Universidad Pedagógica Nacional
Francisco Morazán

Vice-rectoría de Investigación y Postgrados
Dirección de Postgrado

Maestría en Matemática Educativa

TESIS DE MAESTRÍA

Desarrollando el Pensamiento Algebraico en alumnos de octavo grado del CIIE a través de la resolución de problemas

Tesista:

Manuel Antonio Cardona Márquez

Director de Tesis:

Ms.C. María Magdalena Alvarado Soriano

Tegucigalpa M.D.C. Junio de 2007

Desarrollando el Pensamiento Algebraico en alumnos de octavo grado del CIIE a través de la resolución de problemas

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán
Vice-rectoría de Investigación y Postgrados

Dirección de Postgrado

Desarrollando el Pensamiento Algebraico en alumnos de octavo grado del CIIE a través de la resolución de problemas

Tesis
Para obtener el título de:

Master en Matemática Educativa

Presentada por:
Manuel Antonio Cardona Márquez

Asesor de Tesis:
Ms.C. María Magdalena Alvarado Soriano

Tegucigalpa M.D.C. Junio de 2007

Rector

M.Sc Lea Azucena Cruz Cruz

Vice Rectora Académica

M.Sc. Iris Erazo

Vice Rector de Investigación y Postgrados

DRA. GLORIA LARA PINTO

Vice Rector Administrativo

M.Sc. David Orlando Marín

Secretario General

MSc. OSCAR MUNGUIA

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO I
DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....Pág. 1

CAPÍTULO II
MARCO TEÓRICO..... Pág. 7

CAPÍTULO III
METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.....Pág. 27

CAPÍTULO IV
PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.....Pág. 36

CAPÍTULO V
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....Pág. 95

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....Pág. 97

ANEXOS

INTRODUCCIÓN

Los profesores de matemáticas del tercer nivel de la educación básica hemos sido testigos del intenso rechazo que muchos alumnos manifiestan hacia el álgebra. ¿Se ha preguntado el por qué de ese rechazo? Habría que determinar cuál es la percepción que se tiene sobre qué es el álgebra escolar, qué objetivos persigue y cómo lograrlos. En los diferentes programas de matemáticas vigentes en nuestro país, tanto en sus objetivos como en las sugerencias metodológicas, se refleja una concepción del álgebra escolar que puede incidir en la percepción que un docente tenga sobre los puntos anteriores. Dicha percepción puede estar en total contradicción con las diferentes posturas que han tomado las comunidades de investigadores en educación matemática durante los últimos años.

Actualmente se debe distinguir entre dos tipos de álgebra: el álgebra escolar y el álgebra superior. Palarea (1998) expresa que las experiencias que se desarrollen en el álgebra escolar pueden y deben servir en el álgebra superior, aunque nunca desarrollarse. ¿Qué tipo de álgebra se está enseñando en nuestros centros de secundaria?, ¿será que no es la adecuada? Resulta, entonces, interesante conocer si los maestros conocen la existencia de esa "otra álgebra" y cómo debe de ser abordada.

Bednarz y Guzmán (2000) hablan de un proceso de transición de la aritmética al álgebra a través de un proceso de ajustes importantes a una parte considerable de los conocimientos previamente desarrollados. De igual manera el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000) en su propuesta que concierne al álgebra para 6º - 8º grados, pone de manifiesto una álgebra encaminada más al desarrollo de habilidades mentales que al dominio exclusivo de técnicas adecuadas para la simplificación de expresiones algebraicas y para la resolución de ecuaciones.

En la afirmación de Palarea (Ídem) "*Muchos estudiantes no están dispuestos en el mismo sentido que el profesorado, que se muestra siempre ansioso de pasar al tema siguiente e introduce ideas algebraicas demasiado pronto y demasiado de prisa*" se identifican algunos elementos que pueden ser causa del rechazo entes mencionado: Posiblemente lo que se les

pide a los alumnos que realicen en las clases de álgebra no tiene un significado real subyacente o no están preparados para hacerlo.

Los estudios aquí citados conciben el acercamiento al álgebra como un modo de pensar, por lo que puede considerarse para todos los niños y en todas las edades. El álgebra sirve como método de aprehender y explicar interrelaciones, permite llegar a lo general por la vía de lo particular y descubrir los modelos que se presentan en lo cotidiano. En estos mismos estudios se postula que los alumnos deben aprender el álgebra como un conjunto de competencias incluyendo la representación de las relaciones cuantitativas, como un estilo del pensamiento matemático.

En este contexto referencial, se determinó focalizar este estudio en ***El Desarrollo de Habilidades de Pensamiento Algebraico*** como un acercamiento a la "otra álgebra", al álgebra escolar o, llámese también, proceso de transición de la aritmética al álgebra. Para lograr dicho desarrollo se planteó la hipótesis que la estrategia de resolución de problemas es el medio ideal para tal fin. Razones sobran para plantear una conjetura de tal magnitud, mismas que son expuestas con precisión y fundamento en toda esta obra.

Esta obra está estructurada en cinco capítulos que, resumidamente, tratan de lo siguiente:

Capítulo I: Aquí se expone la contextualización del problema con sus respectivos propósitos y objetivos, se justifica el estudio, así como también se presenta un amplio panorama de investigaciones previas que se consideran como antecedentes.

En el capítulo II se presenta los fundamentos teóricos que guiaron el presente estudio, considerando elementos históricos del álgebra, algunas consideraciones sobre el álgebra escolar, la fundamentación general de la estrategia de resolución de problemas, elementos de la psicología evolutiva relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del álgebra.

El capítulo III contiene una descripción detallada de la metodología que se utilizó en el estudio: el tipo de investigación, los participantes en el estudio, los instrumentos utilizados en el proceso de recolección y análisis de los datos y, la forma en que fueron aplicados.

Capítulo IV: Aquí se realiza un análisis cualitativo de la información obtenida en las dos etapas que conforman el estudio. Se trata de analizar, en este capítulo, el comportamiento y las respuestas de los alumnos a la luz del marco teórico y de puntualizar algunos avances o cambios en las estructuras mentales de los estudiantes.

En el capítulo V se presentan las conclusiones a las que se llegó con los resultados del estudio. También se presentan algunas recomendaciones dirigidas al centro donde se desarrolló el estudio, a los profesores de matemáticas en general y a los interesados en aplicar la propuesta en particular.

Finalmente, se presenta las referencias bibliográficas y los anexos conformados por la prueba diagnóstica, las guías de trabajo o instrumentos de recolección de datos y los protocolos, producto del desempeño de los diferentes equipos de trabajo.

CAPÍTULO I: DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Contextualización del Problema

En la jornada vespertina del Centro de Investigación e Innovación Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (CIIE-UPNFM), desde el año 2003 se imparte el bachillerato en ciencias con orientación en educación; en esta carrera han ingresado estudiantes de diversos sectores y comunidades, tanto a nivel departamental como nacional. Todos estos estudiantes han recibido en su educación media básica las nociones elementales del álgebra tal y como lo estipulan los diferentes programas de matemáticas ya sean de institutos públicos o privados. Con el nuevo Currículo Nacional Básico el estudio del álgebra se inicia en el séptimo grado con el tema de ecuaciones lineales, en octavo grado se desarrolla todo lo relacionado con polinomios y en el noveno grado estudian diferentes tipos de ecuaciones. Cuando estos alumnos llegan al primer curso de bachillerato presentan ciertas habilidades para operar con las letras y resolver ecuaciones, más, al trabajar en la resolución de problemas auxiliándose del álgebra, se ha evidenciado que se les dificulta esta actividad, y son muy pocos los estudiantes que logran tener éxito ante una situación problemática.

Aún, cuando se le dedica un tiempo especial a la actividad de resolver problemas a través del álgebra se ha detectado que la situación no mejora significativamente; continúa siendo una minoría de estudiantes que tienen éxito en este tipo de actividades. Siempre recurren a la aritmética para resolver los problemas, y fracasan; al sugerirles que usen ecuaciones, las dificultades se presentan cuando tratan de realizar la representación algebraica del problema. Todo parece indicar que el pensamiento algebraico no está presente en los estudiantes y que estos no tienen más herramientas que las aritméticas para enfrentar los problemas.

Son muchas las interrogantes que surgen alrededor de esta situación: ¿Qué significados tienen los alumnos de la variable?, ¿qué conceptos tienen del álgebra?; ¿han desarrollado los estudiantes las habilidades de pensamiento algebraico necesarias para iniciar sus cursos de bachillerato?, ¿ha propiciado el docente el desarrollo del pensamiento algebraico?, ¿qué tipo de dificultades presentan los estudiantes al aprender el álgebra?, ¿qué contenidos previos al álgebra hay que desarrollar en el aula de clases?, ¿qué tipo de actividades propician el

desarrollo de habilidades de pensamiento algebraico en los estudiantes?, ¿en qué momento se deben de desarrollar este tipo de actividades?

Una prueba diagnóstica aplicada en el primer curso de bachillerato con orientación en educación reveló que estos alumnos, pese a que habían egresado del tercer ciclo de educación básica, no lograron desarrollar las habilidades de pensamiento algebraico necesarias para continuar con el estudio de esta área de las matemáticas.

Antecedentes

El estudio del álgebra, en cualquier rincón del mundo, ha constituido un gran obstáculo para los estudiantes. Son muchos los investigadores de distintos países que reportan las dificultades específicas al aprender álgebra. En el año 2000 Bednarz y Guzmán presentaron un estudio exploratorio realizado con 47 alumnos mexicanos y 28 canadienses; este estudio perseguía describir cómo abordan los estudiantes de séptimo grado la resolución de problemas antes de ser introducidos al álgebra. Al analizar los resultados concluyen que la mayoría de los alumnos percibieron la estructura del problema en un contexto aritmético; algunos alumnos transformaron la estructura del problema pero no dominaron el encadenamiento de las relaciones; es más, en los problemas de mayor nivel de complejidad se presentaron bastantes ensayos numéricos; se evidenció, también, que en este tipo de problemas los alumnos no consideraron todas las relaciones presentes.

En 1996, Ursini, en sus investigaciones relacionadas con la transición de la aritmética al álgebra concluye que las dificultades para lograr un manejo aceptable de la variable tiene a menudo su origen en el carácter multifacético de este concepto, y que las dificultades que los estudiantes tienen en lograr un manejo aceptable del concepto de variable puede ser la causa de su bajo rendimiento en el álgebra y en otras ramas de las matemáticas escolares.

En 1997 Boulton - Lewis, Cooper y otros, presentaron en el Congreso (PME 21), un estudio donde discuten la transición del Aritmética al Álgebra desde una perspectiva cognitiva, la investigación se ha dirigido específicamente hacia las dificultades y los obstáculos para desarrollar conceptos algebraicos; estos conceptos han sido descritos como lagunas

cognitivas. Creen que la laguna cognitiva se ubica entre el conocimiento requerido para resolver ecuaciones aritméticas por inversión y el conocimiento requerido para resolver ecuaciones algebraicas al operar sobre o con la incógnita. Ellos sugirieron que se necesita entre la Aritmética y el Álgebra un nivel operacional de "conocimiento pre- algebraico".

El estudio de María Mercedes Palarea (1998), con una duración de ocho años, es el que está directamente relacionado con la presente investigación; dicho estudio lleva por título *"La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años*". En la primera etapa se analizan las habilidades de carácter operacional y conceptual que manifiestan los alumnos al trabajar el lenguaje algebraico así como las dificultades y obstáculos que se les presentan. Se concluye que la presencia de diferentes sistemas de representación contextualiza mejor el aprendizaje del lenguaje algebraico. Los datos obtenidos en los diferentes instrumentos confirmaron la hipótesis que un acercamiento semiótico al lenguaje algebraico que integre los contextos numérico y geométrico, en un marco del álgebra como lenguaje, donde las fuentes de significado y los sistemas de representación juegan un papel determinante, constituye el enfoque didáctico más coherente. En la tercera y última etapa del estudio se presenta una propuesta curricular, previamente validada, con actividades selectas para lograr la adquisición del lenguaje algebraico en los estudiantes.

Se menciona, finalmente, el estudio realizado por Alfinio Flores en la universidad del estado de Arizona que lleva por tema *Representaciones geométricas en la transición del aritmética al álgebra*; el cual describe la importancia de visualizar representaciones geométricas de algunas relaciones numéricas como una forma de ayudar a los estudiantes a realizar la transición del aritmética al álgebra y a desarrollar el pensamiento algebraico.

Justificación:

Entender el álgebra es y ha sido uno de los objetivos centrales de los diferentes programas de matemáticas que han estado vigentes en los diversos centros de enseñaza pre universitaria de nuestro país y del resto de los países de América. Estos programas han pretendido que el

estudiante se apropie de las herramientas del álgebra para que pueda aplicarlas en la resolución de problemas de la misma matemática, de otras disciplinas y de la vida cotidiana. Al respecto, el NCTM (2000) establece que la resolución de problemas debe constituir una parte integral de todo el aprendizaje de las matemáticas y por eso no debería ser una parte aislada del programa de esta disciplina.

Al analizar el Currículo Nacional Básico (CNB) se encuentra, en el tercer ciclo, unidades de álgebra referidas a ecuaciones en las que la metodología propuesta hace especial hincapié en la estrategia de la resolución de problemas. El mismo CNB en la descripción del currículo de matemáticas para el tercer ciclo (Pág. 10) define a la matemática como una disciplina que sistematiza la capacidad intuitiva del ser humano de poder encontrar las ideas necesarias para resolver problemas. Propone como eje transversal de esta disciplina la Identidad, Participación Democrática y Trabajo, y éstos a su vez se desarrollarán integralmente en cada uno de los bloques de contenido a través de la resolución de problemas (Pág. 14).

Para poder cumplir con las exigencias del currículo actual se requiere de docentes capaces de propiciar en el alumno el estudio de la realidad desde un punto de vista algebraico o capacitarlo para interpretar una expresión algebraica desde un punto de vista real y no hacer tanto énfasis en el aprendizaje de métodos algorítmicos. En los países orientales donde la resolución de problemas es la actividad fundamental para la enseñanza–aprendizaje de la matemática se observa un compromiso serio de los docentes. En Japón, según Fujii (1989), los profesores no se conforman con que sus alumnos obtengan una proporción bastante alta de respuestas correctas en las pruebas IEA y PISA. Ellos sospechan que el grado de comprensión de los alumnos es limitado

Los profesores de matemáticas han transmitido a los alumnos una idea incompleta de lo que es el álgebra como la manipulación de símbolos con actividades de simplificación de expresiones algebraicas o de resolución de ecuaciones o inecuaciones. Claro está que estas actividades son fundamentales y constituyen las raíces históricas del álgebra, pero el álgebra es más que manipular símbolos. Al respecto el NCTM (2000) afirma que

> Los estudiantes necesitan comprender (del álgebra) sus conceptos, las estructuras y principios que rigen la manipulación de símbolos y cómo pueden usarse estos para registrar ideas y ampliar su comprensión de las situaciones (Pág. 39)

Al expresar relaciones usando el lenguaje matemático se está iniciando al estudiante en la modelación matemática. Y que mejor manera para desarrollar estas habilidades sino a través de la resolución de problemas que ponen a prueba la curiosidad del alumno y que lo induce a poner en juego sus capacidades inventivas. Experiencias de este tipo, a una edad conveniente, afirma Polya (Pág. 5) pueden determinar una afición para el trabajo intelectual e imprimirle una huella imperecedera en la mente y en el carácter.

Con base en lo expuesto anteriormente, se determinó que es de vital importancia realizar una investigación orientada a explorar el desarrollo de habilidades de pensamiento algebraico en los alumnos del tercer ciclo de educación básica a través de la resolución de problemas.

Propósito

Esta investigación tiene como objetivo fundamental explorar las habilidades de pensamiento algebraico que desarrollan los alumnos de octavo grado de educación básica del CIIE a través de la resolución de problemas. Además pretende dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Qué habilidades de pensamiento algebraico desarrollan los alumnos a través de la resolución de problemas?

- ¿Cómo usar la resolución de problemas para desarrollar habilidades de pensamiento algebraico?

Objetivos Específicos

- Explorar cómo puede ser usada la resolución de problemas para desarrollar habilidades de pensamiento algebraico en estudiantes de octavo grado del CIIE.

- Estructurar experiencias de aprendizaje que estimulen el desarrollo del pensamiento algebraico.

- Identificar habilidades de pensamiento algebraico que los estudiantes de octavo grado del CIIE logran desarrollar mediante la resolución de problemas.

Una vez exploradas las habilidades de pensamiento algebraico que logran desarrollar los estudiantes, se estará en condiciones de sugerir propuestas metodológicas para lograr la transición de la aritmética al álgebra a través de la resolución de problemas y de dar algunos lineamientos para la selección y/o elaboración de los problemas que se deben presentar en el aula.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

Algo de Historia:

La historia del álgebra comenzó en el antiguo Egipto y Babilonia, donde fueron capaces de resolver ecuaciones lineales ($ax = b$) y cuadráticas ($ax^2 + bx = c$), así como ecuaciones indeterminadas como $x^2 + y^2 = z^2$, con varias incógnitas. Los antiguos babilonios resolvían cualquier ecuación cuadrática empleando esencialmente los mismos métodos que hoy se enseñan.

Según Jean Lauand, fueron los árabes quienes le dieron a la nueva ciencia de plantear y resolver ecuaciones un nombre: *aljabr.* Muhammmad ibn Musa al — Khwarizmi, un miembro del *Bayal al—Hikma* fue el autor de varios tratados sobre astronomía y matemáticas, entre ellos uno de los primeros tratados islámicos acerca del álgebra. Fue gracias a la traducción al latín de su libro acerca del sistema de numeración hindú, *Algorithmi de numero indorum,* que Europa Occidental conoció ese novedoso sistema de numeración. Su obra más importante, sin embargo, fue su tratado de álgebra quc, con el título *Ílisab al—/abra wal— muqabala (La ciencia de la reducción y confrontación)* probablemente significaba la ciencia de las ecuaciones.

Para Socas, et. al (1996) El uso de las letras como variables procede de la geometría griega; por proceder de la geometría griega no pretendía resolver ecuaciones algebraicas, sino, satisfacer condiciones geométricas, y además la solución griega se aplica a líneas y áreas únicamente, no a cualquier cantidad numérica. En la edad media “la cosa” llega a ser el nombre de la incógnita; desarrollándose un simbolismo único para las potencias de la incógnita. El paso decisivo hacia una notación algebraica más útil fue dado por Viète (sobre 1600) quien también indicó por letras las magnitudes indeterminadas y las variables en expresiones algebraicas. Esta notación es el comienzo del desarrollo de un lenguaje algebraico propio.

El cálculo algebraico nace como generalización del modelo numérico. El álgebra comienza en realidad, cuando los matemáticos empiezan a interesarse por las “operaciones” que se pueden

hacer con cualquier número. Todo cálculo algebraico se construye a partir de las cinco propiedades características del sistema numérico: la conmutativa y asociativa de la suma y el producto, y la distributiva del producto respecto de la suma. En símbolos:

$$a+b=b+a$$
$$(a+b)+c=a+(b+c)$$
$$a\cdot b=b\cdot a$$
$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$
$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

En la segunda mitad del siglo XIX, el álgebra presentó un notable impulso sobre las teorías de: ecuaciones algebraicas, grupos, determinantes y matrices. Todo esto favoreció al nacimiento del álgebra abstracta contemporánea, llamada algunas veces álgebra moderna. En este momento los objetos utilizados pueden ser matrices, vectores, tensores, etc. George Peacock (1791 – 1858) introdujo el principio de permanencia el que afirma que todas las reglas anteriores que se verifican en los naturales, siguen verificándose para todos los demás números u objetos representados por letras. Parece obvio que los problemas propios de la aritmética se trasladen al álgebra, y que al ser una generalización de aquélla, le surjan problemas inherentes.

El Álgebra Escolar

Según Palarea (1998), el Álgebra como materia escolar se introduce a finales del siglo XIX en los niveles de secundaria en los países europeos y americanos. Los contenidos y su secuencia han permanecido casi inalterables hasta la fecha. Muchos cursos de Álgebra en diferentes países inician con términos literales y su relación con referencias numéricas dentro del contexto, primero de expresiones algebraicas, y, más tarde, de ecuaciones. Después de un período breve donde se realizan sustituciones numéricas en expresiones y ecuaciones, se trabaja la simplificación de expresiones y la resolución de ecuaciones por métodos formales. De esta manera, la manipulación y factorización de polinomios y expresiones racionales, se convierten en actividades regulares.

Eventualmente algunos programas incluyen funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas; y sus representaciones algebraica, tabular y gráfica. Se intercalan problemas verbales, que pretenden ser aplicaciones en el "mundo real" de las técnicas algebraicas recién aprendidas. Estos contenidos son los que comúnmente aparecen en todos los libros de texto de Álgebra elemental (Kieran, 1992). La caracterización del Álgebra como una parte del pensamiento matemático ha permanecido casi invariable hasta nuestros días.

Los conocimientos que un alumno de Secundaria debe tener de Álgebra se pueden catalogar en tres grandes apartados:

1. Convertir situaciones de la realidad en expresiones algebraicas.
2. Dar a una expresión algebraica un posible significado en la realidad.
3. Pasar de una expresión algebraica a otra.

Tradicionalmente se ha puesto el énfasis en el tercer apartado. Esencialmente, se han propuesto tareas relativas a realizar operaciones con expresiones algebraicas y su simplificación. En la actualidad, sin embargo, se pretende dar mayor importancia a los dos primeros aspectos en esta etapa de aprendizaje de los alumnos (de secundaria), y de aquí la importancia del trabajo con problemas. Pero el profesor no puede limitarse a plantear unos cuantos problemas al final de una unidad didáctica de ecuaciones lineales o cuadráticas después de haber dedicado la mayor parte del tiempo al aprendizaje de las distintas técnicas y algoritmos de resolución.

El Álgebra y la Resolución de Problemas

Uno de los grandes objetivos pretendidos por la enseñanza de las matemáticas es la resolución de problemas. Al respecto Resnick y Ford (1990) afirman *"si se entienden las matemáticas como forma de pensar y de razonar, la consecuencia es que se concibe la resolución y el descubrimiento de los problemas no sólo como medio de enseñar los conceptos matemáticos, sino, como objetivo fundamental de la enseñanza de las matemáticas"*. Aquí se presenta a la resolución de problemas no como una actividad última de una unidad didáctica, sino, como

una destreza que se debe desarrollar en todo proceso de enseñanza aprendizaje. El NCTM (2000) propone los mismos elementos sobre la resolución de problemas:

> La resolución de problemas constituye una parte integral de todo el aprendizaje de las matemáticas y por eso no debería ser una parte aislada del programa de esta disciplina. Resolver problemas no es sólo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también una de las principales maneras de hacerlo. (Pág. 55)

En ambas opiniones quedan claros las dos grandes concepciones que actualmente se le está dando a la resolución de problemas, a saber: como un objetivo de la enseñanza de las matemáticas y como una estrategia didáctica.

Concebir a la resolución de problemas como una finalidad de la enseñanza de las matemáticas tiene sus fundamentos en la naturaleza propia de esta ciencia, pues es sabido que todo conocimiento matemático responde a una necesidad en algún momento determinado de la historia; ya sea para resolver algún problema relacionado con la guerra, con el avance tecnológico, con la medicina, o con la misma matemática.

La resolución de problemas como estrategia didáctica fue propuesta por Polya a mediados del siglo pasado y es en los últimos treinta años que se le ha dado mayor importancia; pero, reconocer que el resolver problemas es una actividad esencial en el desarrollo y aprendizaje de las matemáticas implica la necesidad de discutir las ideas principales alrededor de esta actividad. ¿Qué es un problema?, ¿Qué es la resolución de problemas?, ¿Qué significa el aprender matemáticas? y ¿Cuáles son las bases que sustentan la propuesta del aprendizaje de las matemáticas con énfasis en la resolución de problemas?

En los diferentes programas preuniversitarios de matemáticas que han estado vigentes en Honduras, como lo fueron los Rendimientos Básicos y hoy el Currículo Nacional Básico, se encuentran unidades de álgebra en las que el dominio de esta área se manifiesta con la resolución de problemas de la vida cotidiana. Es fundamental, por tanto, propiciar en el

alumno el estudio de la realidad desde un punto de vista algebraico o capacitarlo para interpretar una expresión algebraica desde un punto de vista real y no hacer tanto hincapié en el aprendizaje de simples métodos algorítmicos.

La dificultad de definir el término *problema*, afirma Santos (1997), está ligada con la relatividad del esfuerzo de un individuo cuando éste intenta resolver una situación. Esto significa que una situación puede ser considerada como problema por unos alumnos y para otros no lo será. Shoenfeld (1985) utiliza el término problema en sentido más amplio "*Es una tarea difícil para el individuo que está tratando de hacerla*" (citada por Santos, Pág. 27). En esta perspectiva la resolución de problemas define lo que significa aprender matemáticas; Según el National Research Council de Canadá, explica Santos (Ídem), los estudiantes aprenden matemáticas solo cuando construyen activamente sus conceptos ellos mismos.

Polya afirma que hay que diferenciar entre problemas rutinarios y no rutinarios, al respecto define "*En general se considera dentro de la categoría de problemas rutinarios a todo problema que se puede resolver ya sea sustituyendo simplemente nuevos datos en lugar de los de un problema ya resuelto, ya sea siguiendo paso a paso sin ninguna originalidad, la traza de algún problema viejo*" (Pág. 163) Con la definición anterior queda implícito que según Polya los problemas no rutinarios son los que caen fuera de esta categoría, Son éstos problemas los que consideran Santos y Shoenfeld en sus definiciones. Es imperdonable que un maestro proponga a sus alumnos problemas exclusivamente de tipo rutinarios, más lamentablemente son los que frecuentemente los profesores de matemáticas presentan en el aula.

Resolver un problema según Resnick y Ford (Ídem) significa involucrase en un proyecto de búsqueda de soluciones, cuando se desconoce el camino que llevará a ellas; un problema propiamente dicho exige una búsqueda de soluciones posibles porque no existe una solución obvia. Esto implica que se debe de aplicar alguna estrategia para determinar la meta del problema, la información de que se dispone y; cuál es la información que falta y que permitiría, o bien que se aplicase una estrategia de resolución conocida, o bien, que se invente una nueva solución.

Según Polya al resolver un problema se deben seguir 4 grandes etapas: Comprender el problema, Concebir un plan, Ejecución del plan y Visión retrospectiva. En cada una de las etapas el maestro desempeña un papel fundamental, el de supervisor y guía en el alcance de cada una de ellas. En la comprensión del problema se debe comprender la parte verbal del problema, se debe releer e identificar las incógnitas y los datos. Si hay alguna figura relacionada con el problema se debe dibujar y destacar en ella la incógnita y los datos. De la comprensión del problema a la concepción de un plan el camino puede ser largo y tortuoso; lo mejor que puede hacer el maestro por su alumno es conducirlo a esa idea brillante sin imponérsele. Las buenas ideas se basan en la experiencia pasada y en los cocimientos adquiridos previamente. Si el alumno ha concebido realmente un plan, el maestro puede disfrutar un momento de una paz relativa; si él mismo ha trabajado en el plan, aunque un tanto ayudado, y si ha concebido la idea final con satisfacción, entonces no la perderá tan fácilmente. Finalmente, una vez que han obtenido la solución y han expuesto claramente su razonamiento se debe reconsiderar la solución, reexaminar el resultado y el camino que los condujo a ella, esto podría consolidar sus conocimientos y desarrollar aptitudes para resolver problemas.

Se sugiere que el maestro dirija cada etapa formulando preguntas claves que indirectamente mencionen las operaciones intelectuales útiles para la resolución del problema en cuestión. Algunas interrogantes sugeridas por Polya, y que se deben formular en todo proceso de resolución de problemas son las siguientes: *¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente, insuficiente o contradictoria para determinar la incógnita? ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿Puede resolver una parte del problema o considerando sólo una parte de la condición? ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Puede ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo? ¿Pude verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento? ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? (Pág. 19)*

En este enfoque es necesario subrayar que una de las tareas más importante del maestro es ayudar a sus alumnos; tarea nada fácil, requiere tiempo, práctica, dedicación y buenos

principios. El maestro tiene que equilibrarse para no ayudar tanto que parezca imposición y no deje pensar al alumno, ni tan poco que parezca acomodo y no lo saque de un camino sin salida productiva. Debe sugerir lo necesario como para que el alumno realice una parte razonable del trabajo.

En la resolución de problemas con las herramientas del álgebra intervienen al menos dos conceptos básicos: La noción de variable y el concepto del signo igual. Muchos investigadores son los que han trabajado con temas relacionados con el álgebra. Por ejemplo Collis (1975), citado por Fujii; sugiere que la noción de variable es una idea muy abstracta y que se construye pensando. Dichos trabajos concluyen que los estudiantes de la escuela media están adquiriendo una noción incompleta de lo que es una cantidad variable, aunque esto no significa que no sea accesible para jóvenes de corta edad. El NCTM cita a Shoenfeld y Arcavi (1988) quienes afirman "*la comprensión del concepto de variable debería ir más allá de reconocer que las letras pueden usarse para representar números desconocidos en las ecuaciones*" (Pág. 229)

Las dificultades para lograr un manejo aceptable de la variable tienen a menudo su origen en el carácter multifacético de este concepto. Ursini (1996) identifica tres usos distintos de la variable: como número general, en relación funcional y como incógnita específica; aunque en los niveles elementales, lo típico es considerar que una variable es el símbolo indicativo de un número determinado. Esta es la primera concepción de variable que se debe trabajar en el aula. El estudio de la noción de variable y sus distintas interpretaciones es la puerta de acceso a una comprensión de los diferentes mundos del álgebra, a saber: el mundo de las experiencias abiertas, el de las identidades, el de las relaciones funcionales y el de las ecuaciones.

