División de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemática, maestría en Matemática Educativa. Universidad de Sonora. (Segundo semestre 2004). Recuperado el 8 de enero de 2006, de http://fractus.mat.uson.mx/clases/articulos/compilacion04.doc

Brousseau, G. (1987). *¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas?.* IREM, Université de Bordeaux, Francia. Versión Castellana de Luis Puig. Recuperado el 7 de Agosto de 2006, de http:www.uv.mx/facmate/archivos/Maestría/Artículos. Pdf./Brousseau, G.pdf.

Cantoral, R. & otros (2000).*Desarrollo del pensamiento matemático*. ITSM, Universidad Virtual 2000, Trillas, México. (Primera reimpresión, mayo 2003)

Chavarría, R. (2005). Álgebra y pensamiento algebraico: un binomio conceptual *presente* en el currículo matemático actual. *En Memorias de la XV semana regional de investigación y docencia en matemáticas.(pp. 107-111).* Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora. Marzo de 2005. Recuperado el 6 de Diciembre de 2006 de:http://www.mat.uson.mx/Semana/MemoriasXV.pdf.

Chevallard Y. (1999). *El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 19, nº 2, pp. 221-266, 1.999. Recuperado 31 de octubre de 2006 en http://www.inrp.fr/recontres/seminaires/2004/sem-didac/yves-chevallard-1.pdf

Cole, M.(1990). Desarrollo cognitivo y educación formal: comprobaciones a partir de la investigación transcultural. En *Vygotsky y la educación: connotaciones y aplicaciones de la psicología sociohistórica en la educación. (pp. 109-134)* / compilado por Luis C. Moll. 4ª. ed. 2ª reimp. Buenos Aires.

Díaz Barriga, F. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo, una interpretación constructivista.* Segunda ed. McGraw-Will/Interamericana Editores, México, D. F.

Díaz, H. A. (2004). *Bases teóricas y empíricas para una propuesta de ingeniería didáctica basada en el modelo de cambio de cuadros o marcos*. Tesis de Maestría. Universidad Pedagógica Nacional "Francisco Morazán". San Pedro Sula Honduras.

Dorsch, F. (1981). *Diccionario de psicología.* Cuarta ed. Editorial Herder, Barcelona.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez. (Ed). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp.61-96). Iberoamericana, México.

Feldman, R. (2002). *Psicología con aplicaciones en países de habla hispana*, 4ª ed. Editorial Mc Graw Hill Interamericana editores. México D.F.

Gascón, J., Bosch, M. & Bolea, P. (2001a). *¿Cómo se construyen los problemas en didáctica de las matemáticas?, Parte (I): El álgebra escolar en el programa cognitivo.* Universidad Autónoma de Barcelona. (Aceptado para su publicación en Educación Matemática).

Gleserfeld, E. (1987). *El aprendizaje como una actividad constructiva*. Recuperado el 16 de Diciembre de 2006 de http://fractus.uson.mx/Papers/vonGlasersfeld/Rep1.pdf. , http://www.google.com/search?q=cache:qCwTjq8lhI4J:fractus.uson.mx/Papers/vonGlasersfeld

Godino, J. C. (1991). Contenidos teóricos y metodológicos para la formación de investigadores en didáctica de la matemática. En Godino, J. (2003). *Investigaciones sobre Fundamentos Teóricos y metodológicos de la Educación Matemática. (pp. 8-58).* Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. Recuperado en octubre de 2006 en http://www.ugr.es/local/jgodino/

Godino, J. (1991). Hacia una teoría de la didáctica de la matemática. En Rodríguez, A. (1999). *Área de conocimiento didáctica de la matemática*. (pp. 105-148). Editorial Síntesis, Vellehermoso Madrid. También, recuperado el 24 de enero de 2003, de http://www.urg.es/~jgodino/Teoría_Metodos/haciateo.htm.

Godino, J.(1995). Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. .En M. C. Villalba. (Ed.). (2004) *Compilación lecturas básicas, curso: Paradigmas en matemática educativa*. (pp. 142-148) División de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemática, maestría en Matemática Educativa. Universidad de Sonora. (Segundo semestre 2004). Recuperado el 8 de enero de 2006, de http://fractus.mat.uson.mx/clases/articulos/compilacion04.doc. Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación Matemática". Recuperable en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/

Gómez, B. (1999). *Las matemáticas y el proceso educativo*. En Gutiérrez, A. (1999). *Área de conocimiento. Didáctica de la matemática*. Editorial Síntesis, Madrid.

Gómez, G. (2006). *El uso de la Computadora en la Manipulación y Conversión de los Registros de Representación para el estudio de la función lineal*. Tesis de Maestría. Universidad Pedagógica Nacional “Francisco Morazán”. Tegucigalpa.

Guzmán, M. (1993). Enseñanza de la matemática. En Asenjo, J. & Macías, O. (Ed.). (1993). *Enseñanza de las ciencias y la matemática, tendencias e innovaciones.* Organización de Estados Iberoamericanos, para la Educación, la Ciencia y la Cultura Biblioteca Virtual. Recuperado el 17 de diciembre de 2005, de http://www.oei.org.co/oeivirt/ciencias.pdf

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2003). *Metodología de la investigación*. Editorial Mc Graw Hill. (3era Ed.). México.

Hernández, R., Martínez, B. & Guillén, R. (1997). "*Estudio comparativo de los conocimientos sobre Aritmética y Geometría de los estudiantes de último año de las escuelas normales y alumnos de sexto grado de las escuelas primarias del sistema educativo nacional*", Revista Paradigma, Nº 7, año 6, Dirección de Investigación UPNFM, 1997.

Kieran, C. (1994). *The Learning and Teaching of School Algebra* (traducción de Mesa, Vilma Maria. 1995). "Una empresa docente". Recuperado el 6 de Diciembre 2005, de http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/traducciones/Kieran(92>/Kieran(92)-1.html

Moll, L. (1990).Introducción. En *Vygotsky y la educación: connotaciones y aplicaciones de la psicología sociohistórica en la educación. (pp. 13-42).* Aique Grupo Editor S. A. / compilado por Luis C. Moll. 4ª. ed. 2ª reimp. Buenos Aires.

Moreira, M. A. (2002). *La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área.* Publicado en Investigaciones en Enseñanza de las Ciencias, 7(1), 2002. Recuperado el 13 de diciembre, de http://www.if.ufrgs.br./ienci. (Traducción de Isabel Iglesias)

Peltier, M. (1993). Una visión general de la didáctica de las matemáticas en Francia. Grupo editorial Iberoamérica, Revista Educación Matemática, Vol. 5 No 2. (pp, a al 10). *En Didactica de las matemáticas*. (6/10). Tec de Monterrey, Universidad Virtual.

PREAL (2005). *Informe de progreso educativo Honduras 2005.* (Abril 2002). Recuperado el 13 de diciembre de 2005, en: http://www.preal.org/documentos/honduras%202005%20%final0n%2010-6-05.pdf

Resnick, L & Klopfer L. (1989). Hacia un currículum para desarrollar el pensamiento: una visión general. En Resnick, L & Klopfer L. (1989). *Currículo y cognición*, (*pp. 15-42).* Aique Grupo Editorial. Argentina.. (Traducción: Miguel Wald).

Robinet, J. (1984). Ingeniería didáctica (del nivel elemental al superior). En *didáctica de las matemáticas.* Tecnológico de Monterrey, Universidad Virtual. (Lecturas de curso MEE, Agosto – Diciembre de 2000). (9/10)

Santos T., L. M (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* Segunda ed. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

SEH. (2003).*Currículo nacional básico***.** Secretaría de Educación, Subsecretaría Técnico Pedagógica, Dirección General de Currículo. Tegucigalpa, M. D. C. (Marzo de 2003)

Steel, D. F. (2004). *A schematic–theoretic view of problem solving and development of algebraic thinking.* Educational Studies in Mathematics, Springer Netherlands, Volume 57, Number 1 / July, 2004 (pp. 65-90), Tuesday, December 07, 2004.

Tudge, J. (1990). Vygotsky, la zona de desarrollo próximo y la colaboración entre pares: connotaciones para la práctica del aula. En *Vygotsky y la educación: connotaciones y aplicaciones de la psicología sociohistórica en la educación. (pp. 187-208).* Aique Grupo Editor S. A. / compilado por Luis C. Moll. 4ª. ed. 2ª reimp. Buenos Aires.

UMCE (2003). *Informe de Rendimiento Académico 2002, tercero y sexto grado*. UMCE. Unidad Externa de medición de la calidad de la Educación. Tegucigalpa, M.D.C., Abril de 2003.

UNESCO (2001). *Primer estudio, internacional comparativo sobre lenguaje, matemática y factores asociados, para alumnos del tercer y cuarto grado de educación básica*. (Agosto 2001). Recuperado el 13 de diciembre de 2005, de http://www.unesco.cl/medios/biblioteca/documentos/informe_laboratorio_tecnico.pdf

Ursini, S. & otros (2005). Enseñanza del álgebra elemental, una propuesta alternativa. Primera ed. , Editorial Trillas. México D.F.