Socas, et. al (Ídem) citan las seis categorías diferentes en que según Küchemann se pueden usar e interpretar las letras: letras evaluadas, en problemas como " Si a + 8 = 12, ¿cuál es el valor de a" o en "¿cuál es el valor de 5·a + 3, cuando a = 2?"; letras ignoradas, en " Si a + b = 43 entonces a + b + 2 = "; letras como objetos, al simplificar expresiones algebraicas; letras como incógnitas específicas, al añadir 7 a 3n; letras generalizando números, en problemas como "Para qué valores de x en {0, 1, 2, ..., 9} se verifica 3x + 1 < 19?" y letras como

variables, cuando son consideradas como una representación de un conjunto de valores no especificados, y se observa una relación sistemática entre dos conjuntos de valores. Agrega Küchemann que este concepto es difícil de encontrar con toda exactitud debido a que la mayoría de los reactivos que pueden dar idea de variable, a menudo son resueltos en un nivel de interpretación más bajo. En el estudio de las ecuaciones, las letras son consideradas como incógnitas (equivalente a constantes) específicas a determinar, en este contexto la variable ha de ser calculada. Otra concepción que se puede tener del álgebra es la del "estudio de relaciones entre cantidades"; en este sentido se considera a la variable en el sentido completo de variabilidad. (Pág. 28)

Por ejemplo, la situación: "Los lápices azules cuestan 10 lempiras cada uno y los negros 12 cada uno; Se compran algunos lápices azules y negros y en total se gasta 180 lempiras" se puede representar con la expresión $10b + 12r = 180$ donde b es la cantidad de lápices azules y r la de lápices negros. Aquí las letras pueden considerarse como incógnitas específicas al observar que la expresión es una afirmación verdadera para un particular par de números como (6, 10). Análogamente las letras pueden considerarse como generalización de números: $10b + 12r = 180$ puede ser satisfecha por un conjunto finito de pares de números. Esta interpretación contiene la idea de que los valores de b y r pueden cambiar pero no refleja la verdadera idea de cambio, para ello es necesario comparar los valores de unos con otros mediante alguna vía (mediante una tabla, por ejemplo). (Ídem)

El segundo concepto fundamental en la solución de problemas a través del álgebra lo constituye el del signo igual cuyo significado, afirma Fujji (2005), no es un conocimiento intuitivo para los alumnos ni es adquirido directamente mediante la explicación de la persona que ejerce la autoridad en el aula. La noción de igualdad debería también desarrollarse a lo largo del currículo. Los niños perciben generalmente el signo igual desde un punto de vista operativo, es decir como una señal para "hacer algo" Palarea (1998). Por ejemplo en la expresión "4 + 2 = 6", el lado izquierdo de la igualdad es el problema y el derecho la respuesta; deberían llegar a verlo como un símbolo de equidad y de equilibrio.

En el ámbito de los números el signo igual se utiliza, generalmente, para indicar el resultado de una operación. Este sentido de la igualdad aritmética se conserva en álgebra cuando se trabaja con tautologías algebraicas pero no en expresiones como en las ecuaciones por ejemplo, que no son universalmente ciertas, pues el signo igual en ecuaciones no conecta expresiones equivalentes. Es por eso que según Collis (1975) citado por Fujii, el signo igual en álgebra tiene al menos, dos sentidos:

- Como acción de transformación de expresiones que siguen siendo equivalentes, por ejemplo, $2(a + b + c) = 2a + 2b + 2c$ y
- Para relacionar los dos miembros de una ecuación. En este caso las afirmaciones no son universalmente verdaderas ya que están condicionadas a ciertos valores que las hacen verdaderas.

Palarea (Ídem) explica que en secundaria los alumnos son incapaces de aceptar la falta de clausura en las expresiones tanto aritméticas como algebraicas; a manera de ilustración, si ven la expresión "5 + 7" automáticamente realizan la operación y piensan en el resultado "12". (Pág. 263)

Las dificultades presentes en el aprendizaje del álgebra y que fueron descritas anteriormente, se pueden abordar en el aula de clases con la estrategia de la Resolución de Problemas pues, el NCTM propone que la resolución de problemas en los grados 6º - 8º de la educación básica debería promover el aprendizaje matemático. Añade que los alumnos pueden aprender conceptos matemáticos y profundizar en la comprensión de los mismos trabajando en problemas cuidadosamente seleccionados.

Con respecto a la resolución de problemas Santos (1997) destaca un punto de vista dinámico de las matemáticas; este dinamismo se resume en los siguientes apartados;

- El aprendizaje de las matemáticas se debe desarrollar bajo un ambiente que tienda hacia:

  - La aceptación de un salón de clases como una comunidad matemática.
  - El uso de la lógica y la evidencia matemática como un medio de verificación, contrapuesto a ver el maestro como una solo autoridad para dar respuestas correctas.

- El desarrollo del razonamiento matemático; es decir, no ubicar a las matemáticas como un conjunto de fórmulas o reglas a memorizar.
- La resolución de problemas y no solamente dar énfasis a la actividad de encontrar respuestas mecánicamente.
- La conexión y aplicación de las matemáticas; es decir, no concebirlas como un cuerpo aislado de conceptos y procedimientos.

- El aprendizaje de la matemática en la resolución de problemas pretende como objetivos que los estudiantes lleguen a:
  1. Entender los propósitos y el uso del conocimiento que están aprendiendo.
  2. Aprender activamente utilizando un conocimiento y no pasivamente solo recibiéndolo.
  3. Aprender las diferentes condiciones bajo las cuales sus conocimientos pueden ser aplicados.
  4. Aprender cuando utilizar cierta estrategia y cuando no utilizarla.
  5. Aprender en contextos múltiples. Esto induce una abstracción de los conocimientos ligada a sus usos, ayuda a que los estudiantes enfoquen su atención a la estructura profunda de la situación o problema.

- Cuando los estudiantes encuentran un ambiente en el salón de clases que les permita pensar y razonar acerca de las matemáticas y comunicar sus resultados a otros con base en argumentos, afirma Santos, se enfrentan a la necesidad de organizar y presentar sus ideas en forma convincente. Los estudiantes aprenden matemáticas solo cuando ellos mismos construyen sus propias ideas matemáticas. Cuando el aprendizaje es visto como una construcción y reorganización de conocimientos, entonces el maestro puede identificar las diferentes formas en que cada estudiante aprende.

- Las matemáticas no son solamente actividades que el estudiante aprende dentro del salón de clases; los cursos de matemáticas deben convertirse en comunidades donde la gente toma acuerdos, se comporta de cierta forma y donde exista un gran diálogo para construir

argumentos que sustenten alguna idea o que planteen contraejemplos para refutar algún resultado.

- La discusión por parte de los estudiantes es fundamental para motivar su participación en el desarrollo de las ideas matemáticas. Se han identificado ciertas actividades instruccionales que han mostrado ser importantes en la implantación de las ideas asociadas a la resolución de problemas. Cada una contribuye a que el estudiante desarrolle una disposición matemática. Entre estas actividades se destacan:

  1. **Discusión en grupos pequeños**. Una variante instruccional que resulta muy efectiva en la resolución de problemas es que los estudiantes trabajen en grupos pequeños durante la clase. En esta actividad, es común que los estudiantes logren construir o desarrollar por si mismos las matemáticas necesarias para trabajar los problemas particulares. El papel del maestro durante esta actividad es observar el trabajo de sus alumnos, ofrecer alguna ayuda cuando se necesite, y presentar algunas preguntas que favorezcan la articulación de las ideas.

  2. **Presentaciones individuales** por parte de los estudiantes. En esta actividad los estudiantes presentan sus ideas a todo el grupo. Un aspecto importante de esta actividad es que persigue que el alumno aprenda a comunicar sus ideas y desarrollarlas alrededor de un argumento.

El Álgebra y las Teorías del Aprendizaje

A través de la historia han surgido diferentes ideas a cerca de cómo aprende la gente, como el conexionismo de Thorndike, el condicionamiento clásico de Pavlov, el condicionamiento operante, el constructivismo, la sicología genética, y la zona de desarrollo próximo, entre otras. Estas teorías se pueden agrupar en dos grandes categorías: las teorías conductistas y las teorías cognitivas. Dependiendo en qué tipo de teorías se fundamente una propuesta curricular, así va a variar las concepciones que se tengan de cada uno de los componentes involucrados en el proceso educativo, estos son: el alumno, el maestro y la materia a enseñar. De igual manera en matemáticas, la forma en que se enseñe el álgebra y el papel que se le dé la

resolución de problemas dentro del proceso educativo va a estar en función de la concepción que se tenga de cómo aprende la gente.

Una de las formas posibles de definir las matemáticas, según Resnick y Ford (1990) es como un conjunto de reglas y procedimientos para realizar cálculos. Esta es una definición que domina casi toda la enseñanza matemática del sistema educativo actual. Se espera que los niños sean capaces de realizar cálculos cada vez más complejos y que los realicen en forma rápida y exacta. También se pretende que puedan aplicar esta destreza de cálculo en la resolución de problemas, pero en esto se tiene menos éxito.

Los libros clásicos de álgebra (Baldor, 2003; Swokowski, 1988; David Gustafson, 1988) definen al álgebra como la rama de la matemática que estudia la cantidad considerada del modo más general posible, representada mediante letras. La resolución de problemas a través del álgebra está presente en los textos citados anteriormente al finalizar cada bloque de contenido y una vez que se han alcanzado las competencias algorítmicas necesarias. Está actividad es vista como tal, es decir, como una actividad más que se realiza en el aula y preferiblemente que sea desarrollada por el alumno según su capacidad. Previamente el maestro puede resolver algunos a manera de ejemplo.

En el párrafo anterior se ven inmersas las corrientes conductistas. El enfoque conductista dominante durante el siglo XX, según Alonso (2005), postulaba un análisis asociacionista de la conducta, negando o minimizando el valor funcional de los procesos mentales. Su influencia fue tal, que muchos psicólogos creen ver en el conductismo un auténtico paradigma caracterizado por una matriz disciplinar dominante durante un periodo de ciencia normal.

Según Resnick y Ford (Ídem), alrededor de 1960 sobreviene la crisis del conductismo, en la que se cuestionan sus presupuestos fundamentales, en particular: la insuficiencia del asociacionismo, la interpretación inadecuada del evolucionismo y la crisis de la noción de ciencia asumida por los conductistas que se apoyaba en el positivismo lógico. Los sicólogos experimentales comenzaron a ampliar su campo de estudio para incluir en él mismo las conductas no observables, como el razonamiento, el pensamiento y la resolución de

problemas, y así nació un nuevo campo de la sicología experimental: la sicología cognitiva. En este nuevo paradigma empiezan a utilizarse conceptos mentalistas como imagen mental, planes y estrategias. Después de la segunda guerra mundial, Bruner y otros sicólogos protagonizaron un resurgimiento del interés por los procesos cognitivos humanos los que Bruner (1956) describe como "*los medios por lo que los organismos consiguen, retienen, y transforman la información*" (Pág. 138).

Bajo este nuevo paradigma se puede definir qué es el álgebra y cuál debe ser el papel de la resolución de problemas en el aula de clases. Según el NCTM (Ídem) los alumnos de los niveles medios deberían aprender el álgebra como un conjunto de conceptos y habilidades referentes a la presentación de relaciones cuantitativas y como una forma de pensamiento matemático para formalizar patrones, funciones y generalizaciones. La enseñanza del álgebra se presenta como uno de los objetivos centrales de la educación matemática desde el nivel prebásico.

El estudio de métodos generales para resolver ecuaciones es sólo una raíz histórica del álgebra; el álgebra tiene que ver también con las estructuras abstractas y con el uso de principios referentes a éstas en la resolución de problemas expresados con símbolos y está íntimamente ligada a la geometría y al análisis de datos. En esta perspectiva el álgebra es mucho más que manipular símbolos, los alumnos necesitan comprender sus conceptos, las estructuras y principios que rigen la manipulación de los símbolos y cómo se pueden usar éstos para registrar ideas y ampliar su comprensión de las situaciones. El pensamiento algebraico necesariamente involucra a los estudiantes en la construcción de modelos matemáticos y el camino de la generalización. De ahí que se afirma que un alumno está pensando algebraicamente cuando es capaz de modelar situaciones cuantificables o generalizar propiedades o relaciones en ciertas estructuras matemáticas.

En resumen, según el NCTM la educación matemática en los niveles medios debe desarrollar las siguientes habilidades de pensamiento algebraico:

- ♦ Reconocer y describir patrones numéricos.

♦ Generalizar un patrón numérico.

♦ Construir sucesiones de números a partir de una regla dada

♦ Expresar relaciones numéricas usando el lenguaje algebraico

♦ Explicar en lenguaje natural el significado de algunas fórmulas geométricas.

♦ Traducir expresiones verbales al lenguaje algebraico.

♦ Manejar técnicas adecuadas para operar con las variables.

♦ Plantear y resolver problemas a través del álgebra e interpretar las soluciones.

La Psicología Evolutiva y la Enseñanza y Aprendizaje del Álgebra

La psicología evolutiva se centra en el desarrollo o evolución de los niños, enfatizando los aspectos relacionados con el aprendizaje y los procesos de cognición. La personalidad más importante de esta corriente es Jean Piaget quien señala que el proceso de desarrollo de la inteligencia se desarrolla en cada niño a través de determinados estadios que son parte de un proceso continuo, en el cual una característica del pensamiento infantil se cambia gradualmente en un tiempo determinado y se integra en formas mejores de pensamiento.

Piaget distingue tres estadios de desarrollo cognitivo cualitativamente diferentes entre si, Woolfolk (1999): el estadio sensoriomotor (0 – 2 años), el estadio de operaciones concretas (2 – 11 ó 12 años) y el estadio de las operaciones formales.

Con respecto al estadio de *operaciones formales*, se establece que inicia alrededor de los 11 ó 12 años y alcanza su pleno desarrollo tres años más tarde. Es el período del pensamiento lógico ilimitado el que se caracteriza por:

- La habilidad para pensar más allá de la referencia a experiencias concretas.
- Capacidad de usar a nivel lógico, enunciados verbales y proposiciones en vez de objetos concretos únicamente.
- Habilidad para pensar teóricamente sobre las consecuencias de los cambios de objetos y sucesos.
- Habilidad para razonar acerca de las combinaciones de las variables en un problema.
- Capacidad para comprender reglas generales de ejemplos particulares.
- Capacidad de deducir conclusiones particulares de proposiciones generales.

El orden por el que pasan los niños las etapas del desarrollo no cambia, es decir, deben pasar por las operaciones concretas para llegar al estadio de las operaciones formales; pero la rapidez con que pasan los niños por estos estadios cambia de persona en persona.

Bajo la caracterización de los estadios del desarrollo del niño queda explícita la edad ideal para iniciar la transición de la aritmética al álgebra en la escuela. En los tres grados del tercer nivel de la educación básica, los maestros deben realizar actividades encaminadas a desarrollar el pensamiento lógico formal en los estudiantes de manera gradual y que los capacite para comprender las estructuras del álgebra formal tanto en el nivel preuniversitario como en el universitario propiamente dicho. Al momento de preparar las clases se debe considerar que en esta teoría de los estadios, el razonamiento operativo formal no siempre funciona con toda su capacidad, y en determinadas circunstancias baja a un nivel inferior de pensamiento. Adultos y adolescentes, a menudo, regresan al pensamiento de operaciones concretas y aún al pensamiento preoperacional cuando se les expone a nuevas áreas de aprendizaje, beneficiándose con experiencias concretas en estas áreas antes de avanzar a niveles abstractos de pensamiento.

Se sabe que para muchos alumnos, explica Palarea (Ídem), el álgebra resulta difícil e incluso irrelevante y algunos llegan a experimentar un rechazo tan intenso que impregna el conjunto de su actitud hacia las matemáticas. Para estos alumnos, lo que se les pide hacer en álgebra no tiene un significado real subyacente. Muchos estudiantes no están dispuestos en el mismo sentido que el profesorado, que se muestra siempre ansioso de pasar al tema siguiente e introduce ideas algebraicas demasiado pronto y demasiado de prisa. La explicación piagetiana de este fenómeno correspondería con el razonamiento; según el cual, el desarrollo, a partir del pensamiento operacional concreto para pasar al pensamiento operacional formal, no está lo suficientemente avanzado en el momento en que se desea progresar para llegar a las siguientes ideas algebraicas. En términos de la teoría piagetiana, sólo en la etapa de las operaciones formales se puede esperar que vaya desapareciendo la dependencia de los referentes concretos.

Frecuentemente se necesita funcionar en un nivel más concreto, y a menudo es útil una introducción de distintos sistemas de representación. Sin embargo, el acercamiento al "álgebra" se puede considerar para todos los niños y en todas las edades en cuanto es un modo de pensar, sirve como método de aprehender y de explicar interrelaciones, permite una manera de llegar a la generalidad por la vía de lo particular y descubrir los "modelos" que se presentan en lo cotidiano. Por eso, los alumnos deben aprender el álgebra como un conjunto de competencias incluyendo la representación de las relaciones cuantitativas, como un estilo del pensamiento matemático, el pensamiento algebraico, que "*da cuerpo a la construcción y a la representación del modelo de regularidad, permite razonar, proyectar y conjeturar*" (Chambers, 1994, citado por Palarea (Pág. 6)

El Procesamiento de la Información

Según Piaget, en su teoría de la construcción del conocimiento, las personas nacen con la tendencia a organizar sus procesos de pensamiento en estructuras sicológicas o sistemas para comprender y relacionarse con el mundo. Las estructuras simples se combinan y coordinan continuamente para perfeccionarse y con ello ser más eficaces. Piaget denominó a estas estructuras, esquemas; y en su teoría son los bloques básicos de construcción del pensamiento, sistemas organizados de acciones o pensamientos que permiten hacer representaciones mentales.

WoolfolK (1999) expone que la acomodación es un proceso que ocurre cuando una persona debe cambiar los esquemas que posee para responder a una nueva situación. *"Sino es posible ajustar los datos a ninguno de los esquemas entonces hay que establecer estructuras más apropiadas"* (Pág. 21) Para adaptarse a ambientes de complejidad creciente, la gente utiliza esquemas que posee, siempre que funcionen (asimilación) y modifica y aumenta sus esquemas cuando requiere de algo nuevo (acomodación). *"Hay otras ocasiones en que no se emplean asimilación ni acomodación. La gente puede ignorar algo si lo encuentra demasiado extraño"* (Pág. 29)

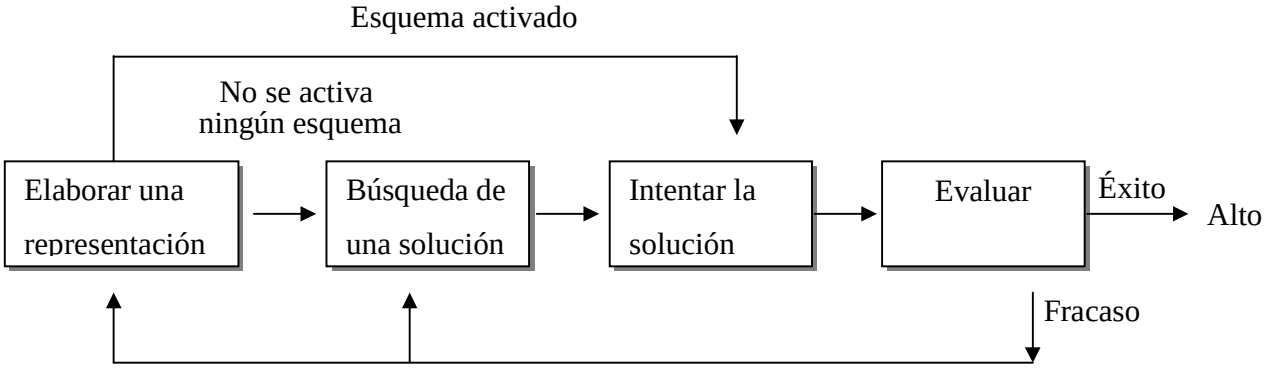
Continúa WoolfolK (Pág. 29) explicando que los cambios en el pensamiento tienen lugar mediante el proceso de equilibrio, la búsqueda de un balance. Hay equilibrio si al aplicar un esquema en particular a un conocimiento o una situación el esquema funciona; pero si el

esquema no produce un resultado satisfactorio entonces hay un desequilibrio y produce incomodidad, esta incomodidad motiva a buscar una solución mediante la asimilación y la acomodación, con lo que el pensamiento cambia y avanza. Para equilibrar los esquemas de comprensión del mundo y los datos que éste proporciona, se asimila continuamente la información mediante los esquemas y se acomoda el pensamiento siempre que los intentos de asimilación produzcan un desequilibrio.

Bajo esta teoría WoolfolK, citando a Grick (1986), presenta el siguiente esquema relacionado con el proceso de la resolución de problemas y el conflicto cognitivo:

Diagrama del proceso de la resolución de problemas

Hay dos rutas de resolución. En la primera, se activa el esquema correcto y la solución es evidente. Pero sino se cuenta con un esquema, la búsqueda y la examinación pueden convertirse en la ruta de resolución.



En el diagrama anterior se aprecia que lo primero que se hace al resolver un problema es una representación del mismo. Los sentidos percibirán la información relevante la cual pueda que active o no algún esquema mental. De no darse tal activación, se provoca entonces un desequilibrio en las estructuras de la mente en la búsqueda de una solución al problema; aquí entra en juego la asimilación y la acomodación generando avances en el pensamiento.

El álgebra Como un Sistema de Representación

Para manifestar las ideas o introducir aspectos de la realidad en la mente, abstraerlos o transformarlos en ideas, hay que usar un prodigioso artificio que las sustituya; por ello la humanidad ha creado una inmensa variedad de elementos de comunicación que se llaman

“símbolos” Según Socas, Camacho y otros (1996), empleando los símbolos se han creado estructuras de comunicación más complejas que han generado las diferentes gamas de lenguaje que utilizamos hoy en día. Entre esta gama de lenguajes se encuentra la matemática, que constituye uno de los elementos de comunicación, expresión y comprensión más poderoso que ha inventado el hombre.

El álgebra constituye, en la teoría de Duval, un sistema de representación de objetos matemáticos al igual que lo es la lengua natural. En el aprendizaje de las matemáticas, la conversión juega un papel fundamental. Entendiéndose por conversión como “la transformación de la representación de un objeto en un registro P en otra representación del mismo objeto en un registro L”. Así, “la representación del objeto en el registro de llegada no tendrá el mismo contenido que en el registro de partida. Este cambio de contenido depende de la naturaleza del mismo registro” (Duval, 2004)

Añade Duval que en las matemáticas se movilizan varios registros de representación entre los cuales se encuentran los registros plurifuncionales que son aquellos que se utilizan en todos los dominios de la vida cultural y social; por ejemplo la lengua natural y figuras geométricas, entre otros. Están también los registros monofuncionales que son registros “derivados” y de alguna manera especializados en un solo tratamiento; por ejemplo los sistemas de escritura tanto numérica, como algebraica y simbólica. Concluye que las dificultades más importantes y las más decisivas de cambio de registro se dan entre un registro de tipo monofuncional y uno de tipo plurifuncional (Pág. 53)

Al utilizar el álgebra como un medio para resolver problemas de la vida cotidiana o, dicho de otro modo, al centrar el aprendizaje del álgebra a través de la resolución de problemas, se requiere de conversiones de expresiones del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico (al proponer una ecuación que lleve a la solución de un problema, por ejemplo) y viceversa (al darle un significado real a una respuesta que se presenta a través de una expresión algebraica). Según la teoría de Duval, es en este tipo de actividades donde se presentan las mayores dificultades de conversión; por lo tanto, se les debe dar un tratamiento especial.

Comunicación y Conexiones

Según el NCTM (2000), los programas de enseñanza de los diferentes grados de la educación básica deberían capacitar los alumnos para organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación; comunicar su pensamiento matemático con coherencia; analizar y evaluar las estrategias y pensamiento de los demás y, usar el lenguaje matemático con precisión para expresar ideas matemáticas. Es necesario pues que el alumno tenga experiencias que le ayude a apreciar el poder y la precisión del lenguaje matemático.

Queda implícito en la exposición anterior el papel que debe jugar el álgebra en la educación básica, y que lastimosamente en nuestro país aun no lo ha asumido. Para que pueda desempeñarse como tal, la interrelación entre situación cotidiana y el álgebra debe de estar presente en este tipo de unidades didácticas desde su inicio hasta el final, en sus actividades de introducción, en los ejemplos, en las prácticas, en los ejercicios, en el mismo aprendizaje de los algoritmos. Este punto de vista exige la recopilación de todo el material posible, en cuanto a problemas se refiere, para que el profesor pueda seleccionarlo en función de las circunstancias concretas de su clase.

Con la resolución de problemas se pretende que el alumno aplique y adapte diversas estrategias para resolver un problema. La diversidad de estrategias con que cuenta un alumno va a depender de su capacidad para conectar sus ideas o conceptos matemáticos con la situación que está resolviendo. Cuando los estudiantes pueden conectar sus ideas matemáticas, su comprensión es más profunda y duradera. Pueden ver conexiones entre los temas matemáticos, en contextos que relacionan las matemáticas con otras disciplinas y en sus propios intereses y experiencias.

A través de una enseñanza que resalte la interrelación de las ideas matemáticas, no sólo aprenden la asignatura sino que también se dan cuenta de su utilidad. Como se vio anteriormente desde su origen el álgebra ha estado íntimamente relacionada con la

geometría; en el II libro de *Los Elementos,* de Euclides (300 a. de C.) hay 14 proposiciones que permiten resolver problemas algebraicos; actualmente nuestra álgebra simbólica los resolvería rápidamente, pero el valor didáctico del álgebra geométrica es importante. En este sentido Resnick y Ford (Ídem) aconsejan que los problemas de geometría o los que se prestan fácilmente a la representación visual; parece que, aunque no cubren un campo general, demuestran muy bien los principios estructurales en los que se basa la resolución de problemas.

De todos los elementos teóricos expuestos en este capítulo se centra la atención en los siguientes aspectos que constituyen las bases fundamentales para el presente estudio:

- Según el NCTM en los últimos grados de la educación básica se debe estimular el desarrollo del pensamiento algebraico de los alumnos con actividades transitorias entre la aritmética y el álgebra. Operar con símbolos en la simplificación de expresiones algebraicas o en la resolución de ecuaciones, es tan solo una dimensión de lo que significa aprender álgebra cuyo concepto es más amplio; está relacionado con una lista considerable de habilidades de la mente.

- La resolución de problemas actualmente juega un papel doble en el proceso educativo: es un objetivo fundamental de la enseñanza de las matemáticas y es una estrategia que sirve como un medio de construcción de conceptos matemáticos y para desarrollar habilidades de pensamiento matemático. Al orientar el aprendizaje de las matemáticas a través de la estrategia de resolución de problemas, Santos (1997) hace destacar un dinamismo en las aulas de clases con ambientes similares con los que se desenvuelven los matemáticos; en ellos los alumnos tienen que conjeturar, argumentar, verificar resultados, relacionar las matemáticas con otras disciplinas. Además, Santos, propone la discusión en grupos pequeños y las presentaciones individuales como variantes efectivas en la resolución de problemas.

- Basándonos en la teoría del Desarrollo de Piaget, el desarrollo del pensamiento algebraico de los alumnos se debe iniciar desde el séptimo u octavo grado de educación básica. Este proceso debe ser paulatino y gradual hasta que el alumno alcance su pleno desarrollo de la etapa, a los 14 ó 15 años aproximadamente. En la teoría de Piaget, el aprendizaje del álgebra conlleva a un cambio en las estructuras mentales de los estudiantes, por lo que aprender álgebra, mas que operar con letras, es una forma de pensamiento. Se debe tener el cuidado de no introducir nuevas ideas en el aula demasiado pronto ni con un nivel que no este acorde con los esquemas mentales de los estudiantes.

- En la resolución de problemas a través del álgebra se realizan, cambios en las representaciones del problema; a esos cambios de representación Duval les llama conversiones. En general, estas conversiones se pueden agrupar en tres fases: del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico, del lenguaje algebraico al lenguaje algebraico y del lenguaje algebraico al lenguaje cotidiano. La educación formal le debe dar mayor énfasis a la actividades enmarcadas en la primera y tercera etapas pues, según Duval, es en ellas donde se presentan las mayores dificultades de conversión.

- Según Ursini y Küchemam el concepto de variable se adquiere por niveles. Por ser estos niveles diferentes entre si constituyen un obstáculo en el aprendizaje del álgebra. Entre estos nivele se mencionan: la letra como un número general, la letra como una incógnita específica, la letra como un objeto matemático y las letras como variables en la representación de una relación sistemática entre dos conjuntos de valores.

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Tipo de Investigación y Participantes en el Proceso

El presente estudio es una investigación cualitativa de tipo exploratoria, desarrollada en el período de julio a octubre del año 2006 en el Centro de Investigación e Innovación Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán Se trabajó con dos grupos de estudiantes: 41 alumnos de I bachillerato en educación y 29 alumnos de octavo grado, ambos de la Jornada vespertina.

Etapas del Proceso:

El estudio se realizó en dos etapas: una diagnóstica y otra de ejecución. La etapa diagnóstica se realizó con el grupo de bachillerato con el objeto de determinar qué habilidades de pensamiento algebraico había desarrollado el grupo en su educación básica. La etapa de ejecución se realizó con el octavo grado en el horario normal de la clase de matemáticas a través de experiencias de aula en dónde se analizó el desempeño del grupo con el propósito de explorar sus avances, logros y dificultades en el proceso de la construcción de sus conocimientos o desarrollo de habilidades matemáticas. Este grupo fue dividido en siete Equipos de Trabajo los que se dedicaron a resolver Guías de Trabajo bajo el enfoque de la resolución de problemas.

Metodología de las Sesiones de Trabajo

Cada Sesión de Trabajo inició con la distribución de las Guías de Trabajo por equipo, en ellos se les presentaron uno o más problemas cuya lectura y comprensión se realizó al interior de cada equipo para luego proceder, en un ambiente de discusión y de reflexión, con las demás etapas del proceso que propone Polya; hasta llagar a la verificación de los resultados. El papel del profesor, en general, consistió en controlar a los equipos para que el paso a cada etapa superior lo realizaran hasta que la previa se había logrado satisfactoriamente.

A aquellos equipos que necesitaron ayuda en algunas de las etapas se les brindó oportunamente, tratando de cumplir de la mejor manera posible con lo aconsejado por Polya: "*Ni tan mucho que parezca imposición, ni tan poco que parezca acomodo*" normalmente la

ayuda consistió en preguntas o comentarios que los hicieron reflexionar y profundizar en los detalles del problema.

A uno de los equipos que trabajó más lento que el resto se le dio tiempo adicional para que pudieran terminar las guías, previo a los debates grupales que se realizaron al finalizar una o dos guías con el objeto de discutir las diferentes estrategias y de llegar a conclusiones a nivel de grupo.

Instrumentos y Metodología empleada en la Recolección de la Información

El tipo de instrumento utilizado así como también la metodología estuvo en función de cada una de las etapas en que se realizó el estudio:

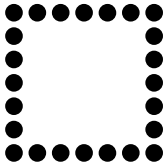
a) **Etapa diagnóstica:**

En esta etapa se pretendía determinar qué habilidades de pensamiento algebraico, de las propuestas por el NCTM, habían adquirido los estudiantes de I de bachillerato con orientación en educación, en su formación media básica. Para tal efecto se diseñó una Prueba Diagnóstica conformada por 7 problemas orientados a evaluar una habilidad específica cada uno. A la vez, cada problema se conformó por 2 ó más incisos a los que se les denominó reactivos; al menos uno de cada reactivo se resolvía con aritmética y los demás necesitaban del álgebra; de esta manera se ubicó en cuál nivel de pensamiento se encontraba el estudiante (el aritmético o el algebraico).

A manera de ejemplo, se presenta uno de los siete problemas que conformaron esta prueba con el que se pretendía determinar si el alumno era capaz de modelizar o reconocer un patrón numérico y de proponer una regla general que concuerde con el patrón o modelo.

4. Observe la cantidad de puntos que hay en el siguiente "cuadrado" [1]

[1] Adaptación al problema del "cuadrado de puntos" de Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM)



a) ¿Cuántos puntos hay en un “cuadrado” de **10** puntos en la base?
b) ¿Cuántos puntos hay en un “cuadrado” de **n** puntos en la base?

Con un reactivo de carácter aritmético (inciso a.) y otro de carácter algebraico (inciso b.) se pretendía, además, determinar en qué nivel de pensamiento se encontraba el grupo.

Para responder al primer reactivo de este problema, primeramente, se debe buscar alguna estrategia para el conteo de los puntos que se nos presenta en la figura y que conduzca a un patrón numérico o alguna relación entre el total de puntos del “cuadrado” y los puntos de la base. Analicemos algunas de las posibles soluciones

Estrategia 1

Considerar 2 lados con 7 puntos cada uno, y los otros dos lados con 5 puntos cada uno (dos puntos menos) haciendo un total de 24 puntos. De esa manera para el “cuadrado” de 10 puntos en la base, resultan 2 lados con 10 puntos cada uno y 2 lados con 8 puntos cada uno haciendo un total de 36 puntos.

Estrategia 2

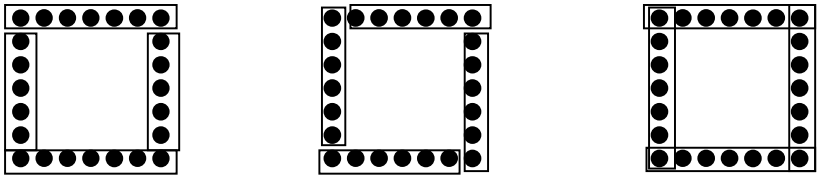
Considerar 4 lados incompletos de 6 puntos cada uno (un punto menos en cada lado) haciendo un total de 24 puntos. Con esta idea en el “cuadrado” de 10 puntos en la base hay 4 lados incompletos con 9 puntos cada uno, equivalentes a 36 puntos.

Estrategia 3

Considerar los cuatro lados con 7 puntos cada uno que hacen 28 puntos, luego quitarle los cuatro puntos de las esquinas porque se han sumado dos veces, resultando 24 puntos en

total. Para el caso de 10 puntos en la base el procedimiento sería multiplicar 10 por 4 y restarle 4 haciendo un total de 36 puntos.

En la siguiente figura se ilustran cada una de las estrategias explicadas en los párrafos anteriores:



Estrategia 1 Estrategia 2 Estrategia 3

Cualquiera que sea la estrategia seleccionada por el estudiante lo debe conducir a responder el segundo reactivo que trata de ver si, una vez que ha reconocido la relación, es capaz de escribir un modelo que concuerde con el patrón. Aquí es donde el alumno debe mostrar si puede pensar algebraicamente o si su pensamiento se limita a lo aritmético. El modelo que escriba va ha estar en función de la estrategia que ha seleccionado en el primer reactivo; de esta manera si el alumno optó por la *Estrategia 1* se espera una expresión como **2n + 2(n – 2)**, los que utilizaron la *Estrategia 2* pueden llegar a la expresión **4 (n – 1)** y con la *Estrategia 3* se puede llegar a **4n – 4**. Sabemos que las tres expresiones anteriores son equivalentes. De presentarse en el grupo diferentes expresiones se debe realizar la observación de que son equivalentes aunque más tarde lo demuestren por si solos.

b) **Etapa de ejecución:**

Esta etapa se desarrolló en función de los resultados de la Prueba Diagnóstica y tenía como propósito desarrollar las habilidades de pensamiento algebraico que según la teoría que fundamenta este estudio, se deben de desarrollar en la educación media básica. En esta etapa la recolección de datos se generó mediante experiencias de aula con actividades enmarcadas en el enfoque constructivo y orientadas a generar en el alumno actividad cognitiva. Las clases se desarrollaron bajo la denominación Sesión de Trabajo. El grupo se

dividió en 7 Equipos de Trabajo, 6 con 4 integrantes cada uno y, un Equipo de 5 integrantes; en cada sesión se plantearon situaciones problemas procurando que con los problemas seleccionados se fueran desarrollando, de forma gradual, habilidades de pensamiento algebraico en los estudiantes. Las evidencias se registraron a través de los siguientes instrumentos:

- **Guías y Hojas de trabajo:** En cada Sesión de Trabajo se le entregó una guía a cada Equipo en donde se les planteaban diferentes situaciones problemáticas las que generaban ambientes de discusión y de reflexión a nivel de equipo en primer lugar y luego discusiones a nivel de todo el grupo. Los acuerdos a los que llagaba cada equipo, las justificaciones necesarias y las conclusiones respectivas, quedaron registrados en las respectivas Hojas de Trabajo. Con cada guía se pretendía desarrollar habilidades específicas que llevarían al grupo, paulatinamente, a lograr la transición del pensamiento aritmético al algebraico. Cada guía se desarrolló en dos horas clases como mínimo y las que contenían dos o más partes ocuparon al menos tres horas.

  Se presenta a continuación un problema contenido en una de las guías desarrolladas con la que se pretendía que los estudiantes utilizaran las expresiones algebraicas para representar relaciones entre elementos de una figura geométrica.

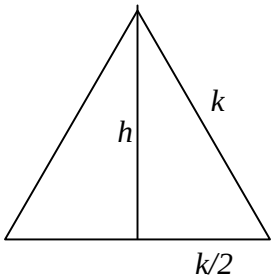
  > Problema: Encuentre una expresión que represente la altura de un triángulo equilátero cualquiera si conocemos la longitud de uno de sus lados.

Aprovechando la facilidad de visualización que presentan los objetos geométricos se pueden desarrollar muchas habilidades de pensamiento algebraico. En este problema se establece una conexión directa entre la geometría y el álgebra. Para su resolución se requiere vincular habilidades aritméticas (operatoria y sus propiedades), conceptos geométricos (triángulo equilátero, altura y otros), relaciones numéricas en figuras geométricas (Teorema de Pitágoras, igualdad de las medidas de los lados) así como expresiones de generalidad en el lenguaje cotidiano.

Un alumno que al intentar resolver el problema ha identificado todos los elementos presentes, se va ha encontrar en la necesidad de plasmarlas en el papel y de comunicarlas al equipo de trabajo así como también al resto del grupo. Según Piaget, al tratar de encontrar la expresión pedida en el problema se va a provocar un desequilibrio en sus estructuras mentales a lo que se le llama también conflicto cognitivo. Es en la búsqueda del equilibrio a través de la acomodación y la asimilación que se pretende desarrollar habilidades de pensamiento algebraico en los estudiantes.

Una forma de resolver el problema consiste en iniciar representando con una letra la longitud de uno de los lados del triángulo, digamos k; como se trata de un triángulo equilátero los tres lados deben medir lo mismo es decir las tres medidas se deben representar con la letra k. Es de fundamental ayuda un dibujo para visualizar todo el problema; en él se traza la altura del triángulo como el segmento desde uno de los vértices hasta el punto medio del lado opuesto (en este caso) al que se le puede llamar base. Por definición la altura es perpendicular a la base (en este caso) por lo que se forman dos triángulos rectángulos donde la longitud del cateto menor se puede representar con k/2 y la de la hipotenusa con k. Para encontrar la expresión de la altura (que se puede representar con h); Se puede usar perfectamente el teorema de Pitágoras con lo que resulta ser la raíz cuadrada de, el cuadrado de k menos el cuadrado de la mitad de k.

La siguiente figura ilustra el proceso anterior:



$$h = \sqrt{k^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2}$$

♦ **Vídeos:** Con los registros escritos se evidencian resultados pero casi nunca procesos. A través de filmaciones se logró dejar evidencia de las discusiones internas de cada

equipo y, de cuáles fueron los argumentos que los llevaron a las conclusiones finales. Se presentaron tres tipos de diálogos que se generaron producto de las reflexiones: los que se realizaron al interior de cada equipo, los que se realizaron entre un equipo específico y el profesor cuando a éste se le solicitó ayuda y, los que se realizaron a nivel de todo el grupo en las plenarias respectivas. En el vídeo se puede apreciar cómo estas conversaciones hacían reflexionar a los involucrados al punto de modificar sus opiniones, siempre con los argumentos necesarios. Algunos de estos diálogos se transcribieron para que quedara la evidencia por escrito y poder desarrollar el análisis con mayor claridad.

- **Hojas de Observación:** Las actitudes de los estudiantes, las expresiones, los gestos, las diferentes estrategias utilizadas para resolver un problema, las dificultades presentadas en cada sesión y otras variables que el vídeo y los reportes escritos de los estudiantes no lograron reflejar, se iban reportando en las hojas de observación diaria que el profesor llenaba. En general, en ellas se escribieron comentarios de lo más relevante que se presentaba en el desarrollo de cada sesión de trabajo.

Procedimiento del Análisis

Para la etapa diagnóstica se realizó un análisis más cuantitativo que cualitativo pues sólo interesaba conocer si los estudiantes habían o no desarrollado ciertas habilidades de pensamiento algebraico. Analizando cualitativamente las respuestas a cada una de las preguntas de la Prueba Diagnóstica se concluyó si se manifestaba o no la habilidad de pensamiento algebraico que el problema pretendía reflejar. Al final se determinó, para cada reactivo, el porcentaje de estudiantes que manifestaron tener presente la habilidad requerida para resolverlo.

En la etapa de ejecución se realizó un análisis de tipo cualitativo del desempeño de los estudiantes en sus respectivos Equipos de Trabajo y en cada una de las Sesiones de Trabajo, con el objeto de identificar evidencias de habilidades de pensamiento algebraico que iban incorporando a sus estructuras mentales del conocimiento. Se utilizó la estrategia de Resolución de Problemas como el medio por el cual los estudiantes desarrollarían dichas

habilidades pues es la que actualmente se recomienda por los especialistas en el campo de la matemática educativa.

Dado que el grupo, antes de iniciar el estudio, ya estaba familiarizado con esta estrategia; en las diferentes Sesiones de Trabajo no se dirigió la primera etapa que propone Polya, la *Comprensión del Problema*; se dejó para que cada equipo la realizara internamente. La atención se centró en las tres etapas restantes especialmente en los siguientes aspectos: las diferentes estrategias de resolución, los recursos matemáticos utilizados en sus argumentos, las diferentes representaciones utilizadas para visualizar el problema, las diferentes formas de comunicar sus ideas y/o resultados así como el proceso de verificación de los mismos.

Además, en cada problema se realiza un análisis comparativo de lo que realizaron los diferentes equipos, enfatizando en los puntos en común y que son evidencia de que se ha desarrollado la habilidad esperada. Se destaca también las principales dificultades que se presentaron en la búsqueda de las soluciones. Se insertan copias de los trabajos de los estudiantes y fragmentos de diálogos entre estudiante-estudiante y estudiante-profesor que le dan fundamento y mayor claridad al análisis. Se presentan también algunos comentarios de las actitudes de los estudiantes ante los problemas. Al final se hace un análisis global de toda la experiencia con el fin de establecer conclusiones y de tener un panorama más amplio de los logros alcanzados.

En este proceso de análisis se contrastan las experiencias vividas por el grupo con las teorías que sirven de soporte teórico y que se han explicado en el capítulo anterior. A la vez, estas teorías fueron las que guiaron la etapa de ejecución, desde la selección de los problemas, la presentación de éstos al grupo, hasta la forma en que serían resueltos. Los procesos de ejecución y de análisis se orientaron por tres ejes teóricos:

- La propuesta del National Council of teachers of Mathematics (2000) proporcionó los elementos teóricos sobre lo que es el álgebra, cómo debe ser concebida por los estudiantes, la conexión de esta disciplina con la geometría y el proceso de comunicación como una actividad fundamental en el aprendizaje de las matemáticas. En especial dichos

elementos sirvieron de pauta para la selección y elaboración de problemas de manera sistemática y con propósitos bien definidos. Las habilidades de pensamiento algebraico que se pretendían desarrollar en los estudiantes están implícitas en esta propuesta.

- La estrategia de Resolución de Problemas como el medio para lograr el aprendizaje de las matemáticas; propuesta que tiene sus raíces con Polya quien a mediados del siglo pasado propuso que la resolución de problemas debiera ser una actividad frecuente en el aula de clases. Como estrategia de enseñanza fue planteada por Shoenfeld, años más tarde. Esta propuesta orientó la etapa de ejecución respondiendo a las interrogantes ¿quién debe resolver los problemas?, ¿cómo se deben resolver los problemas? y ¿cuál es el papel del profesor en la resolución de problemas?, entre otras. La organización del aula en Equipos de Trabajo con sus discusiones internas, las plenarias a nivel del grupo y las conversaciones entre el profesor y los estudiantes se fundamentan en estas propuestas.

- Elementos de las teorías cognitivas de Piaget permitieron inferir qué es lo que sucedió en la mente del los estudiantes en cada una de sus acciones. A la vez, constituyeron las bases para determinar en qué momento se dio el aprendizaje y en qué momento no se dio, además se pudo inferir cuáles fueron las dificultades de tipo cognitivo que impidieron el aprendizaje en los casos que no lo hubo.

CAPÍTULO IV: PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Al igual que el estudio, el análisis se presenta en dos etapas: una etapa diagnóstica y otra de ejecución. En la etapa diagnóstica se hace un análisis cualitativo con ciertos elementos cuantitativos que responden a los propósitos de dicha etapa.

En la etapa de ejecución se desarrolla un análisis cualitativo en donde las reacciones y el papel desempeñado por cada uno de los alumnos conforman los datos que se recogieron de la investigación y que serán contrastados con los fundamentos teóricos que orientaron esta etapa. Se aclara que previo al estudio, este grupo, no habían tenido ningún contacto formal con el álgebra, si no que es a través de el, que los alumnos se iniciarían en la transición del Aritmética al Álgebra.

Etapa Diagnóstica

La prueba diagnóstica se aplicó a 41 alumnos de primero de bachillerato con orientación en educación; con ella se pretendía determinar qué habilidades de pensamiento algebraico, de las propuestas por el NCTM, habían adquirido los estudiantes en su formación media básica o si por el contrario, pese a casi dos años de estudio del álgebra, continuaban aún pensando aritméticamente.

La prueba contenía 7 problemas con varios incisos cada uno conformando un total de 27 reactivos. Se hace referencia al reactivo 3b, por ejemplo, para indicar al inciso b del problema 3. De los 27 reactivos, 5 se resolvían mediante aritmética (Ar) y 22 requerían del álgebra (Al) para su resolución. Se presenta a continuación la clasificación de cada reactivo por área de dominio (aritmética o álgebra)

Cuadro No 1: Clasificación de los reactivos

Problema	1				2					3				4		5							6			7	
Inciso	a	b	c	d	a	b	c	d	e	a	b	c	D	a	b	a	b	c	d	e	f	g	a	b	c	a	b
Área	Ar	Al	Al	Al	Al	Al	Al	Al	Al	Al	Al	Al	Al	Al	Ar	Al	Al	Al	Al	Al	Al	Al	Ar	Ar	Al	Al	Ar

En el cuadro anterior se observa que los problemas 1, 4, 6 y 7 tienen reactivos que necesitaban de las dos disciplinas para ser resueltos totalmente y los otros 3 sólo requerían del álgebra. Un dato muy relevante es que 33 de los 41 alumnos (80%) respondieron correctamente no más de 7 reactivos de álgebra, reflejando así la gran debilidad en esta disciplina. Apenas 2 alumnos (5%) respondieron más de 16 reactivos de forma correcta. En términos generales podríamos afirmar que son pocas las habilidades algebraicas que desarrollaron los alumnos en su formación media o que su desenvolvimiento en álgebra es demasiado pobre. Para tener una visión clara y precisa del rendimiento del grupo se expone, a continuación, un análisis del desempeño de los estudiantes en cada uno de los reactivos; en primer lugar se analizarán aquellos problemas de carácter algebraico y luego los que evaluaron competencias aritméticas y algebraicas a la vez.

Análisis del desempeño de los estudiantes y de las dificultades encontradas por reactivo

Problemas que evaluaron únicamente habilidades algebraicas

Problema 2: Escriba de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible.

a) $3a - (b + a) =$ _____

b) $2a + 5b =$ _____

c) $2y(3 - 4y) + 5y^2 - 7y =$ _____

d) $(a + b) + (a - b) =$ _____

e) $3(x - 5) - 7x + 3 =$ _____

Los resultados de este problema se presentan en la siguiente tabla:

Cuadro No. 2
Resultados del Problema 2

Reactivo Respuestas	2a	2b	2c	2d	2e
Correctas	6	6	5	1	7
Incorrectas	22	24	22	28	23
En blanco	13	11	14	12	11

Este problema tenía como objetivo determinar qué tanto podían los alumnos operar con letras descontextualizadas tal y como se presentan en los diferentes textos de álgebra.

Sorprendentemente este es uno de lo problemas con menos respuestas correctas por reactivo en promedio (vea el cuadro No.2) La principal dificultad encontrada es que treinta alumnos (75%) no reconocieron las operaciones indicadas; multiplicando en los incisos a) y d) cuando tenían que sumar o restar; otros alumnos no aplicaron las reglas correctas en cada operación sumando los exponentes al sumar dos términos semejantes o sumando los coeficientes de dos términos que no eran semejantes como los del inciso b).

Problema 3: Exprese con signos, letras y números:

a. Un número cualquiera: _____
b. La suma de dos números distintos: _____
c. La suma de un número más el doble del mismo número es igual a 24: _____
d. El número de lempiras que representan ***x*** billetes de 5 lempiras y ***x*** billetes de 20: _____

La siguiente tabla muestra los resultados por categoría para este problema:

Cuadro No. 3
Resultados del Problema 3

Reactivo / Respuestas	3a	3b	3c	3d
Correctas	28	26	11	7
Incorrectas	11	12	23	18
En blanco	2	3	7	16

Con este problema se pretendía que los alumnos utilizaran términos algebraicos para representar expresiones dadas en lenguaje cotidiano. En el cuadro No. 3 se observa que los reactivos 3a y 3b, de carácter puramente algebraico, son los que más alumnos respondieron correctamente, y que precisamente consideraban a la variable como un número general; destacándose así la habilidad algebraica con mayor dominio en el grupo (68%). Siete alumnos no utilizaron letras para representar un número cualquiera y recurrieron a la aritmética para

escribir uno en particular (5 por ejemplo); estos alumnos mal interpretaron la expresión “Un número cualquiera” como que si con ella se les pedía que escribieran cualquier número.

En el reactivo 3c el rendimiento bajó considerablemente; aquí se evaluó el concepto de variable como incógnita, que según Ursini es el primero que se debe desarrollar y en el los alumnos tenían que plantear una ecuación para representar una situación que se les presentó en lenguaje común. Solamente 11 alumnos lo hicieron correctamente. La principal dificultad encontrada es que los alumnos propusieron un valor específico para la incógnita (que en algunos casos era el correcto) ¡Otra vez no siguieron las instrucciones del problema!

Problema 5: Complete el siguiente cuadro de edades, suponiendo que actualmente Pedro tiene el doble de la edad que Sergio, Martha tiene ocho años más que Pedro y Tony tiene doce años menos que la suma de las edades de Martha y Sergio.

	Pedro	Tony	Martha	Sergio
Edad Actual	a)	c)	e)	x
Edad dentro de una década	b)	d)	f)	g)

A continuación se presentan las respuestas por categorías para este problema

Cuadro No. 4
Resultados del Problema 5

Reactivo / Respuestas	5a	5b	5c	5d	5e	5f	5g
Correctas	12	6	3	3	8	4	7
Incorrectas	10	12	16	14	13	13	10
En blanco	19	23	22	24	20	24	24

En este problema se les pidió a los estudiantes que establecieran relaciones algebraicas entre las edades de 4 personas tomando como referencia la de uno de ellos (la de Pedro) y que se les representara mediante la letra “x”. En promedio hay 6 respuestas (de 42) correctas por

reactivo, lo que refleja una debilidad del grupo en este tipo de actividad. De toda la prueba este es el problema que más alumnos dejaron en blanco, pese a que se les insistió que contestaran la prueba según sus conocimientos. De los que realizaron incorrectamente el problema, 11 dieron una respuesta numérica y 7 establecieron relaciones algebraicas incoherentes.

Problemas que evaluaron habilidades tanto aritméticas como algebraicas

Para una mejor comprensión y para establecer comparaciones entre el desempeño en álgebra y en aritmética se presenta el siguiente cuadro

Cuadro No. 5: Desempeño de los alumnos en problemas que evaluaron habilidades aritméticas y algebraicas a la vez

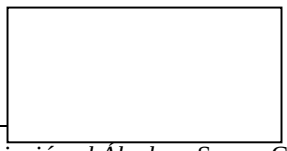
Problema	Bien en Aritmética y en álgebra	Bien en Aritmética y mal en álgebra	Mal en Aritmética y en álgebra	Mal en Aritmética y bien en álgebra
1	12	23	4	2
4	6	7	28	0
6	3	23	15	0
7	10	8	23	0

En este cuadro se aprecia, sin entrar en detalles, la debilidad que presenta el grupo para dar respuestas algebraicas. En estos problemas los alumnos tenían que reconocer patrones, establecer relaciones entre cantidades y modelar una situación de la vida diaria; en algunos reactivos se les pidió respuestas aritméticas y en otros, respuestas algebraicas. Se observa que a muchos alumnos les resultó fácil dar la respuesta aritmética, no así la algebraica.

A continuación se analiza el desempeño de los estudiantes en cada problema

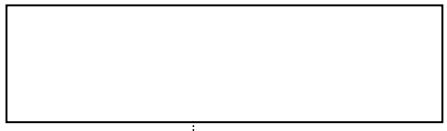
Problema 1[2]: El perímetro de una figura geométrica es la suma de las longitudes de cada uno de sus lados. Encuentre el perímetro de las siguientes figuras:

a)



Perímetro: _____

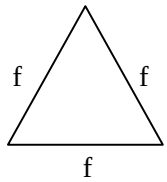
b)



Perímetro: _____

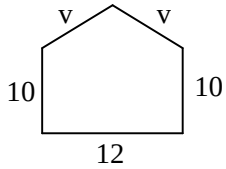
[2] Tomado de *Iniciación al Álgebra*. Socas, Camacho, et al.

c)



Perímetro: _____

d)



Perímetro: _____

Los resultados de este problema se presentan en la siguiente tabla:

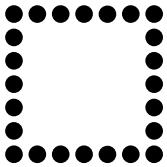
Cuadro No. 6
Resultados del Problema 1

Reactivo / Respuestas	1a	1b	1c	1d
Correctas	35	8	19	14
Incorrectas	6	30	18	20
En blanco	0	3	4	7

Con este problema se pretendía determinar en qué nivel (algebraico o aritmético) se encontraba el grupo para efectuar sumas con números y letras contextualizadas; aquí, las letras representaban longitudes de polígonos a los que tenían que calcularles el perímetro respectivo. En este problema se encuentra el reactivo con mejor rendimiento en toda la prueba (reactivo 1a con un rendimiento del 85%) que es de carácter puramente aritmético. En el cuadro No. 5 se aprecia el gran porcentaje de alumnos que tuvieron éxito en la parte aritmética y todo lo contrario en álgebra. Las principales dificultades se presentaron al sumar una misma variable "$f + f + f = f^3$" y al sumar variables y constantes donde sumaron las constantes y le agregaron la variable a la respuesta final "$10 + 10 + 12 + v + v = 32v$"; otros alumnos sustituyeron primero la variable por un número y luego efectuaron la suma.

Con el cuarto y sexto problemas que se presenta a continuación se pretendía ver si el alumno era capaz de modelizar o reconocer un patrón numérico y de proponer una regla general que concuerde con el patrón o modelo.

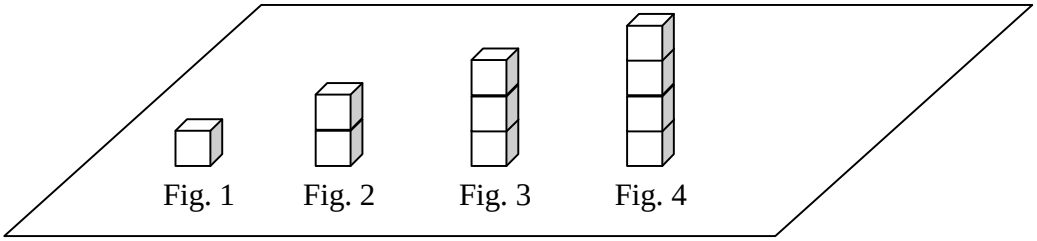
Problema 4[3]: Observe la cantidad de puntos que hay en el siguiente "cuadrado"



a) ¿Cuántos puntos hay en un "cuadrado" de **10** puntos en la base?

b) ¿Cuántos puntos hay en un "cuadrado" de **n** puntos en la base?

Problema 6[4]**:** Observe cuidadosamente la siguiente secuencia de figuras



a) ¿Cuántas caras de los cubos son visibles en la cuarta figura?

b) ¿y en la sexta figura?

c) ¿y en la figura ene-ésima?

La siguiente tabla muestra los resultados por categoría para estos problemas:

Cuadro No. 7
Resultados de los Problemas 4 y 6

Reactivo	4a	4b	6a	6b	6c
Respuestas Correctas	13	6	24	22	3
Incorrectas	23	20	13	13	28
En blanco	5	15	4	6	10

[3] Adaptación al problema del "cuadrado de puntos" de Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM)

[4] Adaptación al problema "Área de las torres de cubos" de Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM)

Los reactivos 4a, 6a, y 6b son de tipo aritmético, y, 4b y 6c son algebraicos. En el cuadro No. 7 se puede notar la diferencia entre la cantidad de respuestas correctas para cada tipo de reactivos. Según el cuadro No. 5 se puede afirmar que un buen porcentaje de alumnos (59%) reconocieron el patrón, mas no pudieron expresarlo algebraicamente. En estos problemas sobresalieron las respuestas incorrectas que en un 79% de los casos se debió a que los alumnos dieron respuestas numéricas cuando debieron escribir una expresión general; quedando evidenciada la debilidad de los alumnos para pensar algebraicamente.

Problema 7: La compañía de teléfonos móviles Movitel ofrece un servicio con una tarifa básica de 300 lempiras al mes más 2 lempiras por cada minuto; las fracciones de minutos no son cobradas.

a. Escriba una expresión que nos indique el gasto mensual de un cliente cualquiera

b. ¿Cuánto pagará Anarda al finalizar el mes de febrero si habló un total de 75 minutos?

A continuación las respuesta por categorías para este problema

Cuadro No. 8
Resultados del Problema 7

Reactivo Respuestas	7a	7b
Correctas	10	18
Incorrectas	12	7
En blanco	19	16

En este problema se les presentó una situación de la vida real con dos preguntas, una algebraica (inciso a) en la que tenían que modelizar dicha situación relacionando las variables mediante una expresión lineal y otra aritmética (inciso b) que la pudieron haber respondido utilizando o no el modelo encontrado en el inciso anterior. En el cuadro No. 8 se puede observar la superioridad de respuestas en blanco para este problema, quedando evidenciada la deficiencia de los alumnos para resolver problemas verbales. Como en los demás problemas

de esta naturaleza, es en el reactivo aritmético (7b) donde se presentan más respuestas correctas. Un 76% de los alumnos no lograron responder correctamente el reactivo algebraico ya sea por dar relaciones incoherentes o por proponer respuestas numéricas.

En conclusión, los alumnos están concibiendo el álgebra sólo como un conjunto de letras que representan números cualesquiera o desconocidos. De las seis categorías en que según Küchemann se pueden usar e interpretar las letras, la que presenta mayor rendimiento es la de ver a las letras como objetos. Son muchas las habilidades de pensamiento algebraico que según el NCTM deben y pueden adquirir los alumnos entre los 11 y 15 años, más, la escuela le está dando más énfasis al manejo de técnicas adecuadas para operar con variables. El concepto de variable como una incógnita no está muy presente y es fundamental tenerlo para poder utilizar el álgebra en la resolución de problemas, de ahí el bajo rendimiento en este tipo de actividades.