Vergnaud, G (1990), La teoría de los campos conceptuales. En *Didáctica de las matemáticas*. (7/10). Lecturas del Curso MEE, Agosto- Diciembre de 2000. TEC DE MONTERREY, Universidad Virtual

Webster, A. (2003). *Estadística aplicada a los negocios y la economía*. Tercera ed. McGraw-Hill Interamericana, S. A. Santa Fe de Bogotá.

Woolfolk, A. (1999). *Psicología educativa*, Séptima ed. PRENTICE HALL, México.

Walpole, R. (1999). Probabilidad y estadística para ingenieros, 6ª ed. PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, S.A. México

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

Angel, Allen R., (1997), *Álgebra intermedia.* Prentice-hall Hispanoamericana, S. A. México D. F. Segunda edición en español.

Álvarez Á., Ángel, (1996), Actividades matemáticas con materiales didácticos. *En* Centro de Publicaciones del MEC y Narcea, S. A. de Ediciones, Ciudad universitaria, Madrid. Primera edición.

Brousseau, G. (2001). Marcos, juegos de marcos y teorías de situaciones. En IREM, (Ed.). *Actas de la jornada en homenaje a Régine Douady,* cambio de marco. Organizado por el equipo DIDIREM. Universidad de París, 24 de junio de 2001.

Cedillo Á. Tenoch, & Cruz O., Valentin (2006), *Jornadas de capacitación de formadores de docentes de educación secundaria; cuaderno de capacitación, enseñanza de las matemáticas.* Segunda edición 2006. Instituto Latinoamericano de la comunicación educativa. México.

Centro Comenius, *Aprender matemática resolviendo problemas.* Consultado en http://www.comenius.usach.cl/webmat2/programa/frame_programa.htm. Recuperado el 3 abril de 2006. USACH, Universidad de Santiago de Chile.

DCNB, *Diseño curricular nacional para la educación básica.* Versión preliminar. Secretaría de Educación, Secretaría Técnico Pedagógica. Dirección General de Currículo. República de Honduras. Julio de 2006. Graficentro Editores.

Guzmán, M. & Rico, L. (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria.* Editorial Síntesis. Vallehermoso, Madrid.

Hernández, R. (2003). *Estudio sobre la educación para la población rural en Honduras*. Recuperado el 26 de diciembre 2005, de: http://www.unesco.cl/medios/biblioteca/documentos/estudio_educacion_poblacion_rural_honduras.pdf?menu=/esp/ept/docdig/

Kaplan, R., Yacamoto, T. & Ginsburg, H. (s. f.). La enseñanza de conceptos matemáticos. En Resnick, L. & Klopfer, L. (1989). *Currículo y cognición*. (pp. 105-139). Argentina. Aique. (Traducción: Miguel Wald).

Lukas, J. & Santiago K (2004), *Evaluación educativa*, Alianza Editorial, Madrid

Marbella, Elvira. (2002) Didáctica integrativa y el proceso de aprendizaje. México: Trillas

Mayer, Richard E. (2002). *Psicología de la educación: El aprendizaje en las áreas de conocimiento.* Pearson Educación, Madrid.

Palacio, J. (2003). *Colección de problemas matemáticos para la vida.* Ciudad de la Habana, Cuba. Editorial Pueblo y Educación.

Polya, G. (1965), *Cómo plantear y resolver problemas*, vigésimo sexta ed. Editorial Trillas. México. (reimpresión Junio 2002) .

PREAL (2002). *Informe de progreso educativo Honduras.* (Abril 2002). Recuperado el 13 de diciembre de 2005, de http://www.preal.org/docs-resumen/RCHonduras.pdf.

Resnick, L & Ford, W. (1998). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia, Ciudad Universitaria Madrid y Ediciones Paidós Ibérica, S. A.

Rico R., Luis & Fortuny, José M. (Eds.) (1993), *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Grupo Azarquiel. Editorial Síntesis, S. A. Vallehermoso, Madrid.

Santos T., L. M (1996). *Perspectivas en educación matemática*. Segunda ed. Grupo Editorial Iberoamérica. México D.F.

Schoenfeld, A. (s. f.). La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas. En Resnick, L. & Klopfer, L. (1989). *Currículo y cognición*. (pp. 141 -170). Argentina. Aique. (Traducción: Miguel Wald).

Swokowski, E. & Jeffery A. Cole. (2002). *Algebra y trigonometría con geometría analítica.* International Thomson Editores, S. A. 10ª edición. México.

Vergnaud, G. (2003). *El niño, las matemáticas y la realidad, problemas de la enseñanza de la matemática en la escuela primaria*, Editorial Trillas, México.