El pensamiento aritmético es el que predomina en los estudiantes de bachillerato, pues pudimos apreciar la tendencia general del grupo a realizar reactivos de carácter puramente algebraicos recurriendo a la aritmética. La resistencia al álgebra fue tan notoria aún en los problemas en el que explícitamente se les pidió una expresión algebraica para su resolución, lo que demuestra que el pensamiento algebraico no está presente en el grupo. Esto, explicado desde la teoría de los estadios del desarrollo del niño, se debe a que al exponerse el grupo a situaciones de aprendizaje totalmente nuevas, se ven obligados a regresar al estadio de operaciones concretas y aún al pensamiento pre operacional. La gran cantidad de respuestas en blanco en algunos reactivos se puede interpretar que fueron a causa de que dichos reactivos no provocaron el desequilibrio en las estructuras mentales es decir la asimilación y la acomodación no se emplearon; seguramente fueron muy extraños para los alumnos y mejor los ignoraron.

Etapa de Ejecución

La etapa de ejecución del estudio inició el 11 de julio de 2006, comenzando con la división del grupo en siete equipos de trabajo, por afinidad. Se les explicó a los equipos la metodología en que se desarrollarían las clases a partir de la fecha, así como los criterios de evaluación. Se les incentivó a que participaran todos en la toma de decisiones al interior del respectivo equipo de trabajo, exponiendo y argumentando sus puntos de vista. En esta fecha se le asignó a cada equipo la primera Guía de Trabajo (Vea Anexo 2). Los logros y dificultades que se presentaron en el desarrollo de cada guía de trabajo se exponen a continuación:

Primera Guía de Trabajo

Con esta guía se tenía por objetivo iniciar a los alumnos en la interpretación de la variable como número general, según la clasificación de Ursini. Desde la escuela primaria, estos alumnos han venido enfrentándose con propiedades aritméticas que en su formulación usan letras para representar números cualesquiera. Para determinar qué lograron comprender, de esas expresiones, se les asignaron los reactivos 1, 2 y 3 que se presentan a continuación:

Lea cuidadosamente esta propiedad **A + B = B +A**

1. ¿Qué propiedad representa la expresión?
2. ¿Qué significa esa propiedad?
3. ¿Quién es A? y ¿quién es B?

En las dos primeras preguntas las respuestas no variaron; los siete equipos reconocieron que esa expresión representa la propiedad conmutativa de la suma, la que para el equipo 3 significó "*que el orden de los sumandos no altera la suma final*". Expresiones equivalentes dieron los demás equipos. En el aula se presentaron casos particulares para ilustrar esta propiedad, Alba por ejemplo expresó "*5 + 4 = 4 +5*", el equipo 2 escribió: 5+ 6=11, 6+5 = 11.

Atención especial merece las diferentes respuestas para el reactivo 3 y que se presentan en la siguiente tabla:

Cuadro No. 9
Respuestas por equipos para el reactivo 3 de la Guía 1

Equipo 1	Son números naturales
Equipo 2	Cualquier número que colocado de distinta forma su resultado será el mismo
Equipo3	A y B son los sumandos que pueden ser cualquier número.
Equipo 4	Cualquier número entero
Equipo5	A y B son los sumandos, representan cualquier número.
Equipo 6	Cualquier número
Equipo 7	Son ejemplos representativos de la propiedad conmutativa de la suma.

Observemos en primer lugar la respuesta del equipo 7 que no es coherente con la pregunta, pareciera más otra respuesta para el reactivo 1. Los seis equipos restantes respondieron que las letras representaban a números cualesquiera; dos de esos equipos limitaron su respuesta al conjunto de los números naturales o al de los enteros. En realidad no estaban concientes del alcance de dicha respuesta, en los casos particulares todos los equipos utilizaron sólo números naturales. Al extenderse al conjunto de los enteros ponen en duda la validez de la propiedad conmutativa de la suma. Una vez respondidas las primeras tres preguntas se abrió una discusión grupal. En el protocolo 1 (Vea Anexo 3) se evidencia la confusión en que se deja caer todo el grupo por la opinión de un integrante. Veamos parte de este protocolo:

Kateryn: Tienen que ser del mismo signo

Grupo: Noooo…

Diego: Si, para que se puedan sumar

Profesor: Dice Diego que tienen que ser del mismo signo para que se puedan sumar

Grupo: Siii

Dania: ¡Ah!, para que se puedan sumar tienen que ser del mismo – Apoyando a Diego –

Aquí están mal empleando una de las reglas que se utilizan al sumar números enteros: “Cantidades del mismo signo se suman”, piensan que esta regla restringe la validez de la

propiedad conmutativa de la suma. Es hasta que se le dio la oportunidad a Diego para que se explicara mejor en la pizarra que se llegó a concluir que la propiedad se cumple también en los enteros. Fue necesario regresar a la aritmética con un caso particular (A = –3 y B = 2) para luego generalizarlo para valores de A y B en el conjunto de los Enteros. La discusión estaba abierta, en el video se observa como todo el grupo se involucró en el debate ayudando y corrigiendo a Diego. Se puede afirmar que el concepto de número general no estaba desarrollado en los esquemas mentales de los alumnos; hacían uso de la expresión "cualquier número" sin comprender el significado de la misma.

Con el objeto de determinar si el cambio en las letras afectaba, para ellos, el mensaje de la expresión; se les presentaron los reactivos 4, 5 y 6:

Lea cuidadosamente la siguiente propiedad **M + N = N + M**

4. ¿Qué significa esa propiedad?
5. ¿Será equivalente esta propiedad con la primera?
6. ¿Por qué?

En el reactivo 4 se les pidió que explicaran el significado de la expresión M + N = N + M; los 7 equipos respondieron que el orden de los sumandos no altera el resultado o la suma. Con respecto a los reactivos 5 y 6 el Equipo 4 responde:

5) Si

6) Porque a pesar que se usan diferentes letras ambas representan la propiedad conmutativa de la suma.

Los demás equipos dieron explicaciones similares: "*en ambas expresiones el orden de los sumandos no alterara el resultado*", "*representan lo mismo solo cambian las letras*". Evidenciándose así la concepción de generalidad de las letras en las expresiones respectivas.

Seguidamente se desarrollaron los reactivos 7, 8 y 9 con preguntas similares a las anteriores:

Observe la siguiente propiedad: $1^x = 1$

7. ¿Qué significa esa expresión?

8. ¿Quién es ***x*** en esa expresión?
9. ¿Qué tipo de número puede ser la ***x***? ¿podrá ser un número negativo? ¿podrá ser cero?

De nuevo los equipos expresaron que la letra (la x) es cualquier número, solo que esta vez tratan de verificar la propiedad con diferentes tipos de números antes de responder. Un factor favorable para el desarrollo de toda la guía resultó ser el uso de la calculadora, a través de la cual rápidamente verificaron las tres propiedades en cuestión con otros tipos de números (racionales e irracionales); en especial para la tercera expresión ($1^x = 1$) ya que a inicios del octavo grado no es tan fácil extender comprensivamente, la validez de la propiedad del conjunto de los naturales al conjunto de los reales.

Cuando el objetivo de la clase de matemáticas va más allá de realizar una operación algorítmica, la calculadora se convierte en una herramienta muy valiosa; y no se condenaría a aquellos alumnos que sacan "a escondidas del profesor" una calculadora para realizar la tarea. En este caso resultó útil para comprender la generalidad del número x en esa propiedad. La validez de la propiedad $1^x = 1$ en los naturales es aceptada por la misma definición de potencia sin mayor dificultad; al pasar a los enteros y asignarle valores negativos a la variable, la validez de la propiedad no es tan obvia; mucho más difícil si consideramos valores fraccionarios y aún más si consideramos valores irracionales como $1^{\pi} = 1$. Por lo tanto, pretender que el alumno acepte que "$1^x = 1$" es una propiedad válida para cualquier valor real de x por el simple hecho de que es una regla, es no tener conciencia de lo que implica dicha propiedad.

Con los reactivos del 10 al 12 se buscaba que los estudiantes aplicaran el concepto de generalidad de la variable para construir expresiones algebraicas, partiendo de un enunciado verbal. Esta vía resultó ser más difícil que la de los reactivos anteriores. Por el momento ya se había profundizado en lo que significa la expresión "un número cualquiera"; en este momento se trata de que apliquen esa idea para plantear las primeras expresiones algebraicas en la clase de matemáticas. Los reactivos fueron los siguientes:

10. Escriba una expresión que represente la suma de 7 con cualquier número

11. Escriba una expresión que represente el producto de 3 con cualquier número
12. Escriba una expresión que represente la diferencia entre dos números cualesquiera

Con respecto a la expresión “la suma de 7 con cualquier número” lo primero que se les ocurrió a Bany fue sumar 7 con otro número específico (7 + 8 = 15, por ejemplo); esta alumna evidenció estar anclada en el pensamiento aritmético. Lo mismo pasó en las otras dos expresiones. Aquí interpretaron la expresión “cualquier número” en el lenguaje normal como cuando un profesor pide que pase cualquier alumno a la pizarra y quien va es uno en específico. A esto se refiere Duval cuando clasifica al lenguaje común como un registro plurifuncional, pues una misma expresión se puede emplear en varios contextos y en situaciones diferentes obteniendo así significados distintos.

De igual manera se estaban comportando los demás equipos, respondiendo con casos particulares. ¿Qué estaba sucediendo? Tal vez no comprendieron lo que se les pidió, una expresión. Era una situación totalmente nueva, más sus respuestas estaban en función de sus esquemas mentales. Siempre en matemáticas se han dedicado a utilizar los números en cálculos para luego dar una respuesta. El concepto aprendido recientemente “las letras representan a un número cualquiera” es lo que tenían que conectar en esta nueva situación. Ellos no habían comprendido que se les pedía un cambio de simbología: una M por ejemplo para toda la expresión “cualquier número”

Se decidió entonces realizar una discusión a nivel de grupo, para lo cual se le pidió a la alumna Bany que explicara el trabajo de su equipo (Vea protocolo 2 en Anexos) Al preguntarle sobre su primer respuesta (7 + 8 = 15) ¿siete más cuanto?; respondiendo primero ella “*más ocho*” y luego el resto del grupo en coro “*más ocho*”. La alumna Dania aclara que ocho no es cualquier número. Dicho esto Moisés decide participar, escribe en la pizarra 7 + x; veamos esta parte del protocolo

Profesor: Moisés, explique su opinión que está en la pizarra.

Moisés: Nos están pidiendo siete más cualquier número, recordemos que x – la subraya –

puede ser cualquier número, x puede ser ocho, puede ser nueve o cualquier otro.

Profesor: Si, es que, no se les pidió que hicieran una suma sino que sumaran a siete con un número cualquiera.

José Manuel: y ¡represente! – enfatizando que los que se les pide es representar la suma –

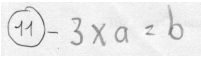
En el protocolo se identifican dos aportes muy valiosos para la discusión, primeramente la aclaración de Dania "*ocho no es cualquier número*" que sin duda fue fundamental para que Moisés recurriera a lo discutido en las preguntas anteriores y lograra así reconocer en la expresión "cualquier número" el concepto de variable. El segundo aporte es la observación de José Manuel que hace reflexionar al grupo sobre qué es se les pide en este reactivo.

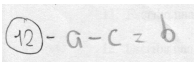
En un problema como el del reactivo 10, normalmente el maestro cree que el estudiante lo resuelve de manera fácil y rápida; por lo general no se plantean en el aula de clases, pues se consideran pérdida de tiempo. Se ha demostrado que esa concepción es falsa; en realidad es todo un conflicto el que se genera con esa situación; dicho en términos de Piaget se genera un Conflicto Cognitivo. ¿Qué pasa en la mente de un alumno cuando en su primera clase de álgebra, en un minuto, aprende que 7 + x es un ejemplo de expresiones algebraicas? Lo más que puede hacer un alumno es preguntarle al profesor qué es esa equis, y este respondería con mucha sabiduría "Equis es un número cualquiera"

Producto de las discusiones que generó el reactivo 10 y de las conclusiones a las que se llegó, los reactivos 11 y 12 se resolvieron de manera correcta por 6 equipos sin mayor dificultad, sólo el equipo 4 dio en sus primeras respuestas casos particulares (3 x 3 y 12 – 8 respectivamente) hasta que se les hizo énfasis que se trataba de números cualesquiera. El equipo 6 por ejemplo en el reactivo 11 respondió 3 x A y en el 12 respondió A – B.

Dos equipos dieron respuestas que merecen atención especial:

Equipo 3: 11) R= 3xa=b 12) R= x-J=a

Equipo 5: 



Se ve que ambos equipos no presentaron casos particulares para construir sus expresiones pero se hallaron en la necesidad de asignarle una letra a la respuesta. Estaban claros que el triple de un número cualquiera se representa con la expresión “3 x a”, más pensaron en que la respuesta es también una cantidad general y la representaron con la letra b ¿Acaso la expresión “3 x a” está incompleta? ¿Será necesario representar al resultado?; claro que no. Según Palarea esto se debe a la incapacidad de los alumnos de secundaria para aceptar la falta de clausura en las expresiones tanto aritméticas como algebraicas.

Finalmente, con el reactivo 13: “La expresión **X + X** ¿será equivalente a la expresión **F + G**?” se quería saber que opinaban entonces cuando en una expresión hay dos letras diferentes, al respecto 4 equipos respondieron de inmediato que no eran equivalentes; dos equipos opinaron “*letras iguales representan números iguales y letras diferentes representan números diferentes*”. Inútil resultaron los intentos de hacerles comprender (no el de hacerles saber) que podría darse el caso en que letras diferentes representasen a números iguales. Esta problemática fue abordada en sesiones posteriores.

En resumen, en esta sesión se logró reflexionar sobre el significado de la expresión “cualquier número” y cómo esta expresión puede sustituirse por una letra en el lenguaje algebraico; Formándose, de esta manera el concepto de variable como un número general. Se inició, de forma implícita, la formación del concepto de Expresión Algebraica y su aplicación en situaciones de la vida diaria.

Segunda Guía de Trabajo

El 13 de julio se les asignó la segunda guía con la que se perseguían dos objetivos; en primer lugar, con los reactivos del numeral 1 se pretendía profundizar en el uso de la variable como un número general en la representación algebraica de expresiones dadas en leguaje cotidiano. Los reactivos se presentan a continuación:

1. Escriban una expresión algebraica para las siguientes cantidades
   a) Un número cualquiera,
   b) La suma de dos números distintos,
   c) El doble de la suma de dos números
   d) La mitad de un número.
   e) El doble de la diferencia entre A y B.
   f) El doble de un número, menos 5.
   g) El cuádruplo de un número más 7.
   h) El triple de un número más el doble del mismo número.
   i) El doble de un número, por y
   j) El cuadrado de un número.

Los equipos trabajaron de forma independiente enfrentando nuevos retos. El equipo 5 pidió ayuda para el reactivo 1e ya que no podían llegar a un acuerdo al interior del equipo. Este reactivo tiene la particularidad de pedir el doble del resultado de una operación, a saber, la diferencia entre A y B. Se presenta a continuación parte de de la discusión que se originó al interior del equipo (Vea Protocolo 3 en Anexos 3)

Luis Enrique: ¿Cuál es la pregunta?

Darwin: El doble de la diferencia entre A y B

Raúl: ¡Es una división!

Darwin: Es una resta, diferencia

Luis Enrique: ¡Ah!, A menos B, más dos

Profesor: ¿sumar dos significa doble?, si yo tengo tres más dos ¿con eso hago el doble?

Equipo: No

Profesor: ¿Cómo se obtiene el doble?

Darwin: A menos B por dos – y escribe A – B •2 –

Profesor: A menos B punto 2, ¿todos escribieron A menos B punto 2?

Raúl y Carlos Luis: Si

Profesor: ¿No creen que ahí en sus cuadernos dice el doble de B?

Darwin: ¡El doble de B!

Raúl: Entonces, ¿tiene que ser entre paréntesis?

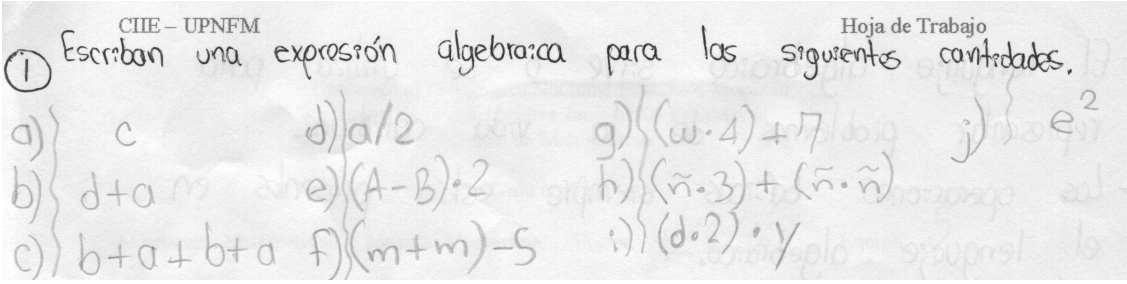
Darwin: Si, porque primero tienen que ser las multiplicaciones y de ahí las restas

Profesor: ¿A dónde tiene que ir el paréntesis?

Raúl: Parece que en A menos B para que se mire lo que nos piden

En el protocolo anterior se evidencia la forma cómo el equipo dirigió internamente la etapa de Comprensión del Problema. En la medida en que iban identificando lo que se les pedía e interpretando palabras como “diferencia”, que Darwin automáticamente la asoció con la operación resta; así se iban acercando cada vez más a la solución. Sobresale el hecho que es el mismo equipo el que logró reconocer, gracias a una pregunta orientadora por parte del profesor, que su primera respuesta estaba incompleta. Reconocieron la necesidad de usar paréntesis y que sólo de esa manera su expresión representaría exactamente lo que se les había pedido.

Fue la única intervención que realizó el profesor en este equipo; los demás reactivos los resolvieron por si solos. Estas fueros sus respuestas

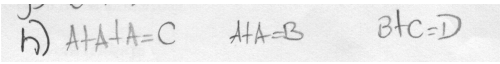

CIIE – UPNFM Hoja de Trabajo

1 Escriban una expresión algebraica para las siguientes cantidades.

a) c
b) d+a
c) b+a+b+a
d) a/2
e) (A-B)·2
f) (m+m)-5
g) (ω·4)+7
h) (ñ·3)+(ñ·ñ)
i) (d·2)·y
j) e^2

En estos reactivos se tuvo la satisfacción de que el 97% de las respuestas presentadas por los siete equipos estaban correctas, un equipo, al igual que el equipo 5, no usó paréntesis en los reactivos 1c y 1e, sino hasta que se les hicieron las observaciones respectivas. Quedó suficiente evidencia que los alumnos lograron convertir expresiones del lenguaje común al lenguaje cotidiano. Si se analiza la forma de cada una de las expresiones, se puede apreciar la naturalidad con que fueron redactadas, no como normalmente se acostumbra en los diferentes textos de álgebra, en especial se observa, la forma de indicar el producto y la forma de representar al doble de una cantidad cualquiera. Tres equipos representaron el doble de un número con la suma repetida y no por medio del producto con el número 2 (como en los incisos c y f del trabajo anterior).

Dos equipos aún no lograron aceptar la falta de clausura en sus expresiones, razón por la cual se les dificultó redactar algunas expresiones como en los reactivos 1c, 1e y 1h. En particular para representar “El triple de un número más el doble del mismo” el equipo 7 realizó lo siguiente:



En este trabajo se observa cómo el equipo necesitaba la respuesta de sumar tres veces un número y la respuesta de sumar dos veces el mismo número para luego continuar operando con dichas sumas (con los resultados). Al final el equipo no presentó una expresión sino una respuesta, que es la letra D. Se les siguió insistiendo que lo que se les ha estado pidiendo es una expresión por lo que no se necesita que lleguen a un resultado final.

El segundo objetivo de la guía consistía en iniciar a los alumnos en la interpretación de la variable como incógnita específica (en la categoría de Kücheman) al expresar relaciones numéricas usando el lenguaje algebraico. Los reactivos respectivos son los siguientes:

2. Si **D** representa el precio en lempiras de 5 grabadoras; representen usando únicamente la variable **D** el precio de

   a) 45 grabadoras
   b) una grabadora
   c) 5 docenas de grabadoras
   d) 3 grabadoras

En los reactivos 2a y 2c es donde no se presentaron mayores dificultades; se pudo presenciar que el Equipo 2 elaboró una estrategia adecuada y, era compartida por tres de sus integrantes a excepción de Mercid. En el video se observa como las compañeras de Mercid lograron convencerla con argumentos fuertes; Caroly le explicó: “*5 docenas equivalen a 60 grabadoras y como 5 valen D, hay que dividir 60 entre 5 que da 12; así que la expresión es 12·D*” esta estrategia la usaron también en el inciso a). Los equipos estaban concientes de que cada respuesta a la que llegaban tenía que ser compartida y comprendida por todos sus miembros por que en los debates grupales se seleccionaría uno al azar para exponer y defender el punto de vista de su equipo. Las dificultades se presentaron en los reactivos 2b y 2d que son los que consideran menos de 5 grabadoras. Las respuestas del Equipo 3 fueron de las más frecuentes

b) 1 grabadora D - 4 , d) 3 grabadoras D - 2

Este equipo argumentó que como D es el precio de 5 grabadoras, si se le resta 4 se obtiene el precio de una grabadora y, si se le resta 2 se obtiene el precio de 3. Luego, respondiendo preguntas alusivas al significado de la D y del 4 lograron reconocer que en la resta D – 4 del inciso b), la D representa dinero y el cuatro representa la cantidad de grabadoras por lo que la resta no tenía significado. Seguidamente el Equipo 1 presentó sus respuestas:

b.) $D \div 5$, d.) $D \cdot \frac{3}{5}$

Este equipo explicó "*como cinco grabadoras cuestan D, hay que dividir D entre 5 para saber el precio de una, y para saber el precio de 3 grabadoras, sólo se multiplica el resultado por 3*". Pese a que fue un razonamiento correcto y aprobado por el profesor no fue de mucha aceptación para el resto del grupo. Se les pidió que lo asimilaran o que trataran de buscar alternativas para ejercicios de esa naturaleza.

Los problemas 3 y 4 fueron resueltos sin ayuda con un 100% de exactitud; los problemas fueron los siguientes:

3. El conductor de un colegio hizo "n" viajes en un día, transportando 50 niños en cada viaje. ¿Cómo expresarían el número total de niños que transportó ese día?

4. El dueño de un negocio vende la misma cantidad de periódicos cada día, ¿cómo expresarían el número total de periódicos vendidos en dos semanas (14 días)?

El problema 3 fue respondido con la expresión "n · 50" por todos los equipos con la excepción del equipo 2 que fue el único, en esta ocasión, que no pudo dejar abierta su expresión; su respuesta fue: 3) = $n \cdot 50 = x$ x = número de niños De nuevo se observa la necesidad del equipo en llegar a una respuesta final; aunque esto no significa que el objetivo propuesto no se haya logrado pues el cambio de registro se realizó de manera correcta. Se trataba solo de un problema de forma en las respuestas y que se debía minimizar.

El Problema 4 tiene la particularidad que la cantidad desconocida (la cantidad de periódicos que se venden en un día) no está explícita; los 7 equipos escribieron expresiones como “J · 14” lo que indica que lograron reconocer la variable y la representaron mediante alguna letra. Es más con esto se evidencia que los alumnos aplicaron el concepto de variable como una cantidad desconocida, y se puede afirmar que reconocieron que las letras son solo representaciones de la variable. El equipo 6 fue más fino, en su repuesta

R// Llamemosle "p" a la cantidad de periódicos por día entonces se representaria: p · 14

El trabajo anterior refleja un buen grado de madurez del equipo para operar con cantidades desconocidas. Con las respuestas a este reactivo en especial, se puede argumentar que los estudiantes comenzaron a pensar algebraicamente.

El quinto problema es de la misma naturaleza que los tres anteriores

5. Traduzcan a lenguaje algebraico las frases e ideas siguientes:

   a) El precio de “**m**” discos a 760 lempiras cada uno.
   b) Lo que cuesta un lápiz si 15 cuestan **P** lempiras.
   c) El número que representa 50 unidades menos que el número “**h**”.
   d) El número que es la cuarta parte del número “**y**”.

El reactivo 5b fue el que provocó más discusiones al interior de los diferentes equipos, este reactivo es de la misma naturaleza que el 2b. La propuesta inicial de 4 equipos fue 15 ÷ P; lo que demuestra que esta vez reconocieron de inmediato la operación división; ningún equipo recurrió a la resta (P – 14) como sucedió anteriormente. El equipo 7 discutía porque no podían elegir entre 15 ÷ P y P ÷ 15; Moisés argumentó: “*Si dividimos 15 ÷ P obtenemos el precio de un lápiz, luego lo multiplicamos por un lápiz que es lo que nos están pidiendo*” Esto logró convencer a todo el equipo que lo correcto era 15 ÷ P.

En otros equipos se trabajó primero con casos particulares, suponiendo que los quince lápices costaron 60 lempiras, luego dividieron 60 ÷ 15; con esto reconocieron el procedimiento a

utilizar para obtener el precio de un lápiz y luego lo generalizaron para cualquier precio P. Comprobándose lo que dice Piaget que a esta edad "*los alumnos tienen la capacidad de usar enunciados verbales a nivel lógico; pero que a veces recurren al nivel de las operaciones concretas para comprender mejor una situación*" (citado por Woolfolk. Pág. 30)

En conclusión, en estas sesiones se observó un mejor desempeño de los estudiantes para cambiar la representación de expresiones del lenguaje común al lenguaje algebraico; consolidándose así el uso de la variable como un número general. También se evidenció inicios del uso de literales para representar cantidades desconocidas en expresiones abiertas.

Después de haber desarrollado dos guías de trabajo se realizaron reuniones grupales con una doble finalidad. Primeramente se les dio la oportunidad a los equipos para que expresaran lo que sentían sobre la forma cómo se había estado desarrollando la clase; 26 de los 29 alumnos estaban satisfechos con las actividades presentadas. Con los tres restantes el reto consistió en integrarlos más en las discusiones de equipo, pues, tenían buenos puntos de vista pero no los manifestaban o no se les daba la oportunidad en sus respectivos equipos. Se les pidió también que escribieran algunas conclusiones sobre lo realizado hasta el momento; el equipo 5 Expresó:

Conclusiones

- El lenguaje algebraico sirve o se utiliza para representar problemas de la vida cotidiana.
- Las operaciones básicas siempre están presentes en el lenguaje algebraico.

La segunda finalidad de estas reuniones grupales consistió en inducirlos en el uso de la terminología propia del álgebra (expresiones algebraicas, términos, variables, constantes) y en la forma convencional en que se escriben los términos (primero el número conocido luego el desconocido y sin necesidad de usar el punto o la cruz para representar al producto)

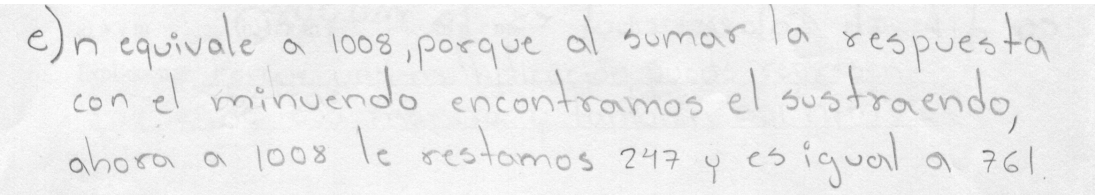
Reconociendo la equivalencia entre “n ·50” y “50n”, por ejemplo, se trató de que sus expresiones las redactaran en el formato convencional de los textos de álgebra y no en el formato natural que ellos habían venido utilizando.

Tercera Guía de Trabajo

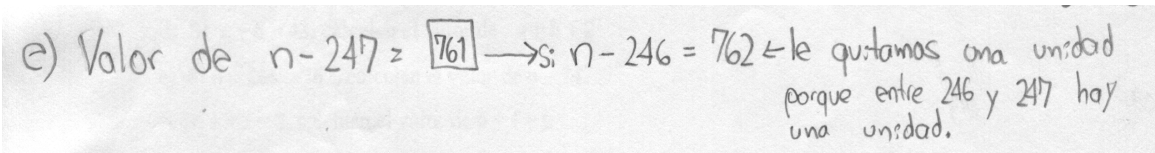
Con el objeto de que los alumnos calcularan el valor numérico de una expresión algebraica cuando la(s) variable(s) toma(n) un valor determinado; el 25 de julio se les entregó la tercera guía de trabajo. En ellas se les presentaron expresiones algebraicas con una, dos o tres variables y sus respectivos valores determinados. En el reactivo 2d, 2e y 2f (Vea Guía 3 de Anexos 2) se pretendió que las letras se consideraran como letras ignoradas en la categoría de Küchemann:

2. Desarrolle de manera clara lo que a continuación se le pide
   d) Si $a + b = 43$, calculen el valor de $a + b + 2$
   e) Si $n – 246 = 762$, calculen el valor de $n – 247$
   f) Si $e + f = 8$, calculen el valor de $e + f + g$

Socas afirma que es posible que en ocasiones las letras se interpreten en un nivel más bajo; esto sucedió con el reactivo 2e, donde 4 equipos interpretaron la letra en el nivel de “letras evaluadas” y no como se esperaba, a nivel de letras ignoradas. El equipo 1, al respecto escribió:


e) n equivale a 1008, porque al sumar la respuesta con el minuendo encontramos el sustraendo, ahora a 1008 le restamos 247 y es igual a 761.

Se ve que este equipo, al igual que los equipos 2, 3 y 7, eligió el camino más fácil: primero encontrar el valor de la incógnita en la condición y luego realizar la operación pedida. Aunque confundidas con los términos de la resta, las muchachas del equipo1 tenían claro qué hacer para determinar el valor de la incógnita. El verdadero sentido de letras ignoradas se lo dio el equipo 5 al plasmar su respuesta:


e) Valor de n - 247 = 761 → si n - 246 = 762 ← le quitamos una unidad porque entre 246 y 247 hay una unidad.

En esta respuesta el equipo ignora totalmente el valor que puede representar la letra y se enfoca más en las relaciones numéricas entre ambas expresiones para poder encontrar lo que se le pidió. Este análisis requiere de un nivel mayor de abstracción o de control para operar con la variable. Al final el equipo no expresó lo que en realidad hicieron, pues ellos explican "*le quitamos una unidad*" por afirmar "*le sumamos una unidad*"; aún así, el razonamiento es válido.

Con el desarrollo de estos reactivos se evidencia el hecho que no es necesario explicarles a los alumnos de forma mecánica los pasos para resolver una ecuación lineal sencilla, es más, estos términos y conceptos aún no se han desarrollado en el grupo. Como han tenido claro el significado de cada uno de los elementos que conforman la expresión algebraica, con mucha facilidad han determinado el valor de la(s) incógnita(s) en cada caso.

Con esta guía también se pretendió consolidar el concepto de la letra como un número general, para tal efecto se les entregó el reactivo 3 que se presenta a continuación:

3. ¿Será posible decir cuál de las siguientes cantidades es la menor o cuál es la mayor?

   p

   p + 7

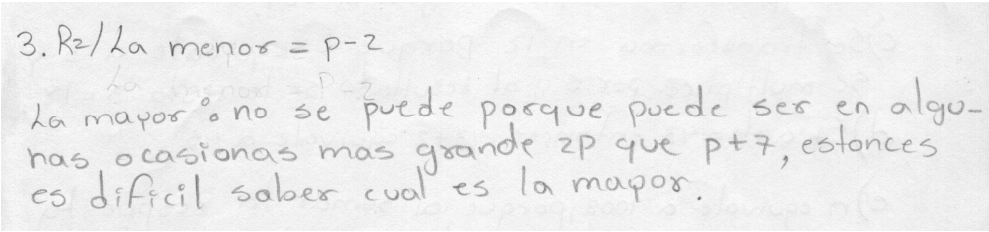
   p - 2

   2 p

Inicialmente, un equipo expresó que no era posible determinar ninguna de las dos cantidades solicitadas porque según ellos "*el valor de P puede variar mayor o menor*" Los equipos 6 y 7 determinaron únicamente que p – 2 es la cantidad menor por que "*aquí a p se le quita y la mayor no se puede determinar*" El equipo 2 se limitó a encontrar la cantidad mayor a lo que respondió "*no porque no se sabe el valor de P y, si suponemos que P = 4 entonces P + 7 = 11*

y 2P = 8; pero si P = 40 entonces 40 + 7 = 47 y 2P = 80" Con lo anterior queda claro que el equipo 2 reconoció que la cantidad mayor no se puede determinar ya que está en función del valor que tome la variable.

Los tres equipos restantes lograron determinar que la cantidad menor es P – 2 y que hay dos opciones para la mayor: 2p y p +7 entre ellos está el equipo 1 cuya opinión fue la siguiente:


3. R2/ La menor = p-2
La mayor no se puede porque puede ser en algu-
nas ocasionas mas grande 2P que p+7, estonces
es dificil saber cual es la mayor.

Se logró también filmar al equipo 4 mientras se decidían por la cantidad mayor (Vea protocolo 5 en Anexos 3). Parte de este protocolo se presenta a continuación:

Helen: En la mayor pueden haber dos cantidades iguales

Karla: La mayor puede ser 2P o P+7,… ¡digo yo!

Dania: Pueden ser iguales como vos decís, ¿qué tal si en ésta P fuera igual a 7? Entonces siete más siete catorce y dos por siete catorce.

Profesor: Entonces P+7 y 2P ¿cómo son?

Dania: Podrían ser iguales, ¡podrían!

Profesor: Y ¿Podría ser más grande 2P?

Dania: Depende de que número fuera

Bany: Porque si fuera cinco, cinco más siete doce y cinco por dos diez

Dania: – un poco desilusionada – ¡O sea que cambia!

Profesor: ¿O será que siempre es menor 2P que P + 7?

Dania: Pueden ser iguales o menor

Profesor: ¿Nunca mayor?

Karla: Porque si es siete, siete más siete catorce y dos por siete catorce

Dania: Y si es nueve, ¿nueve más siete?

Dania: y dos por nueve, dieciocho; ahí si es mayor

Profesor: Entonces 2P comparado con P + 7

Dania: Puede ser igual

Karla: Puede ser mayor

Dania: puede ser menor

Profesor: ¿De qué depende?

Dania: Del número

Profesor: Escriban lo que acabamos de discutir ahorita.

En esta discusión se refleja lo que manifiesta Santos 1997 "*un ambiente del aula como pequeñas comunidades matemáticas en donde los alumnos aprenden activamente utilizando un conocimiento y no pasivamente, recibiéndolo*" (Pág. 27) Las opiniones de unos son analizadas y cuestionadas por otros compañeros con argumentos matemáticos hasta que llegan a un acuerdo. No fue necesario hacerles saber que sus respuestas estaban incompletas; en dos ocasiones bastó una pregunta para que el equipo continuara reflexionando. Al final el equipo concluyó

3.- R/= Si es posible saber el menor entre este esta P-2 pero el mayor no ya que en P+7 y 2P depende del número para saber si es mayor, menor o igual.

En resumen, los seis equipos mostraron evidencia de haber comprendido en las expresiones algebraicas que se les presentaron las relaciones matemáticas presentes más que la generalidad de las mismas letras. En esa generalidad, identificaron condiciones para la validez de una determinada relación entre dos cantidades; sobresaliendo el hecho que consideraron sólo números naturales, ignorando la existencia de otro tipo de números.

Cuarta Guía de Trabajo[5]

[5] Tomada del Programa Interamericano de Capacitación de Maestros (México)

El 16 de agosto se le presentó a todo el grupo el siguiente “Acto de Magia”:

Piensen en un número natural específico, entre 0 y 10
Primeramente, súmenle a 50 ese número y escriban el resultado. No lo digan
Ahora réstenle a 50 el mismo número que pensaron; escriban este otro resultado.
Finalmente, sumen los dos resultados anteriores. La respuesta es 100

Posteriormente se les entregó la cuarta Guía de Trabajo (Vea Anexos 2) con la que se pretendía que los alumnos recurrieran al álgebra para representar y explicar situaciones de la vida diaria. El primer reactivo fue:

1. ¿Por qué es posible adivinar el número? ¿creen que es un simple truco?

Se trató que estas preguntas fueran respondidas a nivel de todo el grupo para unificar opiniones antes de pasar a los demás reactivos que son los que determinarían si los equipos estaban pensando algebraicamente o no. Parte de estas reflexiones (Vea Protocolo 6 en Anexos 3) se presenta a continuación:

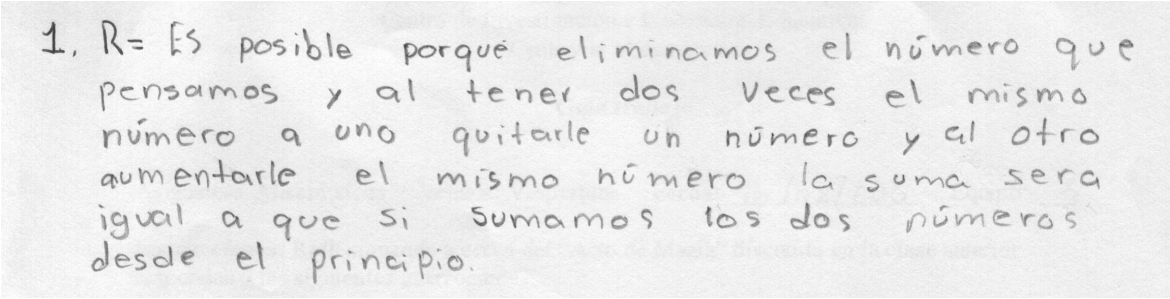
Mercid: Es que, lo que se le quita a uno se le pone al otro
Profesor: ¿Lo que a uno se le quita...?
Mercid: Se le pone al otro cincuenta, por ejemplo si a cincuenta le quitamos ocho quedan cuarenta y dos, pero si lo sumamos al otro cincuenta, quedan cincuenta y ocho
Luis Enrique: Es un truco porque se suma y se resta lo mismo
Profesor. ¿Y qué pasa si sumo y resto lo mismo?
Karla: Como si sólo hubiera sumado cincuenta más cincuenta
Dania: O sea, uno es positivo y el otro es negativo
Profesor: ¿Uno positivo…?
Dania: Uno es negativo, digamos menos siete, ¡ve!, menos siete y el otro más siete, eso se resta.

Se evidenció que los cuatro alumnos que participaron en esta discusión, en expresiones como “*lo que se le quita a uno se le pone al otro*”, “*se suma y se resta lo mismo*”, estaban

identificando la cantidad variable y, mentalmente fueron capaces de operar con dicha cantidad como si fuera un objeto (que es otra categoría de las letras). Cuando Luis Enrique afirmó que se trataba de un truco, en el fondo, estaba reconociendo que al sumarle y luego restarle una misma cantidad a un número no se le afectaba en nada.

Se observó que en estas dos últimas sesiones recurrieron a la aritmética más para ilustrar sus opiniones que para formular sus respuestas, lo que evidencia un avance en sus estructuras mentales, iniciando el "abandono" del pensamiento aritmético para pasar al algebraico.

Luego de la discusión se formaron los equipos para que trabajaran de forma independiente. La repuesta del equipo 3 para el reactivo 1 fue la siguiente:


1. R= Es posible porqué eliminamos el número que pensamos y al tener dos veces el mismo número a uno quitarle un número y al otro aumentarle el mismo número la suma sera igual a que si sumamos los dos números desde el principio.

De igual manera respondieron los demás equipos, indicando esto, que todos los equipos ya habían comprendido y explicado verbalmente lo que sucedía en el "acto de magia", el misterio estaba resuelto. Acto seguido se pasó, con el reactivo 2, a que expresaran dichas ideas algebraicamente.

2. Escriban una expresión que represente todo lo que sucede en el problema

Las respuestas por equipo se presentan en la siguiente tabla:

Cuadro No. 10
Respuestas por equipo para el reactivo 2 de la Guía 4

Equipo 1	$(x+50)+(50-x)=100$	Equipo 5	$(N+50)+(50-N)$

Equipo 2	$(x+50)+(50-x)$	Equipo 6	$(50+B)+(50-B)=100$
Equipo 3	$(50+y)+(50-y)=2\cdot 50$	Equipo 7	$\{X\in N / 0\leq X\leq 50 / 50+M / + / 50-M / = 100\}$
Equipo 4	$(x+50)+(50-x)$ 100		

Con las respuestas del cuadro anterior los equipos evidenciaron la habilidad con que recurrieron al álgebra para expresar las ideas que ya habían sido expuestas verbalmente. 5 equipos representaron completamente lo que estaba sucediendo en el acto de magia al asignarle el valor de 100 a toda la expresión. Se aclara que en este caso la expresión es cerrada, pues tiene como respuesta al 100 y así lo especificó el 71% de los equipos. El equipo 7, por tratar de dar una respuesta "más fina" cayó en un error al usar las letras X y M indistintamente, fuera de este problema "de forma" el contenido de su expresión es completo.

En otro momento se les pidió que analizaran el significado de la expresión (50 + y) + (50 – y) = 100; con la ayuda de la calculadora concluyeron que era válida no solo para números naturales entre 1 y 10 sino que vale para cualquier tipo de números (vea reactivo 3); ahora más conscientes de lo que implicaba la conjetura "vale para cualquier tipo de números"

Con el objeto de determinar si los equipos entendían porqué el resultado es 100, independientemente del número en que se piense, se les asignó el siguiente reactivo:

4. ¿Por qué la respuesta es 100?

Una de las respuestas a este reactivo se presenta en la siguiente discusión que forma parte del Protocolo 7:

Profesor: ¡pregunta! ¿Por qué da cien?

Karla: Porque este es cincuenta – señalando el número – si fuera sesenta diera ciento veinte, si fuera cuarenta diera ochenta

Profesor: Y teniendo esos cuatro términos ahí: x, más cincuenta, más cincuenta, menos x

¿cómo concluye usted que da cien?

Karla: Porque cualquier número sumado a cincuenta y después se le resta – pausa – da igual pues

Profesor: Alguien del grupo, ¿creen que hay alguna propiedad matemática por ahí y que nos permite que eso de cien.

Dania: La que, eeh, un número negativo con otro positivo se cancelan

Dania: Entonces como este número es positivo – señalando la x – y este es negativo – señalando la –x – se cancelan

En esta discusión, Karla identificó que el 50 es el número que permite que el resultado sea 100. Muy valioso el aporte de Dania que buscó argumentos matemáticos para demostrar que la respuesta es siempre 100. Al identificar la propiedad matemática que establece que al sumar dos cantidades opuestas estas se cancelan, y por esa razón canceló las equis de su expresión, Dania mostró un cambio en sus esquemas de pensamiento, pues pasó del contexto aritmético al algebraico. Al respecto Miguel explicó: "E*sto vale para todo tipo de números porque si primero se resta y después se suma el mismo número es como que esté sumándole cero*"

Con el desarrollo del reactivo 5, los equipos procedieron a modificar el problema (en la expresión) para que el resultado ya no sea cien sino otro número determinado. Por ejemplo para que fuera 40 el equipo 4 escribió $(A+20)+(20-A)$ y para que fuera 30 el equipo 6 escribió $(15+A)+(15-A)$. Evidenciándose así el control que los alumnos tenían sobre la expresión en general y sobre la variable en particular. Con este reactivo los alumnos descubrieron y utilizaron implícitamente una relación: El valor de la expresión algebraica equivale al doble del número que se considere constante en el acto de magia.

Para llevar la expresión a un mayor grado de generalidad se les asignó a los equipos lo siguiente:

6. Escriban una expresión que nos dé un resultado en general; no 30, 40, 80, 100, ni 200, si no un número cualquiera.

Se presentan a continuación un cuadro que resume las respuestas de los equipos

Cuadro No. 11
Respuestas por equipo para el reactivo 6 de la Guía 4

Equipo 1	$(A+C)+(C-A)=2C$	Equipo 5	$(x+y)+(y-x)$
Equipo 2	$(x+y)+(y-x)=2y$	Equipo 6	$(M/2+A)+(M/2-A)=M$
Equipo 3	$(x+y)+(x-y)=2x$	Equipo 7	$x \in N \; \lvert M \rvert R+S \rvert + \lvert R-S \rvert = D$
Equipo 4	$(\cancel{S}+C)+(C-\cancel{S})$ $2C$		

En el cuadro anterior se aprecia el nivel de generalidad que habían desarrollado los 7 equipos, unos con mayor facilidad de expresión que otros; es el caso del equipo 7 que de nuevo se complicó en la redacción de su respuesta; en ella se entiende que el número pensado está representado con la letra S. Se le tuvo que pedir al equipo que aclarara su respuesta quien expresó "*Si a M le sumamos cualquier número S y luego se lo restamos el resultado es D que significa cualquier número*". Se le preguntó también al equipo qué relación existía entre M y D, cosa que se les dificultó determinar.

Cinco equipos dieron muestra del salto en su pensamiento tomando como punto de partida las respuestas del reactivo 5, en donde el valor numérico de la expresión es determinado, para luego generalizar el razonamiento haciendo uso de las letras. Como en el reactivo 5 se dieron cuenta que el valor de la expresión es el doble del número constante del acto de magia, en las respuestas al reactivo 6 los equipos 1, 2, 3 y 4 generalizaron esa relación. La respuesta del equipo 6 es de mayor complejidad que las anteriores pues el razonamiento es inverso, pretendiendo que la suma sea cualquier número, como se les pidió, representaron dicha suma con una letra (la M), luego procedieron ha determinar una expresión adecuada para el número "constante" en el "acto de magia (M/2)".

En conclusión la actividad resultó ser bien productiva, espontáneamente los 7 equipos construyeron expresiones algebraicas para representar el "acto de magia" hasta llevarlo a la

forma más general posible. Nunca se perdió el control sobre la variable, reflejándose en 6 equipos un dominio pleno de las letras tanto como objetos matemáticos al igual que en el sentido de incógnitas específicas.

Quinta Guía de Trabajo

El 18 de agosto se inició una nueva sesión de trabajo cuyo objetivo central fue el de iniciar al grupo en el planteamiento de relaciones numéricas entre cantidades desconocidas a través del álgebra. Para tal efecto se les entregó la quinta guía de trabajo en donde inicialmente se les pidió:

1. Exprese la base y la altura de cualquier rectángulo en la que
   a) la base sea el doble de la altura
   b) la base exceda en 7 unidades a la altura
   c) la base sea igual a la altura
   d) la altura mida 12 unidades menos que la base
   e) la altura sea la tercera parte de la base

Cuatro equipos ilustraron con dibujos cada una de las relaciones involucradas, los otros tres sólo plantearon las expresiones que representaban dicha relación. El 97% de las respuestas presentadas estaban perfectas. Las dificultades (que fueron mínimas) se presentaron en el reactivo 1e en donde dos equipos no logaron expresar la relación respectiva; para el caso el equipo 7 representó con la letra K a la base y con la expresión $3 \div K$ a la altura; igual razonamiento presentó el equipo 2. Fue la tercera ocasión en que se presentaban en el aula razonamientos de esta naturaleza. Esto muestra que a ciertos alumnos se les estaba dificultando plantear expresiones para cantidades fraccionarias. Esto posiblemente se debió a que no habían comprendido totalmente el concepto de fracción.

Seguidamente se les presentó el quinto problema que se les había aplicado al primero de bachillerato en la prueba diagnóstica. Se recuerda en qué consistió:

2. Complete el siguiente cuadro de edades, suponiendo que actualmente Pedro tiene el doble de la edad que Sergio, Martha tiene ocho años más que Pedro y Tony tiene doce años menos que la suma de las edades de Martha y Sergio.

	Pedro	Tony	Martha	Sergio
Edad Actual				**X**
Edad dentro de una década				

Se recuerda además, que este problema fue el que más ignoraron los estudiantes de bachillerato, con un promedio de 23 respuestas en blanco por reactivo (cada celda de la tabla constituyó un reactivo); tal vez se debió a que en sus estructuras mentales no se provocó el desequilibrio necesario para que los procesos de asimilación y acomodación tuvieran cabida. Con la experiencia vivida hasta la fecha, este problema no presentó dificultad alguna en el octavo grado. A manera de ejemplo, el equipo 6 respondió de la siguiente forma:

	Pedro	Tony	Martha	Sergio
Edad Actual	2X	2X+8+X-12	2X + 8	X
Edad dentro de una década	2X+10	2X+8+X-12+10	2X+8+10	X+10

En ese trabajo se puede apreciar la precisión con que se establecieron todas las relaciones involucradas; todos los demás equipos lograron plantear las soluciones de manera exacta; evidenciándose así una evolución en el pensamiento de cada uno de los integrantes del grupo; sus esquemas mentales había aumentado y con ello el conocimiento se iba construyendo.

El equipo 5 presentó una diferencia significativa en sus reapuestas al expresar "la edad de Tony y la de Martha dentro de una década" con las expresiones $2x+8+x-2$ y $2x+18$ respectivamente. Iniciándose de esta manera en la simplificación de expresiones algebraicas de una manera natural.

Las respuestas de los equipos son producto de discusiones internas, a veces intervenida por el profesor. El protocolo 8 (Vea Anexos 3) refleja lo que pasó en el equipo 7 por haber representado "la edad dentro de una década de Pedro" con la expresión "12X" A continuación se presenta parte de este protocolo

Profesor: Doce equis… ¿por qué doce equis?

Káteryn: Porque una década tiene diez, y si se supone que es el doble de equis tendría que ser diez más dos equis, que es doce equis.

Profesor: ¿Es diez más dos o es diez más cuánto?, ¿diez más cuánto es?

Káteryn: Diez más el doble de equis

Marely: – Muy convencida – Diez más dos equis

Profesor: Y diez más dos equis ¿será lo mismo que doce equis?

Moisés: no

Profesor: Nada más que usted (Kateryn) cree que diez más dos equis es doce equis ¿Así creen los demás?

Káteryn: Si, yo si creo, se mira mejor aquí porque ya se mira doce por equis

Profesor: Doce equis significa… doce por equis

Káteryn: Entonces sería dos equis más diez porque es el doble de equis, no con las… doce de equis

Una tendencia común al simplificar expresiones algebraicas es sumar cantidades conocidas con cantidades desconocidas; esto fue lo que se le ocurrió inicialmente a Kateryn al suponer que 2X + 10 es 12X. Marely no pensó de esta manera, al contrario es ella quien propone como respuesta 10 + 2X., opinión que fue aceptada por el resto del equipo. Cuando recurre al significado de 12X, por si sola, Kateryn se da cuenta que estaba razonando mal. El desarrollo de actividades que utilizan letras con significado posiblemente haya contribuido a que Kateryn se haya auto corregido.

Lo que significó un gran desafió para todo el grupo fueron los reactivos 3 y 4. En especial el tercero que constituyó, en la categorización de Polya, un problema no rutinario, y una vez resuelto hace que el problema 4 se convierta en rutinario. En el problema 3 se les pidió:

3. Exprese la suma de cuatro números enteros consecutivos cualesquiera

La tendencia inicial de los 7 equipos fue la de utilizar una letra para cada número entero. El equipo 3 fue el primero en presentar su respuesta (A + B + C + D), explicaron que cada letra representaba a uno de los números pedidos. Se trataba de que en la expresión se utilizara sólo una letra, por lo que se generó la siguiente discusión; el resto de la discusión se presenta en el protocolo 9 en donde se pretendió inducir al equipo al uso de una sola letra.

Profesor: ¿Cuál será el segundo número si el primero se llama A? - Silencio-
Profesor: ¿Cómo son esos números?
Miguel: enteros consecutivos
Profesor: ¿Qué significa consecutivos? (elaboran otra propuesta: a + 2a + 3a + 4a)
Profesor: Explíquense
Miguel: Por que si a vale 1, 2a vale 2, 3a vale 3 y 4a vale 4 por lo que serían consecutivos.
Profesor: El problema es que no sabemos quien es A
Miguel: Pero ya decimos que a vale uno
Profesor: Pero esos son los consecutivos de uno nada más, ¿qué pasa si a vale cinco?, ¿funcionará para a igual a cinco esos números?
Miguel: Ahí ya no podemos
Profesor: Elaboren una expresión que funcione para cualquier número

Se puede apreciar la imposibilidad del equipo para llegar a una respuesta satisfactoria, no se han concentrado en la condición "enteros consecutivos" pareciera que no les deja ninguna información valiosa para establecer las relaciones necesarias. Sobresale la insistencia del equipo en llegar a una respuesta y que en ningún momento se dieron por vencidos.

El equipo 4 tenía la misma propuesta (A + B + C + D) más no estaban convencidos. Dania hace la observación: "*Como las letras son cualquier número, ¿qué pasa si A fuera uno y si B fuera cuatro?*" La observación es aceptable y refleja un buen razonamiento de esta alumna. Karla recurre a encontrar el consecutivo del número cinco y aclara que los obtuvo sumándole uno; dicho esto Dania explica: "*Entonces B es A más uno; C, A más dos…*" Dicho esto el equipo continuó trabajando sólo, hasta llegar a una respuesta aceptable, a saber:

$$a + (a+1) + (a+2) + (a+3)$$

a = 1er entero
a+1 = 2do entero
a+2 = 3er
a+3 = 4to

En el equipo 6, de igual manera respondieron (A + B + C + D); al conversar con Fernando sobre qué hacer para utilizar sólo una letra muy tranquilamente expresó "*Ah si, a más a, más a, más a*" Rápidamente reconoció que estaba sumando al mismo número. Se les sugirió que le llamaran A al primero y qué luego buscaran una forma para representar a los demás. ¿Quién es el segundo? se les preguntó; Diego meditó un poco y luego respondió "*a más uno*" argumentándose en el hecho de que eran consecutivos. Finalmente el equipo construyó una expresión adecuada.

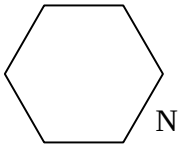
Discusiones similares se dieron en todos los equipos que por si solos no lograron llegar a la respuesta. A ningún equipo se les dijo lo que tenían que hacer, esto hizo que la actividad se extendiera por mucho tiempo; más ningún equipo solicitó ayuda directa. Esta actitud de esmero influyó para que los equipos llegaran hasta el final. Se identifican dos tipos de ayuda, unos equipos necesitaron regresar a la aritmética con casos particulares para luego realizar la generalización respectiva, a otros equipos les fue suficiente reflexionar sobre el significado del término "consecutivos" para formular la expresión pedida. Al final se logró que los equipos llegaran a un planteamiento correcto. Sólo el equipo 4 especificó, por escrito, el significado de las letras utilizadas, los demás equipos escribieron expresiones equivalentes a

$$b+(b+1)+(b+2)+(b+3)$$

En conclusión, se destaca la perseverancia de los equipos en sus trabajos; con una ayuda adecuada los equipos lograron vencer sus dificultades haciéndose sentir capaces de superar los retos. Para que el planteamiento de expresiones algebraicas sea efectiva se necesita que los estudiantes tengan claro el significado de las palabras del lenguaje común que se les presentan; de no ser así esto constituye un gran obstáculo en el cambio de registro.

Sexta Guía de Trabajo

El sexto instrumento está conformado por tres partes. Con la primera se pretendía incitar al grupo a la simplificación de expresiones algebraicas expresando perímetros de figuras geométricas. En esta parte se les recordó al inicio la definición de perímetro para que esto no provocara dificultades en el cambio de representación. La primera figura presentada fue el siguiente hexágono regular:



En la siguiente tabla se presentan las respuestas de 3 equipos:

Cuadro No. 12
Respuestas para el reactivo1 de la Sexta Guía, Primera Parte

Equipo 1	Equipo 3	Equipo 7
6 N N + N + N + N + N + N	R= N+N+N+N+N+N ó 6 N	6 N N+N+N+N+N+N

Se puede apreciar cómo estos equipos, sin decirles cuál es la regla, lograron simplificar la expresión algebraica que representa al perímetro del hexágono regular. Sus argumentos, "*Es una forma resumida de escribir lo mismo*". Evidenciándose así, en la teoría de Santos, que el grupo ha aprendido a sumar términos semejantes, pues habían sido capaces de construir sus conocimientos. Los cuatro equipos restantes presentaron sus respuestas ya simplificadas (6N); esto también evidencia que estos equipos construyeron la regla, implícitamente están indicando que la expresión "6N" es equivalente a "N + N + N + N + N + N" pues se trataba de representar la suma de los 6 lados del hexágono.

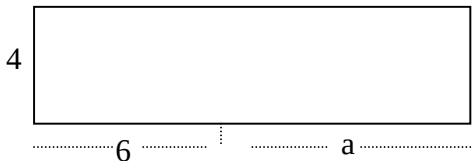
De igual naturaleza eran los reactivos 2C, 3 y 4 de esta primera parte (Vea Anexos 2) en donde las medidas de todos los lados de las figuras estaban indeterminadas. Los reactivos 3 y 4 no presentan ninguna figura ni se les sugiere el uso de ninguna literal; la instrucción fue abierta: "Encuentre el perímetro de un triángulo cualquiera y el de un triángulo isósceles"; cuatro equipos hicieron las representaciones respectivas, los demás presentaron de una sola vez las respuestas. Para el caso del triángulo isósceles las respuestas de tres equipos se presentan en la siguiente tabla:

Cuadro No. 13
Respuestas para el reactivo 4 de la Sexta Guía, Primera Parte

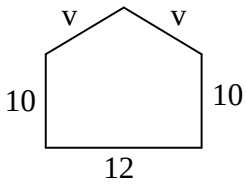
Equipo 4	Equipo 5	Equipo 6
2c+d	2D+G	2D+G

En el cuadro anterior se aprecia como estos equipos expresaron sus respuestas simplificando términos semejantes de forma natural; porque así lo hallaron lógico y no por que alguna regla así se los decía. Solamente los equipos 1 y 2 no lograron realizar la simplificación de sus expresiones, más hicieron una representación de triángulo, dando de esta manera el significado que merecía cada letra.

De naturaleza diferente eran los reactivos 2b y 2d, en ellos unos lados de la figura eran conocidos y otros desconocidos. Las figuras presentadas fueron:

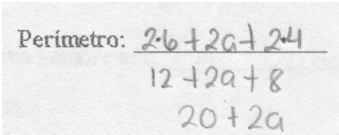
b) 

Perímetro: _____

d) 

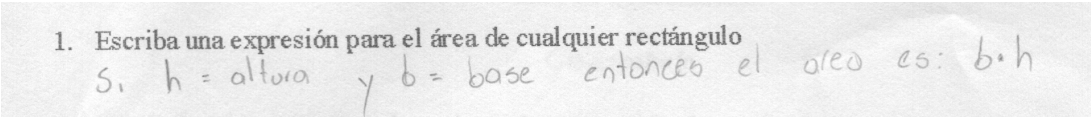
Perímetro: _____

Para la figura del inciso b) seis equipos concluyeron que el perímetro es 20 + 2a; la solución del equipo 4 fue la siguiente:



Evidenciándose la habilidad para simplificar expresiones separando términos semejantes. En ningún momento se les ocurrió a los estudiantes sumar letras con números, posiblemente se deba a que en estos casos las letras están contextualizadas y tienen un mensaje para los estudiantes; mensaje que es diferente al de los números conocidos. Los alumnos de primero bachillerato si cometieron este tipo de error (remítase al análisis de la prueba diagnóstica) y se supone que ellos ya tenían conocimientos avanzados de álgebra.

En la segunda parte se les pidió que escribieran expresiones para el área de ciertos rectángulos, sabiendo que es el producto de la base por la altura. Para el caso de un rectángulo en general (Vea reactivo 1) todos los equipos lo expresaron con el producto indicado de los letras (*ñ·ll a* = *b·h*, *A·M*, entre otros). El equipo 6 fue más claro en su respuesta al especificar qué es lo que representa cada una de las letras de su expresión:


1. Escriba una expresión para el área de cualquier rectángulo

Si h = altura y b = base entonces el area es: b·h

Para el caso de un cuadrado cualquiera las respuestas fueron las siguientes:

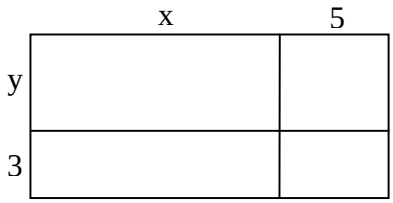
Cuadro No. 14
Respuestas para el reactivo 2 de la Sexta Guía, Segunda Parte

Equipo 2	Equipo 5	Equipo 7
$a = L^2$	ZZ	$Q.Q = Q^2$

Las tres respuestas anteriores son representativas de lo ocurrido en los equipos, unos que sólo expresaron el producto de una letra consigo misma, otros utilizaron la propiedad de las potencias para simplificar la expresión y un tercer caso que presentaron tanto la potencia como su equivalente, el producto indicado. Aquí se refleja la madurez de los alumnos al elegir la propiedad matemática adecuada al simplificar sus expresiones. Un equipo hizo la excepción al proponer de inicio b·b = 2b; al preguntárseles qué significaba 2b muy seguros respondieron "*dos por be*" luego se les preguntó si sería lo mismo "2·b" que "b·b" y de nuevo muy seguros respondieron que no. Estas preguntas los hicieron reflexionar hasta llegar a proponer que lo correcto debiera ser "b^{2}" Todos los equipos reconocieron, unos no de inmediato, que estos casos eran diferentes a las simplificaciones realizadas en la primera parte. El hecho de que los alumnos comprendían las operaciones presentes en una expresión algebraica pudo contribuir a que no se confundieran al momento de simplificarlas; que es un hecho común en alumnos del diversificado.

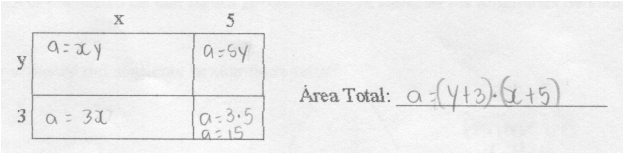
En los reactivos 3 y 4 se les presentaron figuras compuestas, algunas medidas eran conocidas y otras no; por ejemplo en el reactivo tres se les presentó:

1. Calcule el área de cada una de las cuatro regiones en que se divide el siguiente rectángulo

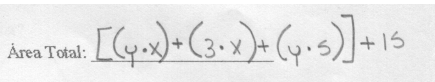


Área Total: _____

Los siete equipos representaron muy bien las cuatro áreas solicitadas sin presentarse ninguna dificultad. Fue necesario que aplicaran las propiedades geométricas presentes en esa figura para poder determinar cada una de las medidas involucradas; fue un ejercicio más mental para los alumnos y que lo tomaron como rompecabezas para descubrir las medidas que no estaban explícitas. A continuación se presenta la solución del equipo 4:



El área total de esta figura se puede representar de diferentes maneras; lo más común en el grupo fue el planteamiento que realizó el equipo 4, misma que fue planteada por 5 equipos más. La diferencia la hizo el equipo 1 al responder



Estas diferentes formas de expresar la misma área se pueden utilizar para ilustrar la multiplicación de algunas expresiones algebraicas, además se puede hacer énfasis en el uso adecuado de los paréntesis; en qué casos es obligatorio usarlos y en cuáles no. Ellos lo usaron por necesidad propia; debido a que cada expresión entre paréntesis tiene un significado muy particular pero para determinar la necesidad de los paréntesis en el lenguaje formal de las matemáticas se debe considerar la jerarquía de las operaciones. Vemos entonces que hay dos

criterios muy distintos y los alumnos deben de tomarlo en cuenta por lo convencional del lenguaje algebraico.

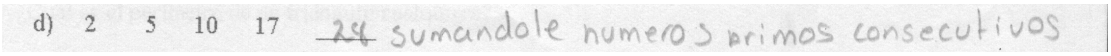
En la mayoría de las expresiones que han venido formulando los equipos, tanto en esta como en las sesiones anteriores, se observa que no se aclara lo que representan las letras que han estado utilizando. Cuando se les pide, ellos hacen la aclaración respectiva, de lo contrario no lo especifican. Esto le da debilidad a sus respuestas escritas ya que las letras aisladas de esta manera carecen de significado. Es por esa razón que se les exigió que en próximas sesiones expresaran por escrito lo que representa cada letra que utilicen en sus expresiones.

Con la tercera parte se perseguía diagnosticar la habilidad de los estudiantes para reconocer patrones numéricos los reactivos fueron:

Escriba en el espacio respectivo el número que hace falta

a)	17	23	29	35	_____
b)	50	39	28	17	_____
c)	12	13	15	18	_____
d)	2	5	10	17	_____

Las respuestas presentadas fueron satisfactorias, la discusión en equipo contribuyó a que todos reconocieran cada uno de los patrones. Tres equipos expresaron con el lenguaje normal el patrón en cada serie de números; a los demás se les tuvo que preguntar y lo explicaron verbalmente. En el inciso d) la respuesta esperada era 26 y así respondieron 6 equipos entre ellos el equipo 7 que explicó: "*comienza con 3, luego 5, luego 7, y después 9; son números impares*" De igual manera se explicaron los otros cinco equipos. La respuesta del equipo3 fue diferente, "28", su argumentación se presenta a continuación:


d) 2 5 10 17 ~~24~~ sumandole numeros primos consecutivos

Se observa que pese a que la respuesta no es la esperada, la explicación es convincente; en verdad a una misma sucesión de números le pueden corresponder diferentes patrones. La metodología abierta donde cada quien expone sus puntos de vista ha permitido que los equipos generen y defiendan posturas muy buenas y sobre todo bien argumentadas.

Con el desarrollo de esta tercera parte de la guía se sentaron las bases para que en nuevas sesiones se consideraran sucesiones donde las exigencias fueran mayores.

En síntesis, con el desarrollo de esta guía, quedó evidenciada la forma natural en que se iniciaron los alumnos en la simplificación de expresiones algebraicas tanto con términos semejantes como en la multiplicación de letras. Se evidenció también que los criterios para la simplificación fueron construidos por los mismos estudiantes haciendo uso de algunas propiedades aritméticas.

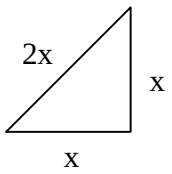
Séptima Guía de Trabajo

El 22 de agosto se les presentó la séptima guía con la que se tenía por objetivo que los alumnos utilizaran el álgebra para representar relaciones numéricas en figuras geométricas; en esta guía se les presentó un solo problema que se presenta a continuación:

> **Problema:** Encuentre el perímetro de un triángulo rectángulo isósceles cualquiera, utilizando sólo una variable.

El equipo 3 comenzó afirmando "*Es imposible encontrar el perímetro del triángulo porque no sabemos sus medidas*"; este equipo interpretó que con la instrucción "Encuentre" se les pedía una respuesta numérica; para que continuaran trabajando fue necesario aclararles que debían entonces formular una expresión. Inmediatamente José Manuel preguntó si podía utilizar "Pitágoras" Esta pregunta el profesor la contestó con otra pregunta: ¿Por qué?, misma que fue respondida por Miguel, otro integrante del equipo, quien expresó: "*Como es un triángulo rectángulo creemos que podemos utilizar el teorema de Pitágoras*". Dicho esto el equipo comenzó a construir la expresión.

Se observó al equipo 7 llegando a sus primeras conclusiones y cuya discusión fue intervenida por el profesor. Este equipo había elaborado un dibujo como el siguiente:



A continuación la discusión al interior del equipo

Káteryn: Entonces, si es un triángulo rectángulo isósceles dos lados son iguales, y la hipotenusa…

Moisés: Es la suma de los catetos

Káteryn: Por ejemplo, aquí a los catetos les pusimos equis y equis y a la hipotenusa dos equis

Profesor: ¿Están seguros de que eso va a dar la hipotenusa? Le pido al equipo que revisen bien esa parte de la hipotenusa. ¡Que todos opinen a ver!

Moisés: Yo estoy de acuerdo profesor

Káteryn: Si profe, la hipotenusa es la suma de los catetos, – pausa – bueno, el profesor eso nos decía

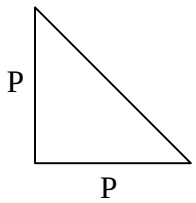
Profesor: verifiquen

Se observa que este equipo realizó la representación de acuerdo a sus esquemas mentales; el dibujo y las relaciones allí presentes reflejan fielmente el pensar del equipo. Lastimosamente se estaban basando en una concepción errónea "La hipotenusa es la suma de los catetos". Esto revela los múltiples factores que inciden en la efectividad de las representaciones algebraicas de expresiones dadas en el lenguaje normal. A la condición de ser triángulo isósceles, este equipo, si le sacó el provecho respectivo al representar a los dos catetos con la misma letra.

El equipo 6 elaboró la siguiente expresión: A + A + $\sqrt{A}$; Fernando Explica "*Como es isósceles tiene dos lados iguales y por ser rectángulo la hipotenusa mide* $\sqrt{A}$*"* Al igual que el equipo 7, no pudieron aplicar correctamente el teorema de Pitágoras. Al pedirles que recordaran bien el teorema, se reunió nuevamente el equipo y presentó su segunda propuesta: A + A + $\sqrt{A+A}$

En esta ocasión sus argumentos fueron "*Como para le hipotenusa se suman los catetos y se le saca raíz cuadrada*" De nuevo el equipo 6 no estaba utilizando el teorema de Pitágoras de forma correcta.

En vista que ningún alumno de ningún equipo recordaba a cabalidad del teorema de Pitágoras, se les pidió lo investigaran para luego terminar el problema asignado. Fue así que Luis, integrante del equipo 5, expone ante todo el grupo su respuesta



P = dos lados iguales

$$\left(\sqrt{p^2 + p^2}\right) + p + p$$

En el video se aprecia como Luis interpretó cada elemento de su respuesta. Al preguntarle a todo el grupo "*¿Por qué no puede ser igual un cateto con la hipotenusa?*" un alumno respondió: "*Dejaría de ser hipotenusa*"; seguidamente Luis respondió: "*La hipotenusa ya no mediría más que el cateto*" Las preguntas anteriores se plantearon para determinar si la ubicación de las relaciones en el dibujo se realizó al azar o como producto de una reflexión. Las respuestas dan evidencia de la seguridad con que Luis elaboró su respuesta la que fue aceptada por los demás alumnos.

En conclusión, con esta actividad se evidenció la facilidad con que los equipos representaron sus pensamientos con el lenguaje algebraico. Los siete equipos aplicaron el concepto de triángulo isósceles y reconocieron por si solos que debían utilizar el Teorema de Pitágoras. Se presentaron obstáculos, no en el cambio de registro sino por el olvido de uno de los teoremas que habían estudiado a inicio del año.

Octava Guía de trabajo

Otra de las habilidades de pensamiento algebraico que, según el NCTM, se debe desarrollar en el transcurso de la educación básica es la capacidad para reconocer, describir y generalizar patrones numéricos. En realidad reconocer y describir patrones numéricos es una habilidad general de las matemáticas, sólo la de generalizar dichos patrones es una habilidad propia del

álgebra. Para tal efecto el 24 de agosto se les entregó la **Primera Parte** de la octava guía (Vea Anexos 2) en la cual se les presentó la siguiente situación:

1. Observen cuidadosamente las tres figuras que se le presentan a continuación:

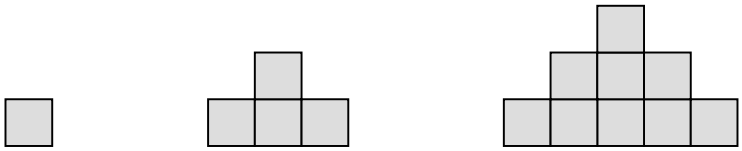


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

2. ¿Cuántos cuadrados tiene cada figura?
3. Representen la figura 4 de ese tipo ¿Cuántos cuadrados tiene?
4. ¿Cuántos cuadrados tiene la figura 5?

Con las respuestas a los reactivos 3 y 4 se evidencia que reconocieron el patrón geométrico pues todos los equipos realizaron las representaciones respectivas. Este patrón geométrico lleva asociado un patrón numérico que es el que debió ser identificado especialmente para completar el cuadro del reactivo 6. La respuesta del equipo 2 para este reactivo fue la siguiente:

Número de la Figura	Total de cuadros en la figura
7	49
9	81
15	225
29	841
53	2809

Para afirmar que en verdad habían reconocido el patrón se les pidió en el reactivo 8 que explicaran con palabras la forma cómo encontraron esos números. Este mismo equipo escribió:

8. Expliquen con palabras cómo se puede determinar el total de cuadros de cualquier figura, como las anteriores, si conocemos el número de la figura.
se multiplica el número de la figura por si mismo

Igual respuesta presentaron los equipos 1, 2, 3 y 5; los equipos 4 y 7 expresaron "*Se eleva al cuadrado el número conocido*"; al equipo 6 se le tuvo que sugerir que buscara un método más

preciso pues ellos proponían "*buscamos primero la base de la figura sumándole comenzando con 1 y sumándole 2; luego realizamos la suma respectiva*". El procedimiento descrito anteriormente demuestra que este equipo nunca abandonó el patrón geométrico por lo que su respuesta inicial no fue tan eficaz como la de los demás equipos. Teniéndose evidencia que el patrón había sido reconocido se pasó al reactivo 9 en el que se les pidió que construyeran alguna expresión algebraica para la respuesta del numeral 8.

Las diferentes respuestas para este reactivo se presentan en la siguiente tabla:

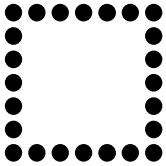
Cuadro No. 15
Respuestas para el reactivo 8 de la Octava Guía, Primera Parte

Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
(figM)(M) ó (M)(M)	x^2 x= cualquier número	y= número de figuras x= número de cuadritos $x=y^2$

Primeramente, el equipo 1, en su expresión asume que "Fig M" es equivalente a "M"; realizó esto debido a la necesidad de indicar en su expresión el significado de la letra que están utilizando. Apoyándose en la expresión alternativa que ellos mismos propusieron "(M) (M)" se determinó la forma correcta de redactarla. El equipo 2 escribió una expresión adecuada al problema aunque la aclaración del significado de la letra no fue específica. El equipo 3 utilizó en su respuesta dos letras con lo que elaboró una expresión perfecta; en ella se manifiesta el sentido completo de variabilidad que en la categoría de Küchemann es el nivel más alto de comprensión.

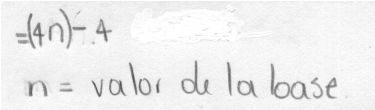
El 30 de agosto se les presentó la **Segunda Parte** de esta guía, la que se conformó por dos secuencias de figuras cada una con la misma estructura que la de la primera parte.

1. Observe la cantidad total de puntos que hay en el siguiente "cuadrado" en cuya base hay 7 puntos



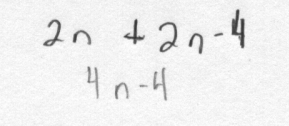
a. En total, ¿cuántos puntos hay en la figura anterior?
b. ¿Cuántos puntos hay en un “cuadrado” de **5** puntos en la base?
c. ¿Cuántos puntos hay en un “cuadrado” de **10** puntos en la base?
d. ¿Cuántos puntos hay en un “cuadrado” de **n** puntos en la base?

En este problema hay dos equipos, entre ellos el equipo 1, se les dificultó responder el inciso a), que pese a tratarse de un simple proceso de conteo, respondieron 28 puntos; justificándose en el hecho que “*siete por cuatro es 28*”. Este método propuesto no resultó efectivo, y además, los llevó a un modelo erróneo para el reactivo 1d (“4n”). En verdad tenían que analizar más el dibujo para darse cuenta que no es suficiente con multiplicar la cantidad de puntos en la base por cuatro. Después de analizar profundamente el problema el equipo 1 respondió:

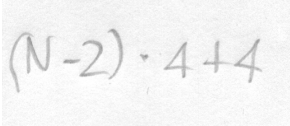


Respuesta que fue compartida por cuatro equipos más, el equipo 7 argumentó por escrito “*porque a cada lado se le quita un punto*” con esto se evidencia que el patrón numérico fue reconocido y la representación algebraica responde a dicho patrón. Se presentaron además tres respuestas diferentes a la anterior. Estas respuestas se presentan a continuación:

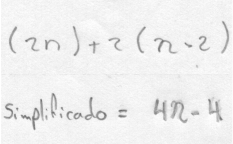
Equipo 6



Equipo 5



Equipo 3



Los trabajos anteriores muestran la independencia con trabajaron los equipos ya que en reactivos que permiten muchas representaciones cada uno propuso la suya, aquella que se adaptó a su forma de pensar. Cada representación corresponde con el procedimiento que el equipo utilizó para responder el reactivo 2a. Algunos equipos como el 3 y el 6 presentaron evidencia de haber desarrollado la habilidad de simplificar expresiones algebraicas sin necesidad de que se les pida.

Se recuerda que este reactivo formó parte también de la prueba diagnóstica donde sólo el 14% de los alumnos escribieron una expresión adecuada.

El 31 de agosto se les presentó la **Tercera Parte** de la guía cuya situación fue:

1. Observen cuidadosamente las tres figuras que se le presentan a continuación:

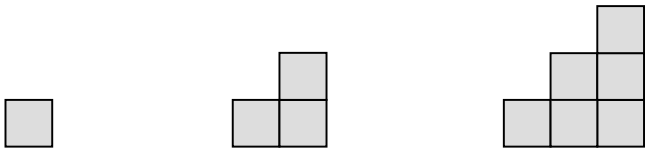


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

2. ¿Cuántos cuadrados tiene cada figura?
3. Representen la figura 4 de ese mismo tipo ¿Cuántos cuadrados tiene?
4. ¿Cuántos cuadrados tiene la figura 5?

Cos estos reactivos se logró que los equipos reconocieran sobre todo el patrón geométrico, cosa que fue relativamente fácil para ellos; no así el patrón numérico que era indispensable para el reactivo 5 en el que se pedía la cantidad de cuadros para la figura 1000. Este reactivo no podía (por razones de costo) resolverse geométricamente, pero el patrón aritmético no era tan fácil determinarlo. En vista que todos los equipos no podían encontrar dicho patrón, se les pidió que completaran la tabla del reactivo 6, del cual podrían sacar algún provecho; en ella se presentaron figuras de menor tamaño. El equipo 4 la completó de la siguiente manera:

Número de la Figura	Total de cuadros en la figura
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36
9	45
10	55

Auxiliándose en la tabla, el equipo 4 realizó una propuesta para la figura 1000, ésta ya había sido analizada al interior del equipo 6; la propuesta se explica en el protocolo 11 que se detalla a continuación:

Bany: Mil entre diez es cien, y lo multiplicamos por cincuenta y cinco porque como cabe diez veces

Profesor: ¿Y qué dicen los demás integrantes del equipo?, ¿les parece esa idea?

Dania: Si

Profesor: Otro grupo propuso lo mismo y se les pidió que verificaran si esa regla se cumple en el cuatro. Usen esa regla para ver la figura ocho. ¡A ver!; conociendo la figura cuatro usen esa regla para la figura ocho a ver si se cumple

Dania: No se cumple

Karla: ¿Por qué?

Dania: Porque en una da diez y en la otra da…

En el protocolo anterior se observa cómo el equipo piensa que la regla de tres puede dar la solución al problema, más, al pedirles que la verificaran en los datos de la tabla se dieron cuenta que no era aplicable. En total, cuatro equipos propusieron usar la regla de tres par la figura 1000 pero, igual que el equipo 4, concluyeron que no era lo correcto. Con esto se evidencia la importancia de la cuarta etapa de la resolución de problemas propuesta por Polya, la visión retrospectiva, que como él explica, es una etapa que normalmente los alumnos, aún los mejores, la omiten.

Esta tabla contribuyó a que los equipos identificaran un patrón numérico; en el video se aprecia el modelo iterativo propuesto por los equipos 1, 2 y 4 que equivale a "*El total de cuadrados se obtiene sumando el número de la figura con los cuadrados de la figura anterior*" Por ser iterativo este métodos tampoco era eficaz. Diego preguntó *¿Profesor, hay algún método para sumar los números del uno al mil?* Esta interrogante refleja que Diego había encontrado un método no iterativo pero igual de costoso; este método es el que Kateryn propuso al grupo explícitamente "*Se suman los números desde el uno hasta la figura que*

queramos". En este momento los equipos analizaron, verificaron y se apropiaron de dicha propuesta. Esa suma es la clásica de Gauss: $\sum_{i=1}^{n} i$.

El método conocido hasta el momento (la sumatoria) no es tan efectivo para figuras de tamaños muy grandes. Se necesitaba entonces un camino más corto para determinar dicha suma. En este momento con la pregunta de Diego se hizo un replanteamiento del problema ¿Cómo podemos encontrar la suma de los números del 1 al 1000 sin necesidad de realizar la suma? Dado que todos los equipos habían completado la tabla del reactivo 6 de manera correcta, se les pidió que analizaran el comportamiento de dicha tabla para buscar algún método general para determinar la suma en cuestión.

En la siguiente sesión de trabajo el equipo 7 presentó una propuesta que se detalla en el protocolo 12 (Vea Anexos 3). Gran parte de este protocolo se presenta a continuación:

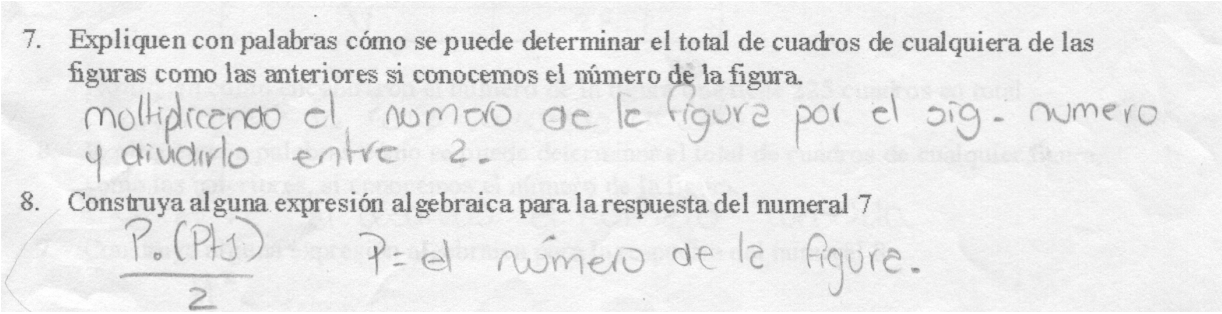
Káteryn: Da, por ejemplo, nueve por diez entre dos
Juan: Da cuarenta y cinco
Marely: Y ocho por siete es igual a cincuenta y seis, entre dos da veintiocho
Profesor: Y eso, ¿se cumple en toda la tabla?
Equipo: Si
Profesor: ¿Cuál sería su posible respuesta para la figura mil?
Káteryn: Novecientos noventa y nueve por mil, entre…
Juan: Es que se multiplica por un número de la figura más; sería mil por…, no por novecientos noventa y nueve!
Marely: Es por la figura que sigue
Marely y Juan: – simultáneamente – quinientos mil quinientos
Profesor: ¿Cuánto?
Marely y Juan: – sonrientes – quinientos mil quinientos
Profesor: ¿Es mil por mil uno o, mil por novecientos noventa y nueve?
Marely: Por mil uno
Profesor: ¿Se multiplica por el anterior o por el que sigue?

Equipo: por el que sigue

Profesor: ¿En todos los casos?

Equipo: Si

En el protocolo, se puede observar como la tabla le fue de gran utilidad al equipo 7 para buscar el método alternativo. Hasta este momento el equipo 7 ya había comprendido el método y lo podía explicar en el lenguaje normal; faltaba dar el último paso, expresar el método en el lenguaje algebraico y con esto responder todos los reactivos de la guía. Las últimas preguntas del profesor, en el protocolo, indujeron al equipo a que redactara una expresión algebraica adecuada. A continuación, las respuestas finales del equipo 7 que fue el único que logró llegar hasta el final; el resto del grupo le pidió al equipo que explicara sus respuestas:

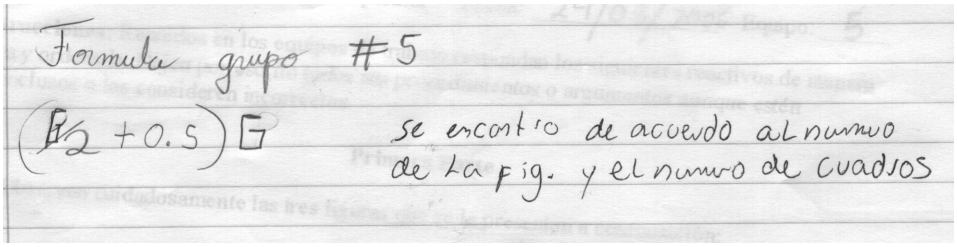

7. Expliquen con palabras cómo se puede determinar el total de cuadros de cualquiera de las figuras como las anteriores si conocemos el número de la figura.

multiplicando el numero de la figura por el sig. numero y dividirlo entre 2.

8. Construya alguna expresión algebraica para la respuesta del numeral 7

$\frac{P.(P+1)}{2}$ P= el número de la figura.

Habilidad muy particular fue la que evidenció Raúl, un integrante del equipo 5, al proponer para el reactivo 8 la siguiente expresión:


Formula grupo #5

$(P/2 + 0.5)$ G se encontro de acuerdo al numero de la fig. y el numero de cuadros

En el video se aprecia que Raúl no tenía una explicación lógica para su respuesta, explicó: "*equis representa el número de la figura y toda la expresión representa la cantidad de cuadros de la figura*" verificó que funcionaba para todos los casos de la tabla y además

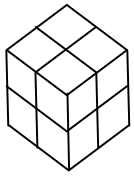
calculó 500,500 cuadrados para la figura mil. El resto del grupo quería saber qué significaba el 0.5 de la expresión a lo que Raúl muy sonriente respondió: "*La verdad que yo no sé profesor, producto de mis loqueras mentales*" En la situación anterior sobresalen dos aspectos importantes, primero la actitud del grupo que aún sabiendo que el modelo de Raúl era funcional querían comprender el porqué de la expresión o las razones que llevaron a que Raúl la construyera; un segundo aspecto es que ese modelo no es nada fácil de reconocer, es más fruto de una inspiración y de lucidez mental, a lo que el mismo Raúl llamó "*Loquera Mental*"

En conclusión, con el desarrollo de esta tercera guía se reflejó mayor dominio y seguridad por parte de los equipos al generalizar los patrones numéricos una vez que estos habían sido reconocidos y explicados. La gran dificultad que se presentó fue en reconocer uno de los cuatro patrones numéricos presentados; pero igual, una vez reconocido por uno de los equipos la representación algebraica no ocasionó ninguna dificultad. Se verificó también lo que afirma Duval "La información de un objeto está en función del registro que lo represente"; especialmente en la tercera parte donde el registro tabular fue el que brindó mejor información para resolver el problema.

Novena Guía de Trabajo[6]

Con el objeto de identificar y generalizar patrones numéricos de mayor complejidad, el 2 de septiembre se les presentó a los equipos la siguiente situación:

1. Observen detenidamente la siguiente figura que representa un cubo de arista 2 unidades



   a. ¿Cuántos "cubos pequeños" forman el cubo más grande?

[6] Tomado del libro Iniciación al Álgebra, Martín Manuel Socas

De inicio se les dificultó a los siete equipos imaginarse el sólido en tres dimensiones, fue debido a esto que en el reactivo 1a, contestaron "*7 caras*", pues son las que están visibles en la figura. El tipo de registro utilizado para representar al cubo no proporcionó la información que pudo haber brindado un cubo en tres dimensiones. Verificándose así que cada sistema de representación proporciona un contenido diferente del objeto que representa. Fue hasta que los siete equipos habían comprendido de qué objeto se trataba que se pasó al siguiente reactivo:

2. Si se sumerge completamente el cubo grande en un recipiente con pintura:
   a. ¿Cuántos "cubos pequeños" quedarían con 4 caras pintadas?
   b. ¿Cuántos "cubos pequeños" quedarían con 3 caras pintadas?
   c. ¿Cuántos solamente con dos caras?
   d. ¿Cuántos solamente con una cara?
   e. ¿Cuántos con ninguna?
   f. ¿Cuál es la suma de las respuestas dadas en los apartados anteriores?

Hasta el momento los equipos estaban preparándose para la etapa del reconocimiento del patrón; el cual se fue definiendo con el reactivo 4. En este reactivo se consideraron los mismos incisos del numeral 2, en cubos de arista 3, 4 y 5. Las respectivas respuestas se iban registrando en una tabla como la siguiente:

Distribución de cubitos según caras pintadas, por dimensiones

Longitud de la arista	Número de Caras Pintadas					Número total de "cubitos"
	0	1	2	3	4	
2						
3						
4						
5						
6						
7						
n						

Cada columna del cuerpo de la tabla lleva consigo un patrón numérico que primeramente debe reconocerse y después generalizarse para un cubo de arista ***n***. Con base en los trabajos presentados por los equipos se puede afirmar que todos completaron la tabla de manera correcta hasta el cubo de 7 unidades de longitud. El trabajo del equipo 3 fue el siguiente:

Dimensiones del cubo	Número de Caras Pintadas					Número total de "cubitos"
	0	1	2	3	4	
2	0	0	0	8	0	8
3	1	6	12	8	0	27
4	8	24	24	8	0	64
5	27	54	36	8	0	125
6	64	96	48	8	0	216
7	125	150	60	8	0	343

Dado que la ayuda visual estaba disponible hasta para el cubo de longitud 5, los equipos se hallaron en la necesidad de buscar algún patrón para los cubos de dimensiones 6 y 7. Todos los equipos identificaron alguna regla para completar cada columna de la tabla; en su mayoría fueron modelos iterativos. Por ejemplo, para el caso de cubos con 2 caras pintadas, el equipo 7 identificó el siguiente modelo:

$2 = x + 12$

$x =$ resultado del cubo anterior de n.

El modelo anterior es funcional y el mensaje es completo, se aclara que en este modelo la expresión "2 = x + 12" está escrito en la forma natural de los alumnos; posteriormente se realizó un proceso de conversión al lenguaje algebraico. Se esperaba una regla en función de ***n*** pero este equipo presentó algo diferente, no significa esto que su respuesta estuvo mala, mucho menos que el equipo no haya logrado el objetivo. A demás de la regla anterior el equipo 7 logró reconocer el modelo para la última columna que se refiere al total de cubitos. Su expresión fue "n^3"

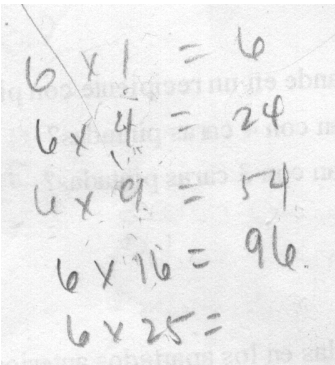
Cada columna de la tabla presenta su propio grado de dificultad; las que se refieren a 3 y a 4 caras pintadas tienen un comportamiento constante por lo que su generalización fue trivial. No todos los equipos encontraron todos los modelos pedidos; la siguiente tabla resume la cantidad de aciertos por cada modelo:

Cuadro No. 16
Distribución de aciertos por modelo para el Reactivo 5, Guía 9

Modelos Para →	Número de Caras Pintadas					Número total de "cubitos"
	0	1	2	3	4	

Representación típica	$(n-2)^3$	$(N-2)^2 \cdot 6$	$12(n-2)$	8	0	n^3
% de Aciertos	71	14	100	100	100	100

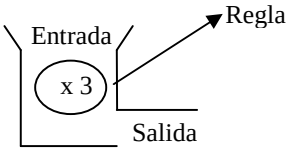
Los resultados anteriores muestran lo productiva que estuvo la actividad, se observan dos modelos no triviales que fueron construidos por todos los equipos y fueron los primeros modelos que se comenzaron a elaborar. La actividad fue agotadora desde el inicio con la comprensión del problema hasta el final. En el video se pude apreciar a todos los equipo de pie tratando de generalizar los patrones para cero y una cara pintada, que fueron los que presentaron mayor grado de dificultad. Se les dio la opción de que entregaran sus trabajos para continuar el siguiente día, cosa que ningún equipo aceptó. El equipo 5 fue el único que logró hacer todas las generalizaciones aún la que corresponde a una cara pintada cuya sucesión de términos es: 0, 6, 24, 54, 96, 150,… El registro tabular no ayudó mucho para lograr la generalización respectiva; si los equipos no hubieran abandonado el origen geométrico de esos números tal vez se hubiera tenido más éxito; pues son consecuencia de cuadrados que se forman en cada cara del cubo, es decir, del producto de 6 por el cuadrado de un número. El equipo 2 reconoció el proceso anteriormente explicado pero no lo pudo generalizar; su trabajo fue el siguiente:



Décima Guía de Trabajo

El 11 de octubre se les entregó a los equipos la décima guía de trabajo con la que se pretendía iniciar al grupo en el concepto de relación o correspondencia, para tal efecto se diseñaron tres problemas con diferente grado de dificultad. El primero consistió en:

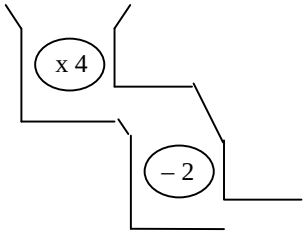
1. En la siguiente “máquina” entran números reales y salen números reales considerando una regla específica. En la tabla de la izquierda se ven las salidas de algunos números. Su trabajo consiste en completar la tabla



Entrada	-10	0	20	$\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}$	M
Salida	-30	0	60			

En este problema la salida esta relacionada con la entrada mediante la relación: “salida = 3·(entrada)”; se asignó con el objeto de familiarizar a los equipos con el funcionamiento de este tipo de “máquinas”. Una vez comprendido dicho funcionamiento, el proceso de resolución del problema es, y así lo fue, relativamente fácil. Seguidamente se les presentó la segunda “máquina”.

2. Considerando la siguiente máquina:



Entrada	-25	3.7	$2\sqrt[3]{5}$	10	$\frac{5}{2}$	$-4\frac{2}{7}$
Salida						

a. Completen la tabla respectiva
b. Escriban una expresión para la salida de un número cualquiera que entre en la máquina

El reactivo 1a es de carácter puramente algebraico, sirvió más que todo para analizar el proceso de esta nueva “máquina” que realiza dos operaciones antes de dar la “salida”. En estos dos primeros problemas se trató también de presentar números de diferentes tipos para reforzar el alcance de la expresión “un número cualquiera”. En el reactivo 2b los equipos debían de generalizar el funcionamiento de la “máquina” para cualquier número. Algunas de las respuestas para este reactivo se presentan en la siguiente tabla:

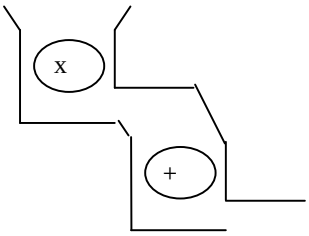
Cuadro No. 17
Respuestas para el reactivo 2B de la Décima Guía

Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	Equipo 4
4n-2	(4M)-2.	4m-2	4m-2

Las respuestas anteriores dan muestra que los equipos fueron capaces de generalizar los procesos con mucha precisión; sus respuestas inmediatas son más homogéneas y responden cada vez más al formato estándar y convencional que se utiliza en álgebra. Un aspecto importante en el proceso de comunicación de las ideas algebraicas es la especificación de lo que representa la variable. En todo el proceso se les ha insistido a los equipos al respecto mas solo dos, de los siete, explicaron por escrito que la letra representaba a cualquier número que entre en la "máquina" lo que demuestra la renuencia innata de los alumnos para este tipo de actividad.

En la tercera máquina la regla se les presentó de manera implícita en la tabla de entradas y salidas. Se les sugirió las dos operaciones involucradas con el objeto de que reconocieran la regla y luego la aplicaran en el caso general. El problema es el siguiente:

3. Analicen la tabla que presenta las entradas a la "máquina" con sus respectiva salidas



Entrada	1	2	7	0	-5	-10
Salida	5	7	17	3	-7	-17

a. Escriban en la "máquina la regla respectiva"
b. Escriban una expresión para la salida de un número cualquiera que entre en la máquina

Los siete equipos, sin mayores dificultades, lograron reconocer la regla que regía la tabla (x 2 + 3); en la mayoría de los equipos se construyó por ensayo error. Con mucha seguridad y

rapidez determinaron la expresión general para el proceso de la “máquina”; entre estas expresiones están:

Cuadro No. 18
Respuestas para el reactivo 3B de la Décima Guía

Equipo 5	Equipo 6	Equipo 7
(M*2)+3	2 Z) + 3 Z es un número cualquiera que entre a la maquina	2 F + 3

En esta ocasión, los siete equipos explicaron por escrito lo que representaba la letra en su expresión; sobresale la del equipo 6 por ser una explicación completa. Los otros equipos escribieron que su letra “*representa a cualquier número*”.

Dado que se habían estado presentando suficientes evidencias del desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes, sobre todo en lo que concierne a la construcción de expresiones algebraicas ya sea de situaciones de la vida diaria o como fruto de la generalización de relaciones numéricas entre cantidades; se consideró conveniente explorar cómo interpretaban los alumnos algunas expresiones algebraicas que tienen un significado real. Por tal razón se les asignó la onceava y última guía de trabajo que se analiza a continuación:

Onceava Guía de Trabajo

El 18 de octubre se aplicó la última guía (Vea Anexos 2) que tenía por objetivos iniciar el desarrollo de dos habilidades más, del pensamiento algebraico de los estudiantes:

1. Interpretar una relación entre dos cantidades expresada algebraicamente.
2. Construir sucesiones de números a partir de una regla dada en el lenguaje algebraico.

En la primera parte de la guía se les presentó la siguiente situación

> En una secuencia de polígonos, la cantidad de vértices (***V***) de cada polígono la da la expresión $V = 2K^2 + 1$, donde ***K*** representa el número del polígono

Las interpretaciones a esta expresión fueron:

Equipo 1

1-) la cantidad de vertices (v) es igual al doble del numero del poligono al cuadrado ($2k^2$) mas 1

Equipo 4:

Significa que el vertice lo podemos encontrar si sabemos el número del polígono lo elevamos al cuadrado, lo multiplicamos por 2 y le sumamos 1.

Equipo 5:

1 ya que K representa el número de poligonos la Formula dice $V = 2 \cdot K^2 + 1$ Si el número de figuras es 1 Se hace la Siguiente operación $1^2 \cdot 2 + 1$

En la segunda parte de la guía se les presentó la siguiente situación:

En la expresión $C = \frac{20,000}{A}$, ***C*** representa la cuota que tiene que dar cada alumno de un instituto para la compra de un equipo de cómputo. ***A*** representa el total de alumnos que participarán en la compra

Algunas interpretaciones que le dieron a esta expresión son:

Equipo 3:

R= Nos quiere decir que se van a dividir el gasto de el equipo de computo y que nos indica que son cantidades Indirectamente proporcional y nos indica cuanto dinero va a pagar cada uno. 20,000 representa el valor del costo del equipo de computo.

Equipo 7:

*Nos indica el precio de el equipo de computo, que se divide entre el total de alumnos, para saber la cuota que corres-ponde a cada alumno.

*El 20,000 representa el total del [illegible] del equipo de computo.

Las opiniones anteriores evidencian que los alumnos, en ambos casos, interpretaron correctamente el significado de las expresiones presentadas. Lo anterior se puede atribuir al enfoque en que se presentaron, durante todo el proceso, las expresiones algebraicas que construyeron; siempre tenían un significado para los estudiantes y cada término era construido en función de algo que se quería representar. Nunca las letras fueron entes extraños para el grupo, al contrario, fueron los mismos alumnos que recurrieron a ellas como un medio para expresar sus ideas matemáticas.

A continuación se presenta el trabajo de dos equipos en el que tenían que aplicar las expresiones anteriores para generar en tablas respectivas series de números. Esto evidencia aún más el grado de interpretación que los equipos presentaron sobre dichas expresiones y el provecho que sacaron de ellas.

Equipo 2 en la primera expresión

No. del Polígono (K)	Cantidad de vértices (V)
1	3
2	9
3	19
4	33
5	51
6	73
7	99
8	129
9	163

Equipo 6 en la segunda expresión

Cantidad de alumnos (A)	Contribución (C)
100	200
150	133.33
200	100
300	66
400	50
500	40
600	33,33
1000	20

En todo el proceso desarrollado en el curso, se destaca la importancia de darle la oportunidad a los estudiantes de que exterioricen sus pensamientos y sus creencias de alguna manera, solo así el profesor puede estar conciente de qué es lo que están aprendiendo los alumnos y cuál es el mensaje que les queda en sus mentes después de una experiencia educativa. No basta que memoricen por regla, que en una propiedad matemática enunciada en lenguaje algebraico las letras representan a cualquier número, sin darle la oportunidad de que comprueben la validez de esas propiedades en los diferentes conjuntos numéricos y que identifiquen las condiciones bajo las cuales son válidas. No es que en cinco minutos de una clase los alumnos adquieren un concepto matemático en general y algebraico en especial. Las ideas algebraicas requieren de actividades especiales de construcción para que sean asimiladas por los estudiantes.

El trabajar con “expresiones con significado” despierta el interés de los alumnos en el trabajo que realizan. Este grupo, con su actitud no mostró rechazo alguno a las ideas algebraicas que de manera paulatina las iban construyendo y por lo tanto se iban apropiando de ellas, ampliando con ello sus formas de pensamiento.

CAPÍTULO V: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Conclusiones:

1. El desempeño de los diferentes equipos en cada una de las sesiones de trabajo constituyen evidencia suficiente para afirmar los alumnos lograron:

- Traducir expresiones verbales al lenguaje algebraico.
- Expresar relaciones numéricas usando el lenguaje algebraico.
- Reconocer, describir y generalizar patrones numéricos.
- Proponer y manejar técnicas adecuadas para simplificar términos semejantes y multiplicar monomios.
- Construir sucesiones de números a partir de una regla dada.

2. Se identifican dos factores determinantes para que la estrategia de resolución de problemas sea efectiva:

- Las variantes de los trabajos en equipos y las presentaciones individuales; ya que a un alumno por si sólo se le dificultaría argumentar claramente sus razonamientos, o reconocer en qué momento ha formulado una conjetura falsa. Fueron los debates, tanto en equipos como grupales, que consolidaron la forma de pensar de los alumnos.

- La selección adecuada de los problemas, la forma y el momento en que se presentan. Se debe procurar que los conocimientos requeridos estén presente en todos los estudiantes. Las actividades deben aprovechar las habilidades aritméticas de los estudiantes como punto de partida para introducirlos al uso del código algebraico; pues se evidenció que recurriendo a la aritmética los alumnos daban paso al álgebra con mayor seguridad. Los problemas se deben seleccionar según el nivel de desarrollo del estadio de las operaciones formales que presenta el grupo.

3. La estrategia de resolución de problemas resultó ser adecuada para iniciar en los estudiantes el desarrollo de cada una de las habilidades que se pretendía con cada Guía de Trabajo; pues se abordó el aprendizaje del código algebraico, no a partir de un conocimiento previo de reglas de transformaciones algebraicas y definiciones, sino a través de su uso. Los conceptos algebraicos se desarrollaron por necesidad y no por un fin en si mismos. Cada equipo alcanzó un nivel de dominio de cada habilidad según sus capacidades internas.

Recomendaciones:

- Modificar los programas de matemáticas del Centro de Investigación e Innovación Educativa, en cuanto a las unidades relacionadas con el álgebra para que éstas estén orientadas al desarrollo de habilidades de pensamiento algebraico y respondan más a una álgebra introductoria o de iniciación que preparen al alumnado para el estudio formal del álgebra en el nivel medio o superior.

- Darle seguimiento al grupo de alumnos en el desarrollo del pensamiento algebraico a través de la resolución de problemas.

- A los profesores de matemáticas: incluir desde los primeros grados de la educación básica, actividades en donde los estudiantes tengan que plantear expresiones aritméticas con el objeto de iniciarlos a que acepten la falta de clausura en determinadas situaciones, como una preparación para entender las expresiones algebraicas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFÍCAS

Alonso, Luis (2005). ¿Cuál es el nivel o dificultad de la enseñanza que se está exigiendo en la aplicación del nuevo sistema educativo?. Documento en la Web, lalonso@pie.xtec.es. IES «Can Puig». Barcelona.

Bednarz, N. y Guzmán, José (2000). *¿Cómo abordan los estudiantes de secundaria la resolución de problemas antes de ser introducidos al Álgebra?*. Comité editorial de Matemática Educativa. Aspectos de la Investigación Actual. CINVESTAV. México.

Duval, Raymond (1999). *Los Problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo.* Edición en castellano, 2004. Grupo de Educación matemática de la universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.

Duval Raymond (1999). *Semiósis y Pensamiento Humano.* Traducción, 1999. Grupo de Educación matemática de la universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.

Fujii, Toshiakaira (1989). Sondeando la comprensión de las variables en los estudiantes a través del Conflicto Cognoscitivo. onlinedb.terc.edu/PME2003/PDF/Plen5fujii.pdf. Japón

Gustafson, R. and Frisk, Peter D. (1988). *Intermediate Álgebra*. Segunda Edición. Editorial Brooks / Cole. California.

Jean Lauand, L. (2002). El álgebra como ciencia árabe. http://www.webislam.com/numeros/ 2002/163/Temas/%C1lgebra_%C1rabe.htm. Madrid.

NCTM (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Primera edición en castellano. Sociedad Andaluza de Educación Matemática, Thales. Sevilla.

Palarea, María (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años.* Tesis doctoral. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de la Laguna. España.

Polya, G. (1965). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. Vigésimo primera reimpresión, junio 1997. Editorial Trillas. México.

CNB (2005). *Diseño Curricular Nacional para la Educación Básica*. Propuesta. Secretaría de Educación. Honduras.

Resnick, Laren B. y Ford, Wendy W. (1990). *La Enseñanza de las Matemáticas y sus Fundamentos Psicológicos.* Primera reimpresión, 1998. Editorial Piadós. Barcelona – Buenos Aires – México.

Santos Trigo, Luz Manuel (1997). *Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemática.* 2ª Edición, Grupo editorial Iberoamérica. México, D.F.

Socas, Martín Manuel; Camacho, Matías y otros (1996). *Iniciación al álgebra.* Primera reimpresión. Editorial Síntesis. Madrid, España.

Swokowski, Earl W. (1988), *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. Segunda edición. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Ursini, Sonia (1996). *Creación de un potencial para trabajar con la noción de variable*. Grupo editorial Iberoamérica. Investigaciones en Educación Matemática, Fernando Hit (Editor). México

Vila, Antoni y Callejo, María Luz. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar*. Narcea Ediciones.

Woolfolk, Anita E. (1999). *Psicología Educativa*. Séptima edición. Editorial Prentice Hall.

Anexos

Anexo 1: Prueba Diagnóstica

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán
Centro de Investigación e Innovación Educativa
Centro de Matemáticas

Prueba Diagnóstica de Matemáticas

Curso: I Bachillerato con orientación en educación Primer Semestre de 2006

Nombre del alumno: _____ Fecha: _____

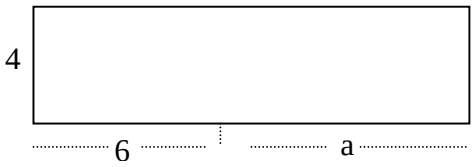
Instrucciones: A continuación se le presentan 7 problemas los que tiene que resolver en forma clara y ordenada dejando todos sus procedimientos por escrito aunque estuviesen incompletos o los considere incorrectos.

1. El perímetro de una figura geométrica es la suma de las longitudes de cada uno de sus lados. Encuentre el perímetro de las siguientes figuras:

a)

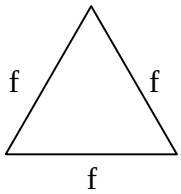
Perímetro: _____

b)



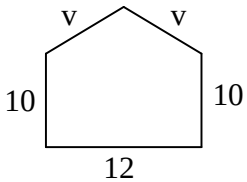
Perímetro: _____

c)



Perímetro: _____

d)



Perímetro: _____

2. Escriba de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible.

a) $3a - (b + a) =$ _____
b) $2a + 5b =$ _____
c) $2y (3 – 4y) + 5y^2 – 7y =$ _____
d) $(a + b) + (a – b) =$ _____
e) $3(x –5) – 7x + 3 =$ _____

3. Exprese con signos, letras y números:

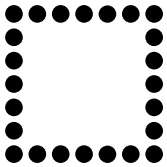
a. Un número cualquiera: _____

b. La suma de dos números distintos: _____

c. La suma de un número más el doble del mismo número es igual a 24: _____

d. El número de lempiras que representan ***x*** billetes de 5 lempiras y ***x*** billetes de 20: _____

4. Observe la cantidad de puntos que hay en el siguiente "cuadrado"



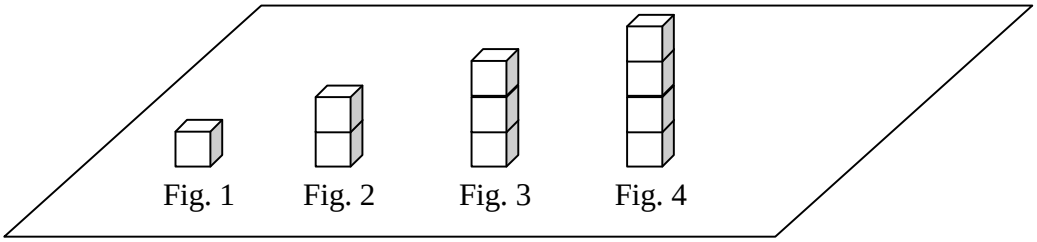
c) ¿Cuántos puntos hay en un "cuadrado" de **10** puntos en la base?

d) ¿Cuántos puntos hay en un "cuadrado" de **n** puntos en la base?

5. Complete el siguiente cuadro de edades, suponiendo que actualmente Pedro tiene el doble de la edad que Sergio, Martha tiene ocho años más que Pedro y Tony tiene doce años menos que la suma de las edades de Martha y Sergio.

	Pedro	Tony	Martha	Sergio
Edad Actual	a)	c)	e)	x
Edad dentro de una década	b)	d)	f)	g)

6. Observe cuidadosamente la siguiente secuencia de figuras



a) ¿Cuántas caras de los cubos son visibles en la cuarta figura?

b) ¿y en la sexta figura?

c) ¿y en la figura ene-ésima?

7. La compañía de teléfonos móviles Movitel ofrece un servicio con una tarifa básica de 300 lempiras al mes más 2 lempiras por cada minuto; las fracciones de minutos no son cobradas.

c. Escriba una expresión que nos indique el gasto mensual de un cliente cualquiera

d. ¿Cuánto pagará Anarda al finalizar el mes de febrero si habló un total de 75 minutos?

Anexo 2: Guías de Trabajo

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán
Centro de Investigación e Innovación Educativas
Centro de Matemáticas

Guía de trabajo 1

Asignatura: Matemáticas Jornada: Vespertina Semestre: Segundo de 2006

Instrucciones: Reunidos en los equipos de trabajo respondan los siguientes reactivos de manera clara y ordenada. Dejen por escrito todos sus procedimientos o argumentos aunque estén inconclusos o los consideren incorrectos.

Lea cuidadosamente esta propiedad **A + B = B +A**

1. ¿Qué propiedad representa la expresión?

2. ¿Qué significa esa propiedad?

3. ¿Quién es A? y ¿quién es B?

Lea cuidadosamente la siguiente propiedad **M + N = N + M**

4. ¿Qué significa esa propiedad?

5. ¿Será equivalente esta propiedad con la primera?

6. ¿Por qué?

Observe la siguiente propiedad: $1^x = 1$

7. ¿Qué significa esa expresión?

8. ¿Quién es ***x*** en esa expresión?

9. ¿Qué tipo de número puede ser la ***x***? ¿podrá ser un número negativo? ¿podrá ser cero?

10. Escriba una expresión que represente la suma de 7 con cualquier número

11. Escriba una expresión que represente el producto de 3 con cualquier número

12. Escriba una expresión que represente la diferencia entre dos números cualesquiera

13. La expresión **X + X** ¿será equivalente a la expresión **F + G**?

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán
Centro de Investigación e Innovación Educativas
Centro de Matemáticas

Guía de trabajo 2

Asignatura: Matemáticas Jornada: Vespertina Fecha: _____ Equipo: _____

Instrucciones: Reunidos en los equipos de trabajo respondan los siguientes reactivos de manera clara y ordenada. Dejen por escrito todos sus procedimientos o argumentos aunque estén inconclusos o los consideren incorrectos.

1. Escriban una expresión algebraica para las siguientes cantidades
   a. Un número cualquiera,
   b. La suma de dos números distintos,
   c. El doble de la suma de dos números
   d. La mitad de un número.
   e. El doble de la diferencia entre A y B.
   f. El doble de un número, menos 5.
   g. El cuádruplo de un número más 7.
   h. El triple de un número más el doble del mismo número.
   i. El doble de un número, por y.
   j. El cuadrado de un número.

2. Si **D** representa el precio en lempiras de 5 grabadoras; representen usando únicamente la variable **D** el precio de
   a) 45 grabadoras
   b) una grabadora
   c) 5 docenas de grabadoras
   d) 3 grabadoras

3. El conductor de un colegio hizo "n" viajes en un día, transportando 50 niños en cada viaje. ¿Cómo expresarían el número total de niños que transportó ese día?

4. El dueño de un negocio vende la misma cantidad de periódicos cada día, ¿cómo expresarían el número total de periódicos vendidos en dos semanas (14 días)?

5. Traduzcan a lenguaje algebraico las frases e ideas siguientes:
   a) El precio de "**m**" discos a 760 lempiras cada uno.
   b) Lo que cuesta un lápiz si 15 cuestan **P** lempiras.
   c) El número que representa 50 unidades menos que el número "**h**".
   d) El número que es la cuarta parte del número "**y**".

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán
Centro de Investigación e Innovación Educativas
Centro de Matemáticas

Guía de trabajo 3

Asignatura: Matemáticas Jornada: Vespertina Fecha: _____ Equipo: _____

Instrucciones: Reunidos en los equipos de trabajo respondan los siguientes reactivos de manera clara y ordenada. Dejen por escrito todos sus procedimientos o argumentos aunque estén inconclusos o los consideren incorrectos.

1. ¿Qué significa **nm**? Seleccionen todas las respuestas que consideren correctas.

   a) n y m b) n x m c) n + m d) 25 + 26 e) 25 x 26

   Explíquense: _____

2. Desarrolle de manera clara lo que a continuación se le pide

   a) ¿En qué se transforma **a + 4**, si a = 2?
   b) ¿En qué se transforma **4m**, si m = –6?
   c) ¿En qué se transforma **5b – 3**, si b = 3?
   d) Si **a + b** = 43, calculen el valor de **a + b + 2**
   e) Si **n – 246** = 762, calculen el valor de **n – 247**
   f) Si **e + f** = 8, calculen el valor de **e + f + g**
   g) ¿Qué valor toma la expresión $\mathbf{3x^2 - 2x + 8}$ cuado **x** toma el valor de 7?
   h) ¿Qué valor toma la expresión $\mathbf{5y^{95} - 2y^{96} - 1}$ cuado **y** toma el valor de -1?
   i) Encuentre dos valores diferentes para la expresión **2A + 3A**
   j) Encuentre dos valores diferentes para la expresión **5A – 3B**
   k) ¿Cuántos valores específicos puede tomar la expresión anterior?

3. ¿Será posible decir cuál de las siguientes cantidades es la menor o cuál es la mayor?

   p

   p + 7

   p - 2

   2 p

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán
Centro de Investigación e Innovación Educativas
Centro de Matemáticas

Guía de trabajo 4

Asignatura: Matemáticas Jornada: Vespertina Fecha: _____ Equipo: _____

Instrucciones: Reflexionando a cerca del "Acto de Magia" discutido en la clase anterior* respondan a las siguientes interrogantes.

1. ¿Por qué es posible adivinar el número? ¿creen que es un simple truco?

2. Escriban una expresión que represente todo lo que sucede en el problema

3. Esa expresión ¿vale sólo para números naturales entre 0 y 10? o ¿vale para otro tipo de números?

4. ¿Por qué la respuesta es 100?

5. ¿Se puede modificar el problema para que el resultado sea otro número específico; 30, 40, 80 ó 200 por ejemplo?

6. Escriban una expresión que nos dé un resultado en general; no 30, 40, 80, 100, ni 200, si no un número cualquiera.

*** "Acto de Magia"**

Piensen en un número natural específico, entre 0 y 10 Primeramente, súmenle a 50 ese número y escriban el resultado. No lo digan Ahora réstenle a 50 el mismo número que pensaron; escriban este otro resultado. Finalmente, sumen los dos resultados anteriores. La respuesta es 100

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán
Centro de Investigación e Innovación Educativas
Centro de Matemáticas

Guía de trabajo 5

Asignatura: Matemáticas Jornada: Vespertina Fecha: _____ Equipo: _____

Instrucciones: Reunidos en los equipos de trabajo respondan los siguientes reactivos de manera clara y ordenada. Dejen por escrito todos sus procedimientos o argumentos aunque estén inconclusos o los consideren incorrectos.

4. Exprese la base y la altura de cualquier rectángulo en la que

a) la base sea el doble de la altura

b) la base exceda en 7 unidades a la altura

c) la base sea igual a la altura

d) la altura mida 12 unidades menos que la base

e) la altura sea la tercera parte de la base

5. Complete el siguiente cuadro de edades, suponiendo que actualmente Pedro tiene el doble de la edad que Sergio, Martha tiene ocho años más que Pedro y Tony tiene doce años menos que la suma de las edades de Martha y Sergio.

	Pedro	Tony	Martha	Sergio
Edad Actual				**X**
Edad dentro de una década				

6. Exprese la suma de cuatro números enteros consecutivos cualesquiera

7. Exprese la suma de cuatro números impares consecutivos

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán
Centro de Investigación e Innovación Educativas
Centro de Matemáticas

Guía de trabajo 6

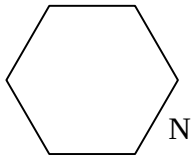
Asignatura: Matemáticas Jornada: Vespertina Fecha: _____ Equipo: _____

Instrucciones: Reunidos en los equipos de trabajo respondan los siguientes reactivos de manera clara y ordenada. Dejen por escrito todos sus procedimientos o argumentos aunque estén inconclusos o los consideren incorrectos.

Primera Parte

Considerando que el perímetro de una figura geométrica es la suma de las longitudes de cada uno de sus lados.

1. ¿Cuál es el perímetro del siguiente hexágono regular?

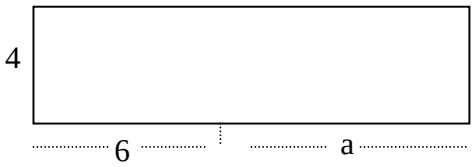


2. Encuentre el perímetro de las siguientes figuras:

a)

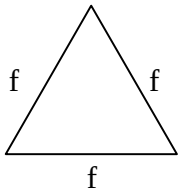
Perímetro: _____

b)



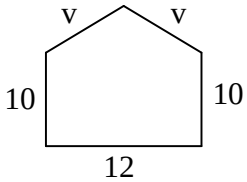
Perímetro: _____

c)



Perímetro: _____

d)



Perímetro: _____

3. ¿Cuál es el perímetro de un triángulo cualquiera?

4. Escriba un expresión para el perímetro de un triángulo isósceles

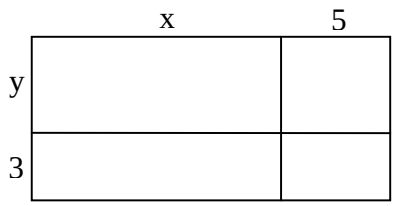
Segunda Parte

Considerando que el área de un rectángulo se calcula multiplicando la base por la altura

1. Escriba una expresión para el área de cualquier rectángulo

2. Escriba una expresión para el área de cualquier cuadrado

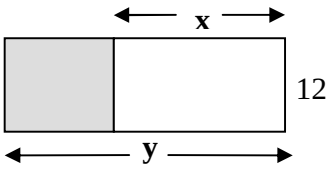
3. Calcule el área de cada una de las cuatro regiones en que se divide el siguiente rectángulo



Área Total: _____

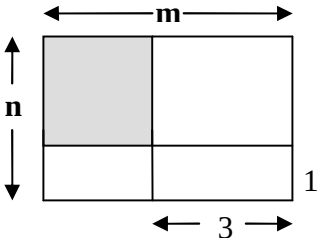
4. Calcule el área de las zonas sombreadas

a)



Área sombreada: _____

b)



Área sombreada: _____

Tercera Parte

Escriba en el espacio respectivo el número que hace falta

a) 17 23 29 35 _____

b) 50 39 28 17 _____

c) 12 13 15 18 _____

d) 2 5 10 17 _____

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán
Centro de Investigación e Innovación Educativas
Centro de Matemáticas

Guía de trabajo 7

Asignatura: Matemáticas Jornada: Vespertina Fecha: _____ Equipo: _____

Instrucciones: Resuelvan el problema que a continuación se les presenta, dejen por escrito todos sus procedimientos o argumentos, aun que los consideren incorrectos.

Problema: Exprese el perímetro de un triángulo rectángulo isósceles cualquiera, utilizando sólo una variable.

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán
Centro de Investigación e Innovación Educativas
Centro de Matemáticas

Guía de trabajo 8

Asignatura: Matemáticas Jornada: Vespertina Fecha: _____ Equipo: _____

Instrucciones: Reunidos en los equipos de trabajo respondan los siguientes reactivos de manera clara y ordenada. Dejen por escrito todos sus procedimientos o argumentos aunque estén inconclusos o los consideren incorrectos.

Primera Parte

1. Observen cuidadosamente las tres figuras que se le presentan a continuación:

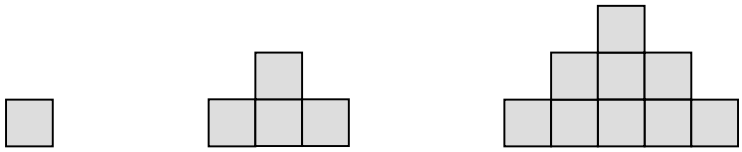


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

2. ¿Cuántos cuadrados tiene cada figura?

3. Representen la figura 4 de ese tipo ¿Cuántos cuadrados tiene?

4. ¿Cuántos cuadrados tiene la figura 5?

5. ¿Cuántos cuadrados tiene la figura 10?

6. Completen la siguiente tabla

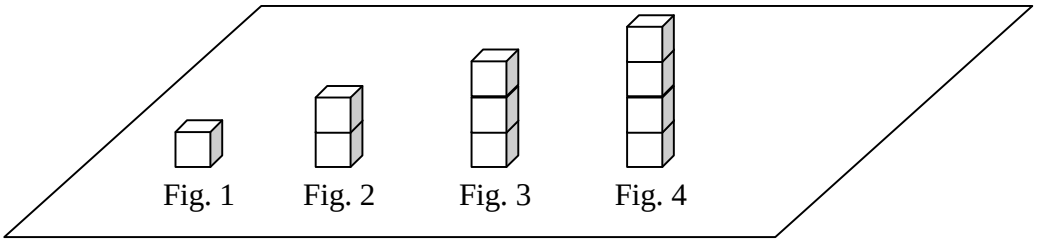
Número de la Figura	Total de cuadrados en la figura
7	
9	
	225
29	
53	

7. Expliquen cómo encontraron el número de la figura que tiene 225 cuadrados en total

8. Expliquen con palabras cómo se puede determinar el total de cuadrados de cualquier figura, como las anteriores, si conocemos el número de la figura.
9. Construya alguna expresión algebraica para la respuesta del numeral 8

Segunda Parte

1. Observe cuidadosamente la siguiente secuencia de figuras



   a. ¿Cuántas caras de los cubos son visibles en cada una de las figuras?

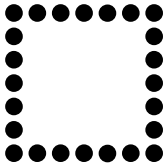
   b. ¿Cuántas caras de los cubos son visibles en la figura 6 de ese tipo?

   c. ¿y en la figura 10?

   d. ¿Cómo podemos conocer la cantidad de caras que son visible en cualquier figura de ese tipo si conocemos el número de la figura?

   e. Escriba una expresión para la respuesta del inciso d.

2. Observe la cantidad total de puntos que hay en el siguiente "cuadrado" en cuya base hay 7 puntos



   a. En total, ¿cuántos puntos hay en la figura anterior?

   b. ¿Cuántos puntos hay en un "cuadrado" de **5** puntos en la base?

   c. ¿Cuántos puntos hay en un "cuadrado" de **10** puntos en la base?

   d. ¿Cuántos puntos hay en un "cuadrado" de **n** puntos en la base?

Tercera Parte

1. Observen cuidadosamente las tres figuras que se le presentan a continuación:

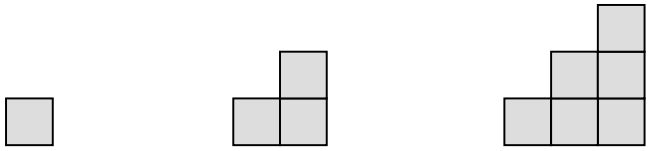


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

2. ¿Cuántos cuadrados tiene cada figura?

3. Representen la figura 4 de ese mismo tipo ¿Cuántos cuadrados tiene?

4. ¿Cuántos cuadrados tiene la figura 5?

5. ¿Cuántos cuadrados tiene la figura 1000?

6. Completen la siguiente tabla

Número de la Figura	Total de cuadrados en la figura
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

5. Expliquen con palabras cómo se puede determinar el total de cuadrados de cualquiera de las figuras como las anteriores si conocemos el número de la figura.

6. Construya alguna expresión algebraica para la respuesta del numeral 7

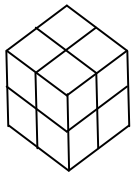
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán
Centro de Investigación e Innovación Educativas
Centro de Matemáticas

Guía de trabajo 9

Asignatura: Matemáticas Jornada: Vespertina Fecha: _____ Equipo: _____

Instrucciones: Reunidos en los equipos de trabajo respondan los siguientes reactivos de manera clara y ordenada. Dejen por escrito todos sus procedimientos o argumentos aunque estén inconclusos o los consideren incorrectos.

1. Observen detenidamente la siguiente figura que representa un cubo de arista 2 unidades

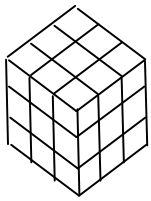


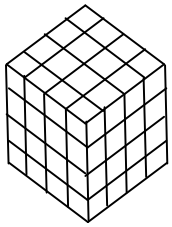
   a. ¿Cuántos “cubos pequeños” forman el cubo más grande?

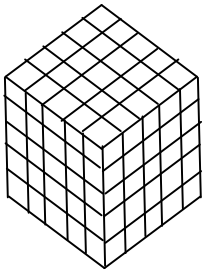
2. Si se sumerge completamente el cubo grande en un recipiente con pintura:
   a. ¿Cuántos “cubos pequeños” quedarían con 4 caras pintadas?
   b. ¿Cuántos “cubos pequeños” quedarían con 3 caras pintadas?
   c. ¿Cuántos solamente con dos caras?
   d. ¿Cuántos solamente con una cara?
   e. ¿Cuántos con ninguna?
   f. ¿Cuál es la suma de las respuestas dadas en los apartados anteriores?

3. ¿Existe alguna relación entre la respuesta del inciso a. del numeral 1 y la del inciso f. del numeral 2?

4. Realicen las mismas actividades para los cubos de dimensiones 3, 4 y 5 por arista







5. Organicen la información en la siguiente tabla y traten de realizar las mismas actividades para los cubos con las demás dimensiones que se les presenta.

Distribución de cubitos según caras pintadas, por dimensiones

Longitud de la arista	Número de Caras Pintadas					Número total de “cubitos”
	0	1	2	3	4	
2						
3						
4						
5						
6						
7						
n						

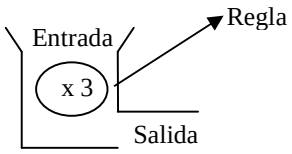
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán
Centro de Investigación e Innovación Educativas
Centro de Matemáticas

Guía de trabajo 10

Asignatura: Matemáticas Jornada: Vespertina Fecha: _____ Equipo: _____

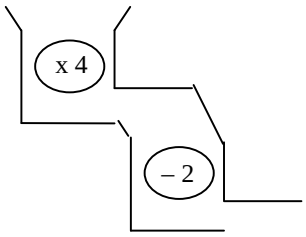
Instrucciones: Reunidos en los equipos de trabajo respondan los siguientes reactivos de manera clara y ordenada. Dejen por escrito todos sus procedimientos o argumentos aunque estén inconclusos o los consideren incorrectos.

1. En la a siguiente "máquina" entran números reales y salen números reales considerando una regla específica. En la tabla de la izquierda se ven las salidas de algunos números. Su trabajo consiste en completar la tabla



Entrada	-10	0	20	$\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}$	M
Salida	-30	0	60			

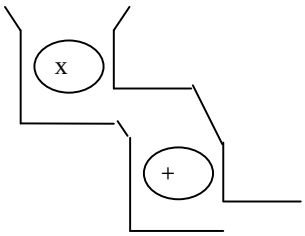
2. Considerando la siguiente máquina:



Entrada	-25	3.7	$2\sqrt[3]{5}$	10	$\frac{5}{2}$	$-4\frac{2}{7}$
Salida						

a. Completen la tabla respectiva
b. Escriban una expresión para la salida de un número cualquiera que entre en la máquina

3. Analicen la tabla que presenta las entradas a la "máquina" con sus respectiva salidas



Entrada	1	2	7	0	-5	-10
Salida	5	7	17	3	-7	-17

a. Escriban en la "máquina la regla respectiva"
b. Escriban una expresión para la salida de un número cualquiera que entre en la máquina

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán
Centro de Investigación e Innovación Educativas
Centro de Matemáticas

Guía de trabajo 11

Asignatura: Matemáticas Jornada: Vespertina Fecha: _____ Equipo: _____

Instrucciones: Reunidos en los equipos de trabajo respondan los siguientes reactivos de manera clara y ordenada. Dejen por escrito todos sus procedimientos o argumentos aunque estén inconclusos o los consideren incorrectos.

Primera Parte

En una secuencia de polígonos, la cantidad de vértices (***V***) de cada uno de ellos la da la expresión $V = 2K^2 + 1$, donde ***K*** representa el número del polígono

1. Expliquen con palabras esa expresión algebraica
2. Complete la siguiente tabla

No. del Polígono (***K***)	Cantidad de vértices (***V***)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

3. ¿Existirá, en esa secuencia, algún polígono que tenga 243 vértices? Explíquese

4. La figura número 8,450 ¿cuántos vértices tiene?

5. ¿Existirá algún polígono con 20,000 vértices? Explíquese

6. El número de la figura (***K***) y el total de vértices (***V***) ¿serán cantidades directamente proporcionales? Explíquese

7. ¿A cuáles conjuntos de números pertenecen ***K*** y ***V***?

Segunda Parte

En la expresión $C = \frac{20,000}{A}$, ***C*** representa la cuota que tiene que dar cada alumno de un instituto para la compra de un equipo de cómputo. ***A*** representa el total de alumnos que participarán en la compra.

1. Explique en palabras esa relación, ¿qué nos indica?, ¿qué representa el 20,000?

2. Si la dirección del instituto determinase que la contribución la harían los 25 alumnos que egresarán este año ¿Con cuánto contribuirá cada alumno?

3. Si participaran todos los estudiantes de la institución:
   a) Complete el siguiente cuadro para distintas cantidades de alumnos

Cantidad de alumnos (**A**)	Contribución (***C***)
100	
150	
200	
300	
400	
500	
600	
1000	

   b) ¿Será posible que a cada alumno le corresponda L. 115.00 de contribución?

   c) ¿Cuántos alumnos tiene la institución si la contribución de cada alumno es de L. 280.00?

4. ¿A cuáles conjuntos de números pertenecen ***C*** y **A**?

5. La cantidad de alumnos (***A***) y la contribución respectiva (***C***) ¿son cantidades directamente proporcionales? Explíquese.

Anexo 3: Protocolos

Protocolo 1

Discusión grupal analizando el significado de las letras en la expresión A + B = B + A

Profesor: ¿Quién es A y quién es B?

Enrique: Cualquier número natural

Profesor: ¿Cualquier número natural?

Enrique: En este caso si; como se vale con enteros

Kateryn: Tienen que ser del mismo signo

Grupo: Noooo…

Diego: Si, para que se puedan sumar

Profesor: Dice Diego que tienen que ser del mismo signo para que se puedan sumar

Grupo: Siii

Dania: ¡Ah!, para que se puedan sumar tienen que ser del mismo – Apoyando a Diego –

(Se le pide a Diego que se explique en la pizarra, este utiliza los números –3 y 2 quien ayudado por el resto del grupo llega a la misma respuesta –3 + 2 = –1 y 2 + (–3) = –1)

Profesor: ¿Dio igual o no dio igual?

Grupo: Si

Profesor: Entonces, ¿pueden ser del signo contrario?, ¿si o no?

Protocolo 2

A nivel grupal, generado por las diferentes representaciones aritméticas y algebraicas de la expresión "la suma de 7 con cualquier número" escritas en la pizarra

Bany explica al grupo la propuesta de su equipo: 7+8=15, 7+7=14, 7+6=13

Profesor: La primera suma dice, ¿siete más cuánto?

Todo el grupo: más ocho

Profesor: ¡Así dice allá arriba!, ¿siete más ocho?

Dania: Y ocho no es cualquier número

Profesor: ¡Y ocho no es cualquier número!

Moisés pide la palabra para presentar la propuesta de su equipo: 7 + x

Profesor: Moisés, explique su opinión que está en la pizarra.

Moisés: Nos están pidiendo siete más cualquier número, recordemos que x – subraya la x – puede ser cualquier número, x puede ser ocho, puede ser nueve o cualquier otro.

Profesor: Si, es que, no se les pidió que hicieran una suma sino que sumaran a siete con un número cualquiera

José Manuel: y ¡represente! – enfatizando que los que se les pide es representar la suma –

Protocolo 3

Discusión en el Equipo 5 intervenida por el profesor tratando de representar en el lenguaje matemático la expresión "El doble de la diferencia entre A y B"

Luis Enrique: ¿Cuál es la pregunta?

Darwin: El doble de la diferencia entre A y B

Raúl: ¡Es una división!

Darwin: Es una resta, diferencia

Luis Enrique: ¡Ah!, A menos B, más dos

Profesor: ¿sumar dos significa doble?, si yo tengo tres más dos ¿con eso hago el doble?

Equipo: No

Profesor: ¿Cómo se obtiene el doble?

Darwin: A menos B por dos

Profesor: Traten de escribir de modo que se entienda bien, que no se entienda que es el doble de B, sino, el doble de la diferencia

Luis Enrique: ¡Ahí está!; A menos B por dos

Raúl: Siii, si; si lo miramos así nos dice… ¿qué fue lo que representaste vos? – señalando a Darwin –

Darwin: A menos B por dos

Raúl: Bueno, si lo pasamos a palabras viene siendo esto

Carlos Luis: ¿Viene siendo esto?

(Darwin presenta por escrito su propuesta: A – B •2)

Profesor: A menos B punto 2, ¿todos escribieron A menos B punto 2?

Raúl y Carlos Luis: Si

Profesor: ¿No creen que ahí en sus cuadernos dice el doble de B?

Darwin: ¡El doble de B!

Profesor: Ese dos que tienen ustedes escrito en sus cuadernos me pareciera que fuera el doble de B, ¿Ustedes qué opinan?

Raúl y Carlos Luis: ¡Ah, sí!

Raúl: Entonces, ¿tiene que ser entre paréntesis?

Darwin: Si, porque primero tienen que ser las multiplicaciones y de ahí las restas

Profesor: Entonces tiene que ser….

Raúl: entre paréntesis

Profesor: ¿A dónde tiene que ir el paréntesis?

Raúl: Parece que en A menos B para que se mire lo que nos piden

Profesor: ¿Así se mira lo que quieren decir?

Darwin: A menos B y el resultado multiplicado por dos.

Protocolo 4

Conversando con el Equipo 1 sobre la representación de la mitad de un número

Profesor: ¿Qué es lo que se les pide?

Cindy: Escriba la mitad de un número

Alejandra: Cero punto cinco

Profesor: Cero punto cinco, ¿es la mitad de un número o la mitad de uno?

Equipo: La de uno

Profesor: La de uno; pero se les pide de un número, ¡Ahí está hablando de un número que no se conoce! No pueden usar cero punto cinco.

Leel: ¿Tenemos que usar letras?

Profesor: ¡Tienen que usar letras!

(Pausa)

Profesor: ¿Y cómo se obtiene la mitad de un número?

Equipo: Dividiéndolo entre dos

Profesor: Y ¿entonces?

(Sigue la pausa)

Profesor: Si yo les pido la mitad de ocho

Leel: Cuatro

Profesor: ¿Cómo la obtuvo?

Leel: Dividiéndolo entre dos

Profesor: Si yo le digo a Cindy ¿un número cualquiera?

Cindy: Doce

Profesor: ¿Doce es un número cualquiera?

Cindy: Ah, ¿cualquiera?, ¡equis!

Profesor: ¡Equis!, y para hallarle la mitad a equis ¿qué tienen que hacer?

Leel: Dividirlo entre dos

Cindy: ¿Cómo podemos dividir una letra?

Profesor: Como no se les pide una respuesta, si no una expresión

Katia: Equis entre dos, entonces ponemos equis entre dos

Profesor: Recuerden que aquí no les estamos pidiendo respuestas, sino una expresión que diga Lo mismo con lo que está en palabras. Va a ser imposible dar una respuesta porque no conocemos el número.

Protocolo 5

Producto de la reflexión en el Equipo 4 ante la pregunta ¿Será posible decir cuál de las siguientes cantidades es la menor o cuál es la mayor: P, P+7, P–2, 2P?

Karla: P es mayor y, P más siete es mayor y, dos por P es mayor

Profesor: ¿Mayor que quién?

Dania: Que p, que p menos….

Karla: Que P,… entonces el único menor que P es P menos dos

Profesor: ¿Seguras?

Karla: Eso creemos

Profesor: ¿Bany?

Bany: Si – con gestos de bien convencida –

Profesor: Y la menor de todas es….

Karla: La menor de todas P menos dos, la mayor no sabemos

Profesor: ¿Segura?

Karla: Si

Helen: En la mayor pueden haber dos cantidades iguales

Karla: La mayor puede ser 2P o P+7,… ¡digo yo!

Dania: Pueden ser iguales como vos decís, ¿qué tal si en esta P fuera igual a 7? entonces siete más siete catorce y dos por siete catorce.

Profesor: Entonces P+7 y 2P ¿cómo son?

Dania: Podrían ser iguales, ¡podrían!

Profesor: Y ¿Podría ser más grande 2P?

Dania: ¿Qué quién?

Profesor: Que P+7

Karla: Siiiiii

Dania: Depende de que número fuera

Bany: Porque si fuera cinco, cinco más siete doce y cinco por dos diez

Dania: – un poco desilusionada – ¡O sea que cambia!

Profesor: ¿O será que siempre es menor 2P que P + 7?

(Piensan un poco y luego continúan)

Dania: Pueden ser iguales o menor

Profesor: ¿Nunca mayor?

Karla: Porque si es siete, siete más siete catorce y dos por siete catorce

Dania: Y si es nueve, ¿nueve más siete?

Karla: Quince

(Se ríen las dos por un momento a causa de la mala suma y luego vuelven a la normalidad)

Dania: y dos por nueve, dieciocho; ahí si es mayor

Profesor: Entonces 2P comparado con P + 7

Dania: Puede ser igual

Karla: Puede ser mayor

Dania: puede ser menor

Profesor: ¿De qué depende?

Dania: Del número

Profesor: ¿Es posible entonces, saber cuál es la mayor de las cuatro?

Dania: – Con gestos – No

Profesor: Escriban lo que acabamos de discutir ahorita.

Protocolo 6

A nivel de todo el grupo discutiendo la primera pregunta sobre el acto de magia ¿Por qué es posible adivinar el número?

Mercid: Es que, lo que se le quita a uno se le pone al otro

Profesor: ¿Lo que a una se le quita...?

Mercid: Se le pone al otro cincuenta, por ejemplo si a cincuenta le quitamos ocho quedan cuarenta y dos pero si lo sumamos al otro cincuenta quedan cincuenta y ocho

Luis Enrique: Es un truco porque se suma y se resta lo mismo

Profesor. ¿Y qué pasa si sumo y resto lo mismo?

Karla: Como si sólo hubiera sumado cincuenta más cincuenta

Dania: O sea, uno es positivo y el otro es negativo

Profesor: ¿Uno positivo…?

Dania: Uno es negativo, digamos menos siete, ¡ve!, menos siete y el otro más siete, eso se resta.

Profesor: Bien, traten de escribir ahora una expresión que represente a todo el problema

Protocolo 7

Karla explica frente a sus compañeros la expresión que escribió su equipo para representar lo sucedido en el acto de magia: (x + 50) + (50 – x)

Karla: Es que nosotros le llamamos x al número que pensamos. Primero le vamos a sumar cincuenta y después lo vamos a restar a cincuenta; y luego el resultado del mismo número – señalando las dos x – sumado y restado nos va a dar a cien porque aquí aumenta señalando (x+50) y después lo restamos entonces siempre dará igual

Profesor: Ahora, esa respuesta, – pausa – esa expresión que está ahí ¿tiene respuesta?

(Discuten todos los equipos y luego el profesor replantea la pregunta)

Profesor: ¿Cuál es el valor de esa expresión algebraica?

Tres alumnos: – en el fondo – cieeeen

Profesor: Le pregunto a Karla ¿Será correcto escribir que la respuesta de eso es cien?, como hizo el grupo uno; el grupo uno escribió igual a cien ((x+50) + (50–x) = 100), igual lo hizo el grupo tres y el grupo seis

Profesor: Ahora, ¿Es correcto decir que eso es igual a cien, Karla?

Karla: Si, – y lo escribe en la pizarra –

Profesor: ¡pregunta! ¿Por qué da cien?

Karla: Porque este es cincuenta – señalando el número – si fuera sesenta diera ciento veinte, si fuera cuarenta diera ochenta

Profesor: Y teniendo esos cuatro términos ahí: x, más cincuenta, más cincuenta, menos x ¿cómo concluye usted que da cien?

Karla: Porque cualquier número sumado a cincuenta y después se le resta – pausa – da igual pues

Profesor: Alguien del grupo, ¿creen que hay alguna propiedad matemática por ahí y que nos permite que eso de cien.

Dania: La que, eeh, un número negativo con otro positivo se cancelan

(Mientras Dania se dirige a la pizarra el profesor aclara)

Profesor: Estamos viendo porqué el resultado es cien

Dania: Entonces como este número es positivo – señalando la x – y este es negativo – señalandola –x – se cancelan

Luis Enrique: – Al fondo – ¡Bravo!

Profesor: ¿Están de acuerdo con eso?

Todo el grupo: Si

Protocolo 8

Intervención del profesor en el Equipo 7 al percatarse de la existencia de un error al completar el cuadro de las edades del Instrumento 5.

Profesor: Misés, ¿por qué a la edad de Pedro le escribió dos equis?

Káteryn: ¡Doce!

Profesor: Dos equis

Moisés: Porque es el doble de la edad de Sergio

Káteryn: ¡Ajá!

Profesor: Más abajo dice edad dentro de una década; volvieron a escribir dos equis ¿por qué?

Káteryn, Marely y Juan: ¿Dos equis? ¡Doce equis! – Moisés no había escrito bien –

Profesor: Doce equis… ¿por qué doce equis?

Káteryn: Porque una década tiene diez, y si se supone que es el doble de equis tendría que ser diez más dos equis, que es doce equis.

(Obs.: En este momento el grupo aun no puede operar con expresiones algebraicas)

Profesor: ¿Es diez más dos o es diez más cuánto?, ¿diez más cuánto es?

Káteryn: Diez más el doble de equis

Marely: – Muy convencida – Diez más dos equis

Profesor: Y diez más dos equis ¿será lo mismo que doce equis?

Moisés: no

Profesor: ¡A ver!

(Trabajan los miembros del equipo, Marely propone otra respuesta: 10+2x)

Profesor: ¿Cuál de las dos tiene más sentido?, ¿la primera, o la que dice Marely?, usted Káteryn, ¿a cuál le haya más sentido?

Káteryn: A ésta –indicando la de ella – si puede ser para definir mejor

Profesor: Nada más que usted cree que diez más dos equis es doce equis ¿Así creen los demás?

Káteryn: Si, yo si creo, se mira mejor aquí porque ya se mira doce por equis

Profesor: Doce equis significa… doce por equis

Káteryn: Entonces sería dos equis más diez porque es el doble de equis, no con las… doce de equis

Profesor: ¿Si verdad?

Protocolo 9

El Equipo 3 llama al para presentarle su respuesta (A + B + C + D) para la suma de cuatro enteros consecutivos.

Profesor: ¿Cómo lo harían si sólo se les permitiera usar una letra?

Profesor: ¿Cómo se llama el primer número?

José: A

Profesor: ¿Cuál será el segundo número si el primero se llama A? - Silencio-

Profesor: ¿Cómo son esos números?

Miguel: enteros consecutivos

Profesor: ¿Qué significa consecutivos?

(Queda el equipo trabajando sólo y proponen a + 2a + 3a + 4a)

Profesor: Explíquense

Miguel: Por que si a vale 1, 2a vale 3, 3a vale 3 y 4a vale 4 por lo que serían consecutivos.

Profesor: El problema es que no sabemos quien es A – la de la primera respuesta –

Miguel: Pero ya decimos que a vale uno

Profesor: Pero esos son los consecutivos de uno nada más, ¿qué pasa si a vale cinco?, ¿funcionará para a igual a cinco esos números?

Miguel: Ahí ya no podemos

Profesor: Elaboren una expresión que funcione para cualquier número

Protocolo 10

Discutiendo con el Equipo 7 sobre cómo encontrar el perímetro de un triángulo rectángulo isósceles utilizando solo una variable.

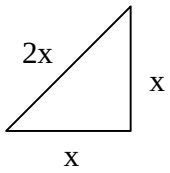
Káteryn: Entonces, si es un triángulo rectángulo isósceles dos lados son iguales, y la hipotenusa…

Moisés: Es la suma de los catetos

Káteryn: Por ejemplo, aquí a los catetos les pusimos equis y equis y a la hipotenusa dos equis

Profesor: ¿Están seguros de que eso va a dar la hipotenusa? Le pido al equipo que revisen bien esa parte de la hipotenusa. ¡Que todos opinen a ver!

El equipo ha presentado un dibujo como el siguiente:

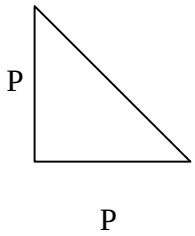


Moisés: Yo estoy de acuerdo profesor

Káteryn: Si profe, la hipotenusa es la suma de los catetos, – pausa – bueno, el profesor eso nos decía

Profesor: verifiquen

(Luis Enrique, integrante del Equipo 5 presentó en la pizarra y explica)



P = dos lados iguales

$$\left(\sqrt{p^2 + p^2}\right) + p + p$$

Profesor: ¿Por qué no puede se igual un cateto con la hipotenusa?

Un alumno del grupo: Dejaría de ser hipotenusa

Luis Enrique: La hipotenusa ya no mediría más que el cateto.

Protocolo 11

Equipo 4 y profesor buscando el modelo para la tercera parte del instrumento 8

Bany: Mil entre diez es cien, y lo multiplicamos por cincuenta y cinco porque como cabe diez veces

Profesor: ¿Y qué dicen los demás integrantes del equipo?, ¿les parece esa idea?

Dania: Si

Profesor: Otro grupo propuso lo mismo y yo les pedí que verificaran si esa regla se cumple en el cuatro. Usen esa regla para ver la figura ocho. ¡A ver!; conociendo la figura cuatro usen esa regla para la figura ocho a ver si se cumple

Dania: No se cumple

Karla: ¿Por qué?

Dania: Porque en una da diez y en la otra da…

Protocolo 12

Generada en el interior del Equipo 7 intervenida por el profesor, en busca del modelo para la tercera parte del instrumento 8

Káteryn: Da, por ejemplo, nueve por diez entre dos

Juan: Da cuarenta y cinco

Marely: Y ocho por siete es igual a cincuenta y seis, entre dos da veintiocho

(En este momento se acerca el profesor e interviene)

Profesor: Y eso, ¿se cumple en toda la tabla?

Equipo: Si

Profesor: Prueben con cinco a ver

Marely y Juan: – en relevo – cinco por seis; treinta; entre dos; quince

Profesor: ¿Verificaron que se cumple para toda la tabla?

Equipo: Siiii

Profesor: ¿Cuál sería su posible respuesta para la figura mil?

Káteryn: Novecientos noventa y nueve por mil, entre…

Juan: Es que se multiplica por un número de la figura más; sería mil por…, no por novecientos noventa y nueve!

Marely: Es por la figura que sigue

(En silencio hacen los cálculos respectivos)

Marely y Juan: – simultáneamente – quinientos mil quinientos

Profesor: ¿Cuánto?

Marely y Juan: – sonrientes – quinientos mil quinientos

Profesor: ¿Es mil por mil uno o mil por novecientos noventa y nueve?

Marely: Por mil uno

Profesor: ¿Se multiplica por el anterior o por el que sigue?

Equipo: por el que sigue

Profesor: ¿En todos los casos?

Equipo: Si